



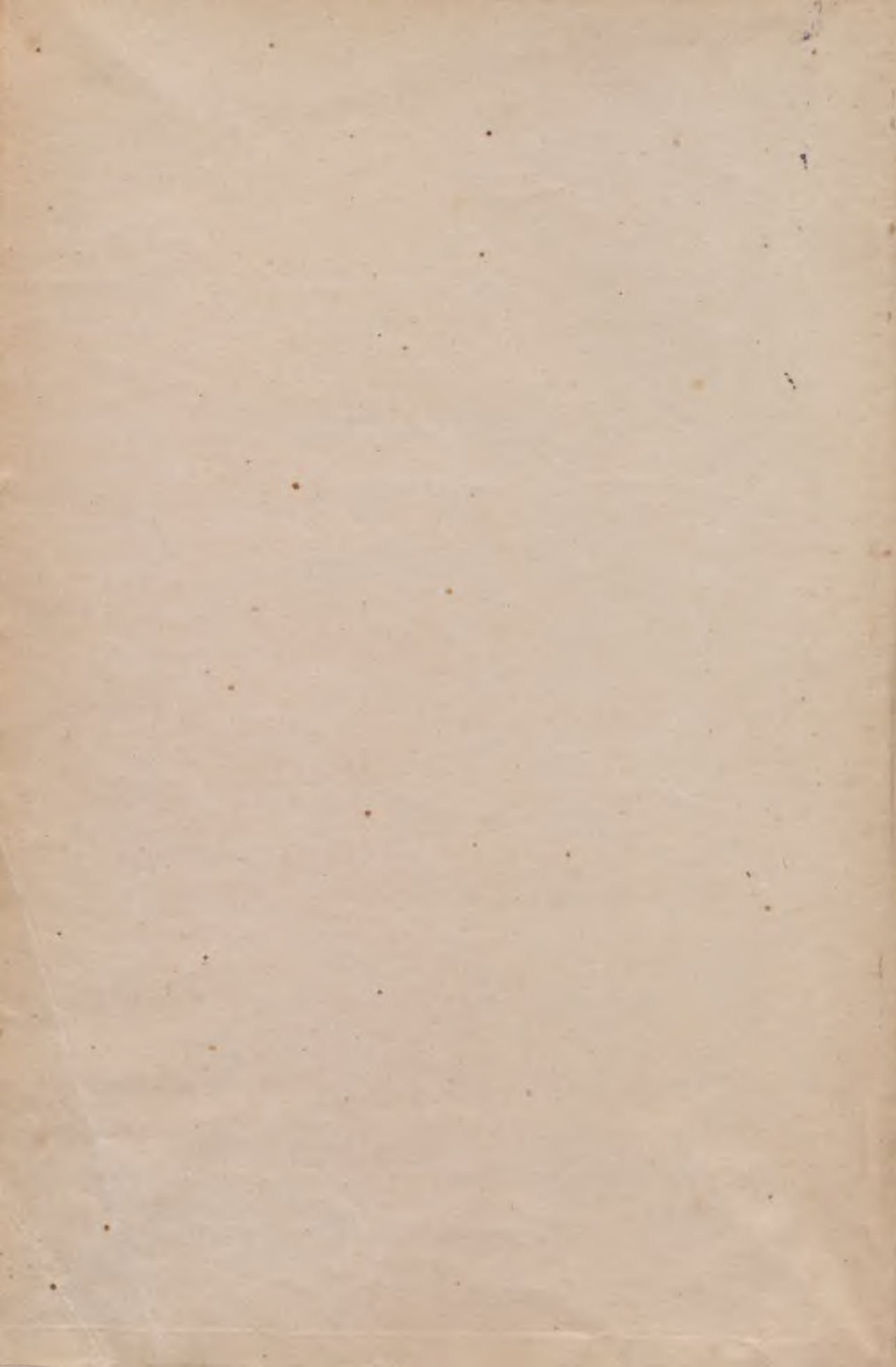
Kom. Bibl. Fed.
N. S. A. Pot. War 24

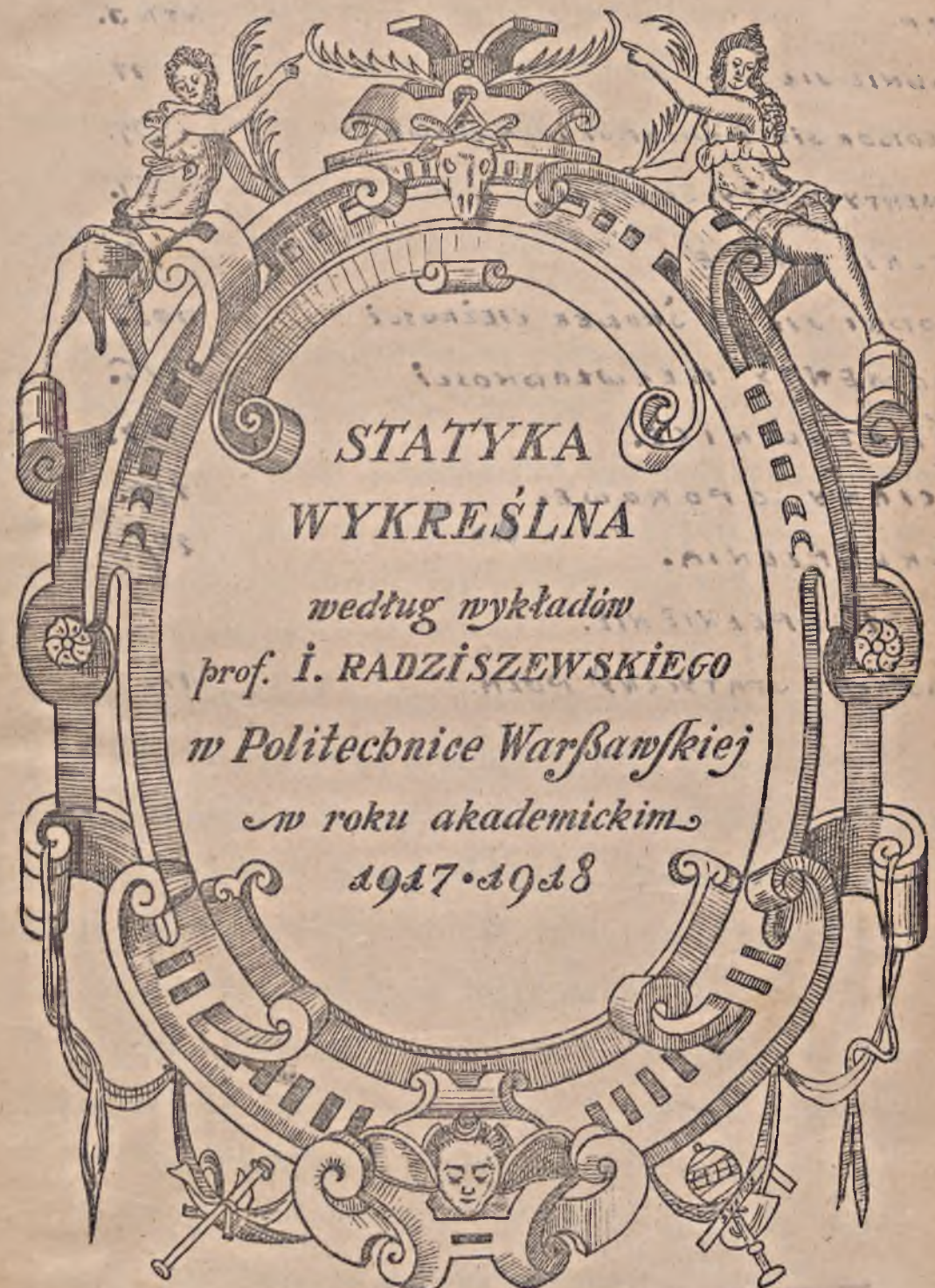
~~28~~

Czesław Domaniowski

ARCHITEKT.

Kom. Bibl. Pol.
Z. C. A. Pol. Warsz.
M inw. 28





531.25:624.041

Kom. Bibl. Pol.
Z. C. ...
Warsz.

SPIS RZECZY.

1. WISPEP	STR. 3.
2. SKŁADNIE SIŁ.	.. 77.
3. WIELOBOK SIŁ I WIELOBOK SZNUROWY	29.
4. MOMENTY STATYCZNE SIŁ.	51.
5. BELKI PROSE	82.
6. ŚRODKI SIŁ I ŚRODEK CIĘŻKOSCI	705.
7. MOMENTY BEZWŁADNOSCI	125.
8. KRATOWNICE.	732.
9. ŚCIANY OPOROWE.	799.
10. SKŁEPIENIA.	247.

DOPEŁNIENIE.

2. MOMENT STATYCZNY POLA.	723.
---------------------------	------



1. O BADANIU METODA WYKREŚLNA. Metoda wykreślna rozwiązywania zagadnień znajduje szerokie zastosowanie w wielu gałęziach wiedzy, zarówno stosowanej, jak i teoretycznej. Wspomniemy tu choćby tylko o znanych sposobach wykreślnych wykonywania działań algebraicznych, całkowania, rozwiązywania najbardziej zawiłych równań i in.

Badaniu metodą wykreślną podlegają również wszelkie zjawiska funkcjonalne, to jest takie, które są uwarunkowane zjawiskami innymi. Pod tym względem zastosowania metody tej są tak rozległe, że wystarczyły do stworzenia specjalnej nauki, zwanej nomografią, która się też niemi zajmuje.

Należy zwrócić uwagę, zwłaszcza początkujących, na to, że wyniki rachunku graficznego są dostatecznie dokładne, szczególnie, gdy chodzi o zastosowania praktyczne. Mając bowiem pewną wprawę we władaniu cyrklem i linijką, można uniknąć błędów, przekraczających 3 - 4%; ponadto zauważmy, że dane, otrzymane za pomocą rachunku wykreślnego, stosujemy zazwyczaj we wzorach, do których wchodzi zwykle szereg wielkości, w rodzaju współczynników wytrzymałościowych, ciężarów właściwych i t.p. nie- dość ścisłych; wobec niedokładności ich nikną omyłki rezultatów, otrzymanych metodą wykreślną; stąd przekonywamy się, że zarzut niedokładności metody wykreślnej jest

słaby.

Przypuśćmy, na przykład, że chodzi o wyznaczenie ciężaru pewnej bryły ziemi, której objętość możemy obliczyć drogą wykreślną, nie popełniając przytem błędu, większego od 3-4%. Aby znaleźć ciężar tej bryły, trzeba objętość znalezioną pomnożyć przez ciężar właściwy, który waha się w granicach od 1600 do 2000kg/m³. Widzimy stąd, że w danym razie niedokładność odpowiedzi spadnie raczej na karb nieścisłej wartości ciężaru właściwego, a nie będzie spowodowana błędem obliczeniem objętości.

Podobnie, obliczając pręt żelazny na rozciąganie, wprowadzamy we wzór stosowny liczbę, wyrażającą naprężenie bezpieczne, zawarte w szerokich granicach, bo od 900 do 1200 kg/cm².

Niedokładność tej liczby niweczy omyłkę, którą popełniemy przy wyznaczaniu wykreślnem siły, rozciągającej pręt.

Wskazemy jeszcze kilka innych zalet metody wykreślnej.

Jedną z nich jest przejrzystość wykonywanych działań, co pozwala ewentualne omyłki znaleźć łatwiej, niż w tym razie, gdy posilkujemy się mnóstwem operacji analitycznych.

Dalej zwrócimy uwagę na to, że rozwiązania wykreślne dają się zwykle prowadzić w dużym stopniu me-

chanicznie, na zasadzie pewnych reguł ogólnych, nie
nużą więc umysłu tak, jak rachunek analityczny.

Wspomnimy wreszcie o pozornej trudności, którą
sprawia początkującym metoda wykreslna. Gdy badamy roz-
wiązanie analityczne jakiegoś zagadnienia, widzimy wów-
czas stopniowy rozwój rozwiązania, widzimy, jak jedna
myśl wynika z innych, jakim ulegają przekształceniom
i t.d. Gdy zaś spojrzymy na rysunek, przy którego po-
mocy rozwiązujemy to samo zagadnienie, to praca przed-
stawi się nam nieraz jako coś ogromnego i chaotycznego,
rzecz pozornie trudną do zbadania.

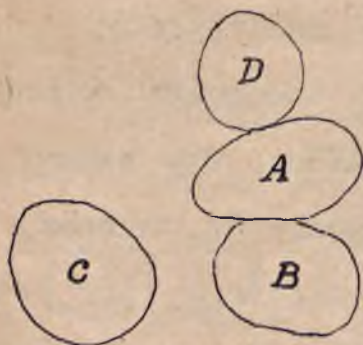
Unikniemy jednak tego wrażenia, gdy, wychodząc z
paru linii zasadniczych i opierając się na wskazówkach
wyłożonych w tekście, stopniowo rysunek ten tworzyć bę-
dziemy sami.

2. PRZEDMIOT STATYKI WYKRESLNEJ I POJĘCIE SIŁY.

STATYKA WYKRESLNA JEST NAUKA, KTÓRA BADA DROGĄ WYKRESL-
NĄ, STOSUNKI, ZACHODZĄCE POMIĘDZY SIŁAMI, BĘDĄCEMI W
RÓWNOWADZE.

POD NAZWĄ SIŁY ROZUMIEMY ODDZIAŁYWANIE, KTÓREMU
ULEGA JEDNO CIAŁO POD WPŁYWEM CIAŁA INNEGO.

Oddziaływania takie mogą zachodzić bądź dzięki
związкови mechanicznemu, panującemu pomiędzy ciałami,
bądź przez działanie z odległości, jak to mamy np.
przy ciałach magnetycznych. Tak więc np. ciała *B* i *D*,



RYS. 1.

przedstawione na rys.1, działają na *A* przez zetknięcie, *C* może działać jedynie z odległości.

Siłę wyznaczają następujące elementy:

1. Punkt ciała, na który siła działa, czyli jej PUNKT PRZY-

ŁOŻENIA.

2. Prosta, wzdłuż której siła działa, czyli jej LINJA DZIAŁANIA.

3. LOT SIŁY, to jest cecha, odróżniająca siłę, zwróconą ku pewnemu punktowi, położonemu na linii działania, od innej siły, zwróconej od tego punktu.

4. WARTOŚĆ siły w stosunku do pewnej siły, obranej za jednostkę. Za jednostkę taką przyjmuje się zwykle kilogram /kg/.



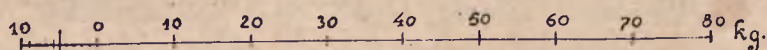
RYS. 2.

Opierając się na tych znamionach, możemy każdą siłę przedstawić w postaci odcinka, wziętego na linii działania, o pewnym locie o początku, przypadającym w punk-

cie przyłożenia i długości, wyrażającej w pewnej skali wartość siły.

Lot oznaczamy przytem zapomocą strzałki.

Długość odcinka, przedstawiającego siłę bierzemy zwykle ze SKALI SIŁ, którą wykreślamy w sposób następujący: rysujemy dowolną prostą i obieramy na niej ja-



RYS. 3.

kokolwiek punkt *O* /Rys.3/ za początkowy. Od tego punktu odmierzamy w prawo szereg równych odcinków, z których każdy reprezentuje jednakową liczbę jednostek siły np. 10 kg. Taki sam odcinek odmierzamy również w lewo od punktu *O* i dzielimy go na pewną liczbę równych części, najczęściej na 10 części. W ten sposób każda działka tego odcinka wyrazi, jak na rys.3, 1 kg.

Chcąc odmierzyć w wykreślonej skali siłę, równą np. 54 kg., stawiamy jedną nóżkę cyrkla w punkcie, oznaczonym przez 50, drugą zaś przesuwamy o 4 działki w lewo od punktu *O*. Odległość między końcami nówek cyrkla wyraża żądaną siłę.

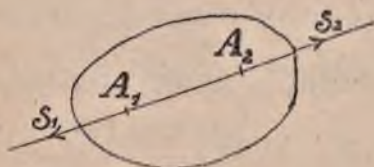
3. PEWNIKI STATYKI WYKREŚLNEJ. Zagadnienia statyki wykreślnej rozwiązywać będziemy na podstawie trzech PEWNIKÓW lub AKSJOMATÓW, to jest prawd opartych na doświadczeniu; pewniki te są dla każdego tak oczywiste, że nie wymagają dowodu.

Pierwszym pewnikiem jest ZASADA RÓWNOSCI DZIAŁANIA I PRZECIWDZIAŁANIA. Głosi ona, że SIŁY, Z KTOREMI DZIAŁAJĄ NA SIEBIE DWA CIAŁA, POSIADAJĄ WSPÓLNA LINJĘ DZIAŁANIA, SĄ RÓWNE, LECZ ODWROTNIE SKIEROWANE.

Nie znaczy to bynajmniej, że te siły znoszą się lub równoważą. Nie może być o tem mowy, bo każda z nich pochodzi od jednego ciała, a działa na drugie.

Zasada ta jest ważną niezależnie od tego, czy ciała działają na siebie bezpośrednio, czy też z odległości.

4. Drugi pewnik polega na następującem: wyobraźmy sobie dowolne ciało sztywne, to jest takie, które nie



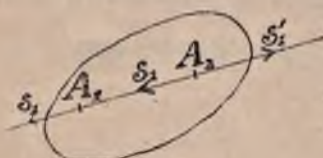
RYS. 4.

ulega odkształceniom pod działaniem sił. Obierzmy w tem ciele dwa dowolne punkty A_1 i A_2 /Rys. 4/; przypuśćmy, że do tych punktów przyłożone są siły S_1 i S_2 równe, ze wspólną linią działania, przechodzącą przez punkty

przyłożenia i z lotami odwrotnemi.

Doświadczenie wskazuje, że takie dwie siły są zawsze w równowadze. Przytem odległość $A_1 A_2$ nie gra tu żadnej roli tak, że można ją zmieniać dowolnie, a w szczególnym przypadku uważać, że jest ona równa zeru: siły S_1 i S_2 działają wówczas na jeden punkt danego ciała.

5. Przypuśćmy teraz, że na punkt A_1 danego ciała /Rys. 5/ działa siła S_1 . Obierzmy na jej linii działania dowolny punkt A_2 i przyłożmy do niego dwie siły równe S_1 , lecz



RYS. 5.

odwrotnie skierowane. Z powiedzianego wyżej wnosimy, że takie dwie

siły nie wpłyną na zachowanie się ciała. Z drugiej strony można uważać, że siła S_1 przyłożona w A_1 znosi się z siłą S'_1 , przyłożoną w A_2 ; wówczas możemy powiedzieć, że siła S_1 przył. w A_2 sprawia ten sam skutek, co siła S_1 przył. w A_1 .

Z tego wynika, że siłę S_1 można przesuwać dowolnie wzdłuż jej linii działania.

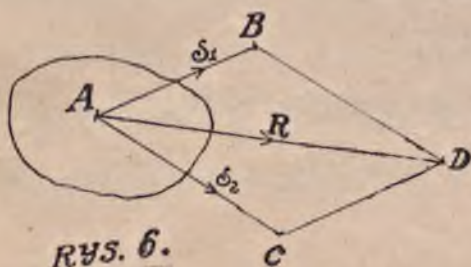
Zwróćmy tu uwagę na to, że siłę można przesuwać również do punktu, położonego na zewnątrz ciała. W tym jednak razie trzeba sobie wyobrazić, że punkt ten jest związany z ciałem za pomocą dodatkowej konstrukcji sztywnej.

Będziemy często mówili wprost, że uważamy, iż punkt taki należy do ciała. Wymieniony pewnik dotyczy także tego przypadku, gdy siły są skierowane nie od siebie, jak na Rys. 4 i 5, lecz ku sobie.

W pierwszym razie siły te mają dążność do rozciągania, w drugim do ściskania ciała; skutku jednak nie osiągną, gdyż ciało uważamy za sztywne, nieodkształcone.

6. Ostatni pewnik zwiemy ZASADĄ RÓWNOLEGŁOBOKU SIŁ.

Przypuśćmy, że do dowolnego punktu A ciała /Rys. 6/ są przyłożone dwie siły: S_1 i S_2 przedstawione od-



powiedniami odcinkami AB i AC . Zbudujemy równoległobok, którego bokami są właśnie te odcinki.

Doświadczenie nas uczy, że

dane dwie siły S_1 i S_2 mogą być zastąpione jedną siłą, która da się przedstawić pod względem wartości i kierunku przekątnią $AD = R$ tego równoległoboku; lot siły będzie od A do D .

Siły S_1 i S_2 zwać będziemy w tym przypadku SIŁAMI SKŁADOWEMI, R - ich WYPADKOWĄ.

Dowodzenia zasady równoległoboku na drodze rozumowej są zawile, tyle wprowadzają nowych pewników i pojęć, że lepiej jest przyjąć tę zasadę wprost na wiarę, tembardziej, że doświadczenia potwierdzają ją w sposób zupełnie ścisły. Ścisłe dowodzenie tej zasady da się uskutecznić na podstawie "dynamiki".

7. WZMIANKA HISTORYCZNA. Aczkolwiek zasady statyki wykreślnej, jak widzieliśmy, są niezmiernie proste, to jednak ludzkość dość długo musiała czekać, zanim zostały one ujęte w formę i zastosowane. Dopiero w w. XVII pojawiają się pierwsze prace z tej dziedziny. Stevin, inaczej Stevinusem zwany, formułuje około r. 1600 sposób składania dwóch sił, ograniczając się, zresztą, tym przypadkiem, kiedy działają one pod kątem prostym. Potem Newton uogólnia sposób Stevin a, rozszerzając go na siły, tworzące jakikolwiek ze sobą kąt /ok. r. 1687/.

Prawie jednocześnie rówieśnik Newtona, Varignon doszedł do zbudowania t. zw. wieloboku sznurowego, z którym zapoznamy się później.

Po tych odkryciach nauka nasza rozwijała się powoli, różni uczeni zajmowali się nią wprawdzie, ale w

sposób chaotyczny, każdy inaczej rzecz traktował.

Dopiero w w. XIX Culmann zebrał prace swych poprzedników, usystematyzował i powiązał je; można powiedzieć, że on właśnie stworzył statykę wykreślną, jako odrębną naukę. Stąd nazwa "ojca statyki wykreślnej", słusznie mu się należy.

Po ukazaniu się dzieła Culmanna rozwój statyki wykreślnej nabiera szybszego tempa. Wymienimy tu tylko nazwiska Mohr'a, Winklera, Maxwella, Cremony, Müllera-Breslau, którzy, poza wielu innymi, do rozwoju tej gałęzi wiedzy znacznie się przyczynili.

Zauważmy wreszcie, że rozwój statyki wykreślnej był jedną z przyczyn do stworzenia w drugiej połowie zeszłego stulecia, nowej nauki - rachunku kwaternionowego, lub wektorowego:

ROZDZIAŁ I.

SKŁADANIE i ROZKŁADANIE SIŁ DO JEDNEGO PUNKTU PRZYŁOŻONYCH.

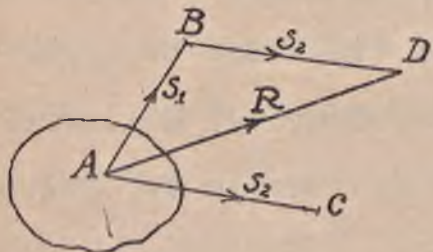
8. SKŁADANIE SIŁ. WARUNKI RÓWNOWAGI. Gdy na dowolny punkt ciała działają dwie siły, to umiemy już na zasadzie metody równoległoboku /Rys. 6/ wyznaczać ich wypadkową.

Wskazaną wyżej konstrukcję można uprościć, zważywszy, że do końca D siły wypadkowej R można także dojść, prowadząc z punktu B jako z początku, odcinek BD , równy i równoległy do siły S_2 ; koniec tego odcinka jest

punktem szukanym. Widzimy więc, że można się obejść bez prowadzenia linii CD , poprzestając na zbudowaniu TRÓJKĄTA SIŁ

W tym samym celu można by skorzystać również z trójkąta ACD .

Z powyższego wynika następujące prawidło: Aby znaleźć wypadkową dwóch sił S_1 i S_2 przyłożonych do ciała w punkcie A , należy wykreślić siłę S_1 , z końca jej wykreślić siłę S_2 , równą, równoległą i posiadającą zadany lot; punkt D - koniec siły S_2 będzie końcem wypadkowej R ; początkiem jej zaś będzie punkt



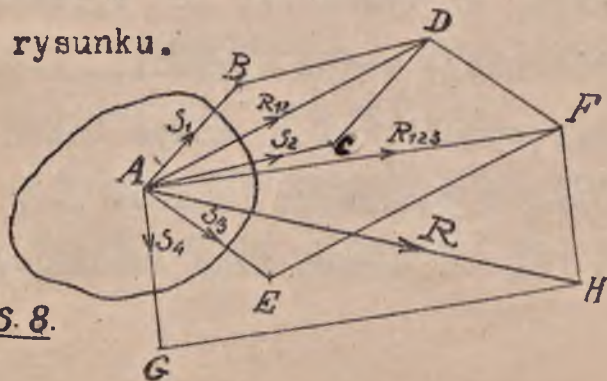
RYS. 7.

A .

Podkreślamy: W obiegu wzdłuż boków trójkąta ABD LOT WYPADKOWEJ ZNAJDUJEMY PRZECIWNY LOTOWI SIŁ S_1 i S_2

Podobnie, przenosząc równoległe siłę S_1 tak, aby początek jej przypadł w końcu siły S_2 , dojdziemy do tego samego wyniku, co poprzednio.

Przejdziemy teraz do przypadku, gdy na ciało działa więcej sił, niż dwie, przyczem posiadają one wspólny punkt przyłożenia A /Rys. 8/ i są położone w płaszczyźnie rysunku.

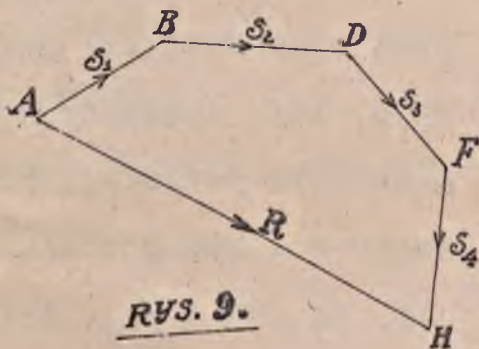


RYS. 8.

Przypuśćmy dla przykładu, że działają cztery takie siły; oznaczmy je przez S_1, S_2, S_3, S_4

Aby znaleźć ich wypadkową postępujemy w sposób taki: Na zasadzie równoległoboku sił wyznaczamy wypadkową R_{12} składowych S_1 i S_2 ; następnie, budując równoległobok, o bokach równych R_{12} i S_3 otrzymamy, jako przekątną AF , wypadkową R_{123} sił R_{12} i S_3 /albo też sił S_1, S_2, S_3 /. Postępując podobnie z R_{123} i S_4 otrzymamy wreszcie wypadkową $AH = R$ danego układu sił.

Zauważymy, że można dojść do tej samej wypadkowej, nie kreśląc wcale linii CD, AD, AF, EF i GH ; mianowicie odcinki BD, DF, FH są odpowiednio równe, równoległe do składowych sił S_2, S_3, S_4 . Jeżeli



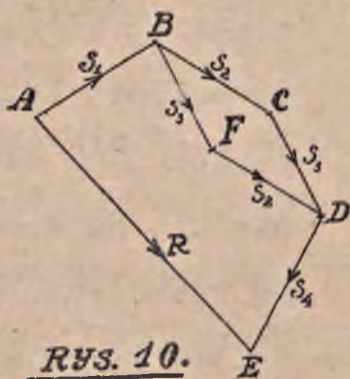
tym odcinkom nadamy lot, właściwy siłom, otrzymamy możliwość znalezienia punktu H bez uciekania się do budowy szeregu równoległoboków; będziemy mogli wypadkową tę wyznaczyć na rysunku

pomocniczym, a następnie przenieść ją równoległe tak, aby początek jej przypadł w punkcie A . Taki rysunek pomocniczy, przedstawiony na RYS.9, nazywamy WIELOBOKIEM SIŁ.

Z poprzedniego wyniku następujące prawidło: Aby wyznaczyć wypadkową sił S_1, S_2, S_3, \dots działających na ciało w punkcie A , obieramy w płaszczyźnie rysunku dowolny punkt A ; prowadzimy z niego odcinek równy, równoległy do siły S_1 ; nadajemy mu lot taki, jaki posiada ta siła

z końca tego odcinka prowadzimy odcinek, wyrażający co do kierunku, wartości i lotu siłę S_2 i t.d. Postępując tak samo ze wszystkimi pozostałymi siłami układu otrzymamy wielobok sił. Jeżeli połączymy początek pierwszego boku z końcem ostatniego, wykreślimy t. zw. bok zamykający, który da nam szukaną wypadkową co do kierunku i wartości - lot zaś siły wypadkowej trzeba przyjmować: od początku pierwszego do końca ostatniego boku.

10. Łatwo dowieść, że PORZĄDEK DODAWANIA SIŁ NIE WPŁYWA NA WYNIK.



RYS. 10.

Istotnie, przypuśćmy, że R jest wypadkową sił S_1, S_2, S_3, S_4

/Rys. 10/, dodawanych w wymienionym porządku. Dodajmy teraz w innym porządku np.

S_1, S_3, S_2, S_4 . Zmieni się wskutek tego tylko to,

że zamiast wieloboku $ABCDE$,

który mieliśmy poprzednio, otrzymamy wielobok $ABFDE$.

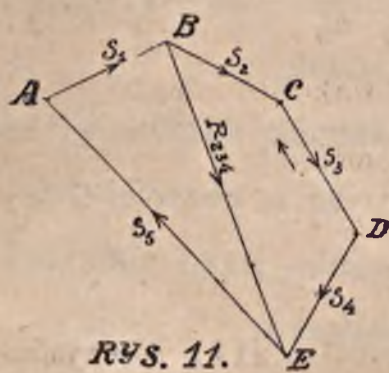
Oczywistem jest, że ta zmiana nie wpłynie wcale na wypadkową. Tworząc inne przestawienia sił, otrzymamy zawsze ten sam wynik, co świadczy o słuszności twierdzenia, o które chodzi.

11. Przy dodawaniu sił przy pomocy wieloboku może zdarzyć się tak, że koniec ostatniego boku wieloboku sił zbiegnie się z początkiem boku pierwszego: w tym razie

wypadkowa całego układu sił będzie równa zeru, wówczas układ sił będzie w równowadze. Możemy powiedzieć inaczej, że UKŁAD SIŁ PRZYŁOŻONYCH DO JEDNEGO PUNKTU i DZIAŁAJĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE BĘDZIE W RÓWNOWADZE, JEŚLI WIELOBOK SIŁ BĘDZIE SAM PRZEZ SIĘ ZAMKNIĘTY.

12. Na zasadzie poprzedniego można rozwiązać zagadnienie takie: jaką siłę trzeba dodać do danego układu sił S_1, S_2, S_3, S_4 /Rys. 8 i 9/, aby zachodziła równowaga? Jest rzeczą jasną, że ta siła szukana musi zrównoważyć wypadkową danych sił, a więc będzie nią siła, przyłożona w punkcie A , równa co do wartości i kierunku wypadkowej R , lecz posiadająca lot odwrotny, niż ta ostatnia.

13. Wskazemy jeszcze inną własność wieloboku zamkniętego.



RYS. 11.

Przypuśćmy więc, że siły S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 /Rys. 11/ przyłożone do jednego punktu, tworzą wielobok zamknięty, a więc równoważą się. Gdy zmienimy lot którejkolwiek z sił wieloboku, to

będziemy mogli uważać, że ta siła odwrócona jest wypadkową wszystkich sił pozostałych, jak to wynika bezpośrednio z rozważań poprzedzających. Tak więc np. odwróconą siłę S_3 można traktować, jako wypadkową sił $S_1,$

$S_2, S_4, S_5.$

14. Zwróćmy jeszcze uwagę, na to, że każdą przekątną zamkniętego wieloboku sił można uważać za wypadkową jednej z grup sił, dla których jest ona bokiem zamkniętym.

Tak więc np. przekątna BE /Rys. 10/ z lotem od B do E przedstawia wypadkową sił S_2, S_3, S_4 ; lub też można ją traktować, jako równoważącą siły.

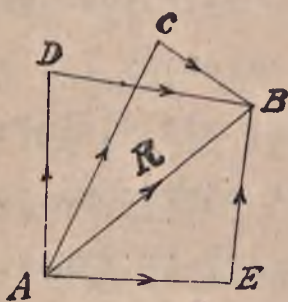
15. Dotychczas mówiliśmy o płaskim układzie sił, działających na pewien punkt ciała. Gdyby siły układu, do jednego punktu przyłożone, miały jakiegokolwiek kierunku w przestrzeni, rozumowania nasze nie uległyby istotnej zmianie. W tym razie równoległoboki sił składowych leżałyby w różnych płaszczyznach, nie w jednej, jak to widzimy na Rys. 8, zaś wielobok sił byłby wchrowaty.

16. ROZKŁADANIE SIŁ. Często spotyka się zagadnienie odwrotne do rozważanego dotychczas. Chodzi, mianowicie, o rozłożenie danej siły na składowe.

Jeśli nie mamy zadanych pewnych warunków, którym te składowe mają czynić zadość, to w rozwiązaniu tego

zagadnienia mieć będziemy wielką dowolność.

Przypuśćmy np., że należy rozłożyć siłę R /Rys. 12/ na dwie składowe. Oczywiście, składowe te mogą być wyrażone jakimikolwiek dwoma odcinkami, które wraz



RYS. 12.

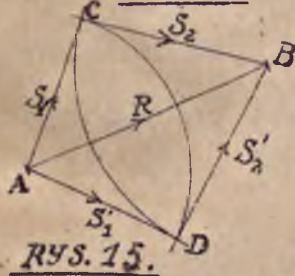
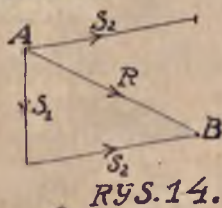
z $AB=R$ tworzą trójkąt i mają stosowne loty.

Widzimy, że odpowiedzi mamy bardzo wiele, gdyż trójkątów takich jak ABC, ABD, ABE i t.d. możemy wykreślić bez liku.

Podamy kilka /z bardzo wielu/ przykładów, w których będziemy mieli pewne ograniczenia w rozkładzie:

a/ Dajmy na to, że dana jest siła R , przyłożona w punkcie A /Rys.13/, i że trzeba rozłożyć ją na dwie składowe, których linje działania c i d są dane.

W tym celu, mając wykreśloną prostą c , z końca B siły R prowadzimy równoległą do linji d ; w przecięciu z prostą c otrzymamy punkt C . Odcinek AC z lotem od A do C i odcinek CB z lotem od C do B wyrażają szukane składowe S_1 i S_2 .

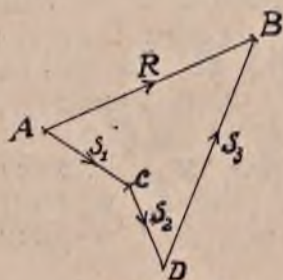


b/ Przypuśćmy teraz, że dana jest siła $R=AB$ i jedna ze składowych np. $S_1=AC$ /Rys.14/. Oczywiście druga składowa S_2 jest określona pod względem wartości i kierunku odcinkiem CB ; lot posiada od C do B .

c/ Załóżmy wreszcie, że dana jest siła $R=AB$ i dane są wartości obydwóch składowych, mianowicie S_1 i S_2 /Rys.15/. Aby znaleźć ich kierunki i loty, zatacza

my z punktów A i B łuki; promieniami, równemi odpowiednio S_1 i S_2 . Łuki te przecinają się w dwóch punktach C i D . Łącząc je z punktami A i B otrzymamy dwie odpowiedzi, czyniące zadość naszym warunkom. Jedną stanowią siły, przedstawione odcinkami AC i CB , drugą - AD i BD .

Gdy chodzi o rozkład jednej siły na większą liczbę składowych, to mamy jeszcze większą dowolność, niż



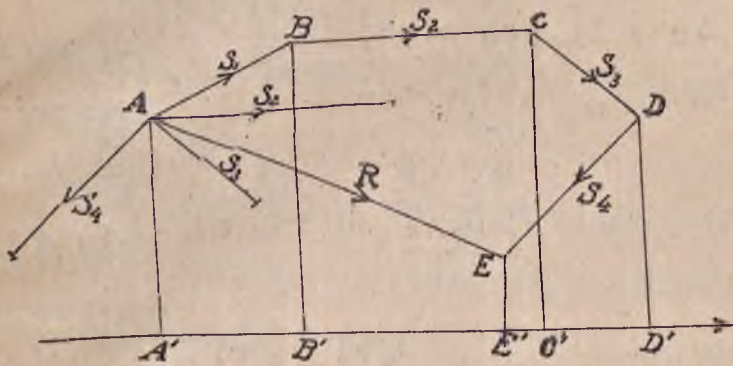
RYS. 16.

poprzednio, i trzeba mieć jeszcze więcej warunków, ograniczających tę dowolność, jeśli zadanie ma być określone. Tak więc np. gdy mamy rozłożyć siłę $R=AB$

trzy siły, przedstawione odcinkami, tworzącymi wielobok, w którym AB , jest bokiem zamykającym.

18. WARUNEK ANALITYCZNY RÓWNOWAGI SIŁ DO JEDNEGO PUNKTU PRZYŁOŻONYCH. Przypuśćmy, że do punktu A /Rys. 17/ są przyłożone 4 siły: S_1, S_2, S_3, S_4 . Znanym sposobem wieloboku się wyznaczmy ich wypadkową R . Obierzmy następnie w przestrzeni dowolną oś i pewien kierunek jej uważamy za dodatni /na rys. jest on oznaczony strzałką/.

Wykonajmy teraz rzut całego wieloboku na tę oś.

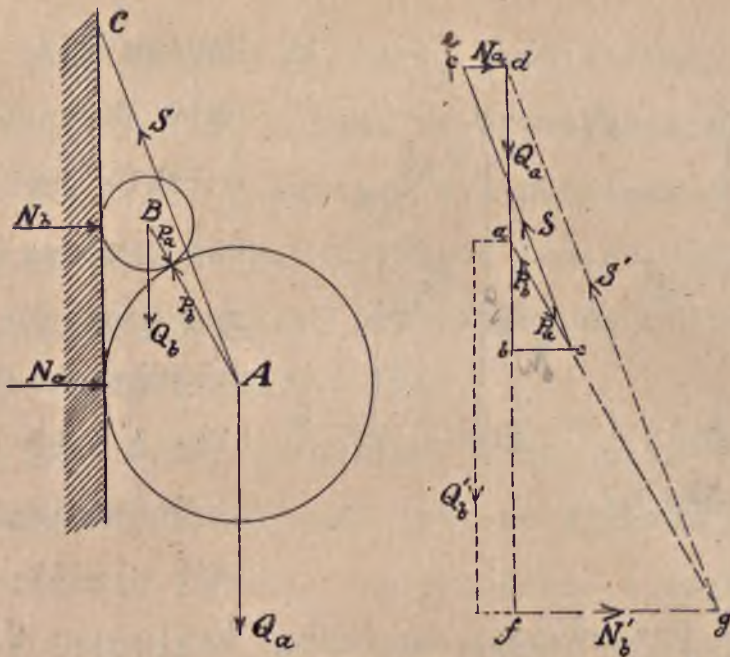


RYS. 17.

Rzutem siły S_1 będzie odcinek $A'B'$, a rzuty pozostałych sił wyniosą kolejno $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, przyczem pierwsze trzy z tych rzutów są dodatnie, czwarty jest ujemny. W re-

zultacie można powiedzieć, że rzutem wieloboku $ABCDE$ jest odcinek $A'E'$. Bezpośrednio z rys. widać, że rzut boku zamykającego $AE = R$, też jest równy $A'E'$; z tego wynika twierdzenie następujące: SUMA RZUTÓW POSZCZEGÓLNYCH BOKÓW WIELOBOKU SIŁ NA DOWOLNĄ OŚ JEST RÓWNA RZUTOWI BOKU ZAMYKAJĄCEGO. gdy wielobok sił jest zamknięty, wówczas bok zamykający jest równy zeru i rzut jego na każdą oś równa się zeru. Z tego widać, że GDY UKŁAD SIŁ, PRZYŁOŻONYCH DO JEDNEGO PUNKTU CIAŁA JEST W RÓWNOWADZE, TO SUMA RZUTÓW SIŁ TAKIEGO UKŁADU NA KAŻDĄ OŚ JEST RÓWNA ZERU.

19. PRZYKŁAD. Kula A , o ciężarze Q_a opiera się o gładką ścianę i jest przywiązana zapomocą linki do ściany w punkcie C . Na kulę tę kładziemy inną kulę B , o ciężarze Q_b . Obydwie kule są gładkie. Wyznaczyć naprężenie linki, oddziaływania ściany na każdą z kul, oddziaływania kul na siebie oraz znaleźć, jaki powinien



RYS. 18.

być ciężar
kuli B ,
aby oddziaływanie
ściany na
kulę A było równe
zeru /rys.
18 /.

Oznaczmy
szukane
oddziały-

wania ściany odpowiednio przez N_a i N_b , oddziaływanie
kuli B na kulę A przez P_a , wreszcie oddziaływanie
 A na B przez P_b .

Oczywiście dwie pierwsze z tych sił są normalne do
ściany, bo ściana jest gładka, dwie pozostałe mają kie-
runek linii środków, są równe i posiadają kąty przeciw-
ne.

Rozpatrzmy naprzód kulę B . Ponieważ ma ona być
w równowadze, więc siły Q_b , P_b i N_b , na nią działające
winny tworzyć wielobok zamknięty. Wielobok ten wykreśli-
my na rysunku pomocniczym, rysując naprzód odcinek ab
przedstawiający co do wartości, kierunku i lotu ciężar
 Q_b , prowadząc następnie z punktu a równoległą do
linii środków kul, a z punktu b równoległą do kierun-
ku oddziaływania N_b . W przecięciu otrzymamy punkt c

wówczas odcinki \underline{bc} i \underline{ca} przedstawiać będą co do wartości szukane siły N_b i P_b . Loty ich otrzymamy łatwo, zważywszy, że powinny one być we wspólnym obiegu z lotem siły Q_b .

Rozpatrujemy w dalszym ciągu siły, działające na kulę A . Są nimi: ciężar Q_a , oddziaływania N_a i P_a oraz naprężenie linki S . Siły te utworzą również wielobok zamknięty, gdyż i kula A jest w równowadze.

Aby wielobok ten otrzymać, rozpoczynamy od wykreślenia odcinka \underline{da} , wyobrażającego siłę Q_a ; z początku jej \underline{d} prowadzimy równoległą do kierunku oddziaływania N_a , z końca \underline{a} mamy wykreślony już odcinek \underline{ac} , przedstawiający oddziaływanie $\underline{P_a} = \underline{P_b}$; lot $\underline{P_a}$ będzie od \underline{a} do \underline{c} . Z końca $\underline{P_a}$ /z punktu \underline{c} / prowadzimy linię równoległą do kierunku siły S .

W przecięciu linii sił N_a i S znajdziemy punkt e i wówczas $\underline{ce} = S$ i $\underline{ed} = N_a$. Loty sił Q_a, P_a, S, N_a powinny być we wspólnym obiegu.

Aby odpowiedzieć na ostatnie z postawionych pytań, zauważmy, że N_a będzie zerem, gdy siły Q_a, S i P utworzą trójkąt, kiedy e wpadnie na d ; wówczas $Q'_b = af$, zaś $S_1 = gd$ i $P'_a = ag, N'_b = fg$. Przy Q'_b większem niż af , N_a będzie skierowane ku ścianie, a więc kulę A trzeba będzie dociskać do ściany.

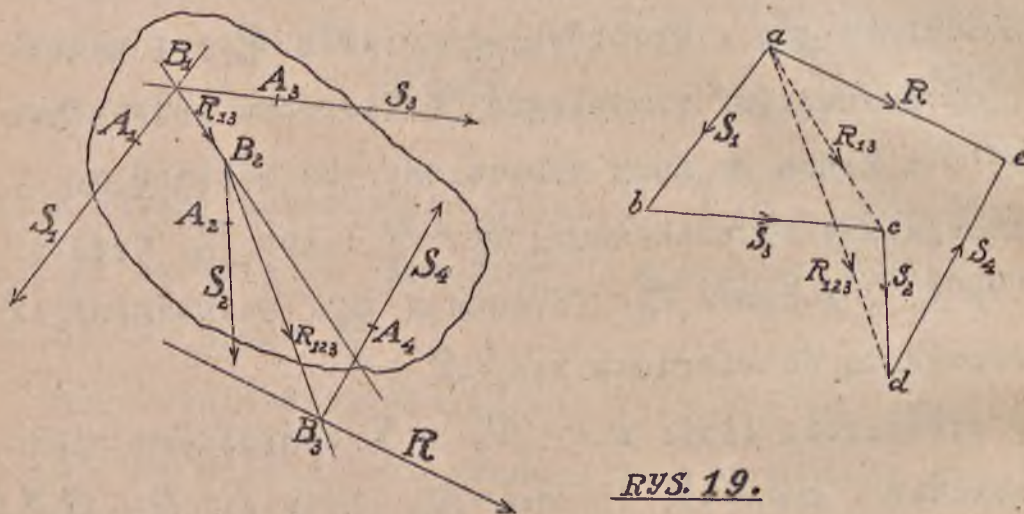
ROZDZIAŁ II.

SKŁADANIE i ROZKŁADANIE SIŁ PRZYŁOŻONYCH DO RÓŻNYCH PUNKTÓW i DZIAŁAJĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE.

WIELOBOKI VARIGNONA; ICH WŁASNOŚCI. WARUNKI RÓWNOWAGI.

20. Rozpatrzmy obecnie PRZYPADK OGÓLNY KIEDY SIŁY PRZYŁOŻONE SA DO RÓŻNYCH PUNKTÓW DANEGO CIAŁA.

Znajdźmy wypadkową tego układu. Założmy, że wszystkie siły danego układu są położone w jednej płaszczyźnie.



RYS. 19.

Przypuśćmy więc, że na dane ciało działają siły S_1, S_2, S_3, S_4 , przyłożone odpowiednio do punktów A_1, A_2, A_3, A_4 ; mamy znaleźć wypadkową tych sił.

Wyznamy naprzód wypadkową sił S_1 i S_3 . Możemy na zasadzie § 5 uważać, że te dwie siły są przesunięte do wspólnego punktu B_1 , w którym przecinają się ich linje działania; w takim razie wypadkową ich R_2 znajdziemy z łatwością, na zasadzie § 8. Na ry-

sunku pomocniczym kreślimy więc trójkąt sił abc, w którym odcinki ab i bc wyrażają pod względem wartości, kierunku i lotu siły S_1 i S_3 . Bok zamykający ac jest równy wypadkowej R_{13} ; linią jej działania jest prosta, równoległa do tego boku i przechodząca przez punkt B_1 .

W taki sam sposób wyznaczymy wypadkową sił R_{13} i S_2 , czyli R_{123} ; przejdzie ona przez punkt B_2 , przecięcia się dwóch owych składowych, a co do wartości, kierunku i lotu wyrazi ją odcinek ad na rysunku pomocniczym.

Wreszcie, wyznaczymy w ten sam sposób wypadkową sił R_{123} i S_4 , które się przecinają w punkcie B_3 ; jest to oczywiście, szukana wypadkowa R całego układu zadanego. Linia jej działania przechodzi przez punkt B_3 , a wartość, kierunek i lot wyznacza odcinek ae.

Przy powyższem postępowaniu mogą zajść trzy przypadki, mianowicie:

a/ Dany układ sił sprowadza się do wypadkowej R , całkowicie określonej i skończonej. Ten przypadek mamy na Rys. 19.

b/ Przedostatnia wypadkowa i ostatnia z sił składowych są równe, mają WSPÓLNĄ linię działania, lecz loty ich są różne. W tym razie wypadkowa danego układu sił jest równa zeru i oczywiście taki układ będzie w równowadze.

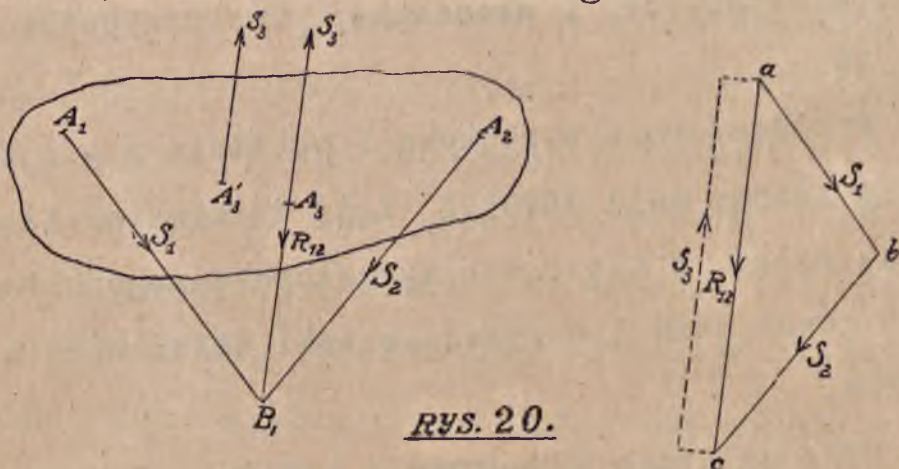
c/ Przedostatnia wypadkowa i ostatnia z sił składo-

wych są równe, linje działania ich są RÓWNOLEGŁE i loty różne. Mówimy, że w tym razie dany układ sił sprowadza się do PARY SIŁ.

21. Na zasadzie powyższego możemy odpowiedzieć na takie pytanie: o czym świadczy zamknięcie się wieloboku sił, działających na różne punkty ciała sztywnego?

Przedewszystkiem wnosimy stąd, że wypadkowa danego układu sił jest równa zeru, a więc układ ten albo sprowadza się do pary sił albo jest w równowadze. O tem, który z tych dwóch przypadków zachodzi, wielobok sił nic nam więcej nie powie. Możemy sprawę rozstrzygnąć jedynie na podstawie tego, czy linje działania przedostatniej wypadkowej i ostatniej siły składowej są równoległe, czy też pokrywają się. W pierwszym razie mamy parę sił, w drugim - równowagę układu sił.

22. NA CIAŁO DZIAŁAJĄ TRZY SIŁY. Przypuśćmy, że na dane ciało działają trzy siły S_1, S_2, S_3 , przyłożone w punktach A_1, A_2, A_3 . Jakim warunkom muszą podlegać te siły, aby była możliwa ich równowaga?



RYS. 20.

Postępując zgodnie z § 20 znajdziemy naprzód wypadkową sił S_1 i S_2 , czyli R_{12} . Otrzymamy ją na rys. pomocniczym, jako bok zamykający trójkąta abc , w którym $\overline{ab} = S_1$ i $\overline{bc} = S_2$. Aby równowaga sił S_1, S_2 i S_3 mogła zachodzić, to wypadkowa sił R_{12} i S_3 /p. § 21/ powinna być równa zeru i siły te winny mieć wspólną linię działania.

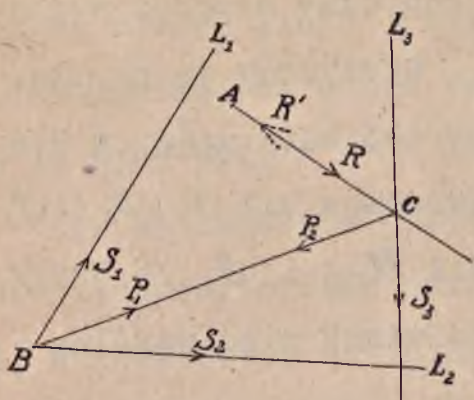
Pierwszy z tych warunków wymaga, aby WIELOBOK SIŁ S_1, S_2, S_3 BYŁ ZAMKNIĘTY, t.j. aby siła S_3 była równa co do wartości, a przeciwna co do lotu wypadkowej R_{12} , drugi - żąda, aby WSZYSTKIE TRZY SIŁY PRZECHODZIŁY PRZEZ JEDEN PUNKT, bo linja działania wypadkowej przechodzi przez punkt przecięcia się sił S_1 i S_2 zaś ta sama prosta ma być linią działania siły S_3 .

O ileby siła S_3 była równa i RÓWNOLEGLA do R_{12} i posiadała lot, przeciwny do tej ostatniej, to dany układ sprowadzałby się do pary. Miałoby to np. miejsce wtedy, gdyby siła S_3 była przyłożona do punktu A_3

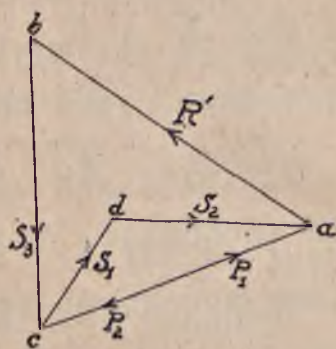
/Rys. 20/.

23. ROZKŁAD SIŁY NA TRZY SKŁADOWE, O DANYCH LINIACH DZIAŁANIA. Dana jest siła R ; ^{§ 21.} rozłożyć ją na trzy składowe S_1, S_2, S_3 , których linjami działania są proste L_1, L_2, L_3 .

Aby to uczynić, zmienimy naprzód lot siły R i tę siłę odwróconą oznaczymy przez R' . Oczywiście, siły R'



RYS. 21.



i R albo R' i owe trzy szukane składowe S_1, S_2, S_3 powinny być w równowadze. Przypuśćmy teraz, że siły S_1 i S_2 zastąpiliśmy przez ich wypadkową P_1 , zaś siły R' i S_3 - przez wypadkową P_2 ; ponieważ ma być równowaga wszystkich sił, więc siły P_1 i P_2 powinny być równe, mieć loty przeciwne i posiadać muszą wspólną linię działania. Jest rzeczą oczywistą, że tą linią może być tylko prosta BC /Rys. 21/. W celu znalezienia samych sił rozpatrzmy siły R' i S_3 , działające na punkt C . P_2 jest ich wypadkową, zatem z wieloboku abc , /p. rys. pomocniczy/, możemy otrzymać wartości nieznanych S_3 i P_2 . Będzie, mianowicie, $\overline{bc} = S_3$, $\overline{ac} = P_2$.

Na punkt B działają siły S_1 i S_2 . Wypadkową ich $P_1 = -P_2$ już wyznaczyliśmy, a więc wypada tylko postąpić odwrotnie, rozłożyć tę wypadkową na składowe w kierunkach L_1 i L_2 . Rozkład ten mamy w trójkącie acd ,

na rys. pomocniczym; znajdujemy, że $S_1 = \overline{cd}$, $S = \overline{da}$ i z poprzedniego $S_3 = \overline{bc}$.

Widzimy, że zadanie daje się rozwiązać jednoznacznie. Rozwiązań może być kilka, np.: można składać siłę $R' = S_1 + S_2 + S_3$, lub jeszcze inaczej. Wynik zawsze będzie ten sam.

24. SKŁADANIE SIŁ ZAPOMOCĄ WIELOBOKU SZNUROWEGO.

Sposób składania sił, podany w § 20, jest nieprzydatny w tym razie, gdy siły nie przecinają się w granicach rysunku. Ten wypadek jest szczególnie ważny, bo siły ciężkości, z którymi wciąż mieć będziemy do czynienia, do takich właśnie sił należą.

Niedogodność powyższa nie zachodzi przy innej metodzie składania sił, którą poznamy obecnie.

Przypuśćmy, że w punktach A_1, A_2, A_3, \dots są przyłożone odpowiednio siły S_1, S_2, S_3, \dots , trzeba wyznaczyć ich wypadkową R . Ograniczmy zagadnienie nap. do trzech sił, nie zmniejszając przez to ogólnego charakteru tej metody.

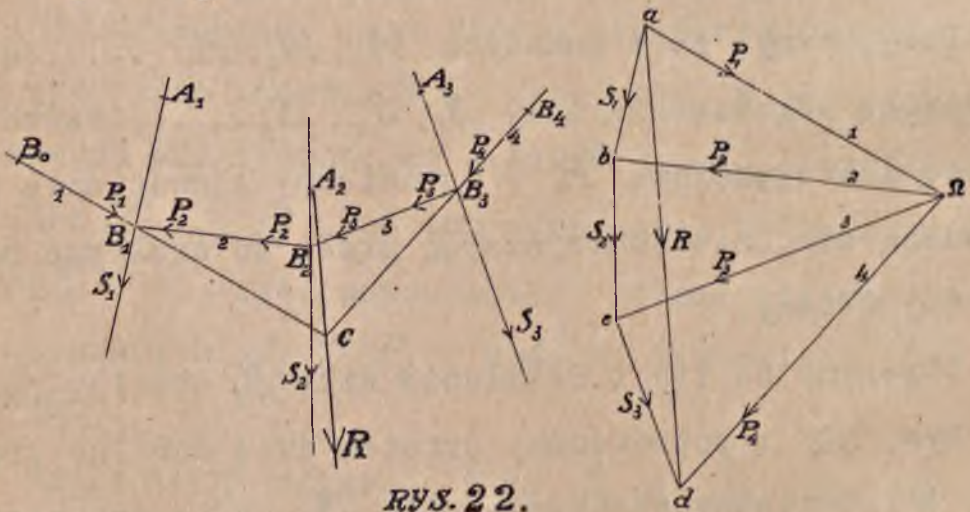
Obierzmy na linii działania siły S_1 dowolny punkt B_1 /Rys. 22/ i poprowadźmy przezeń dwie dowolne proste, 1 i 2. Rozłóżmy następnie siłę S_1 na te dwa kierunki. Rozkład ten wykonywamy na rys. pomocniczym zapomocą trójkąta $ab\Omega$, w którym $\overline{ab} = S_1$, zaś boki $a\Omega$ i $b\Omega$ są odpowiednio równoległe do prostych 1 i 2. Gdy ozna-

czyśmy szukane składowe przez P_1 i P_2 , to oczywiście będzie $\overline{a\Omega} = P_1$ i $\overline{\Omega b} = P_2$.

Możemy teraz zapomnieć o działaniu siły S_1 i postępować tak, jak gdybyśmy zamiast niej mieli owe dwie składowe.

Znajdźmy teraz wypadkową sił P_2 i S_2 przenosząc punkt przyłożenia siły P_2 do punktu B_2 , gdzie przecinają się prosta \mathcal{Q} z linią dział. siły S_2 . Uczynimy to również na fig. pomocniczej, budując trójkąt $bc\Omega$, przyczem $\overline{bc} = S_2$. Szukana wypadkowa P_3 ma wartość, kierunek i lot odcinka Ωc , a jej linia działania \mathcal{R} przechodzi przez punkt B_2 .

Możemy teraz nasz układ sił uważać jakby złożony z sił P_1 , P_3 i S_3 .



RYS. 22.

Dodajmy wreszcie, w zupełnie taki sam sposób, siły P_3 i S_3 ; wypadkową ich oznaczmy przez P_4 , a linię jej działania przez \mathcal{L} .

W ten sposób zastąpiliśmy dany układ sił S_1, S_2, S_3 przez dwie siły P_1 i P_4 i zadanie nasze sprowadza się do wyznaczenia ich wypadkowej. Wypadkowa ta przejdzie przez punkt przecięcia C prostych $1, 4$, zaś co do kierunku, wartości i lotu wyznacza ją odcinek ad na rys. pomocniczym, jako bok zamykający trójkąt $a\Omega d$. Z rysunku pomocniczego widać, że taką samą wypadkową dają siły S_1, S_2, S_3 , bo odcinek ad może być uważany albo za bok zamykający trójkąta $a\Omega d$, albo też za takiż bok wieloboku abcd.

W celu uproszczenia dalszego postępowania wprowadzimy następującą nomenklaturę: rysunek pomocniczy nazwiemy WIELOBOKIEM SIŁ, punkt Ω — biegunem, proste $a\Omega, b\Omega, c\Omega, d\Omega$ — PROMIENIAMI; wielobok, utworzony z prostych $1, 2, 3, 4$ /na rys. głównym/ nazwiemy WIELOBOKIEM VARRIGNONA lub WIELOBOKIEM SZNUROWYM, same proste $1, 2, 3, 4$ zwać będziemy BOKAMI tego wieloboku.

25. Postaramy się teraz zmechanizować podany tu sposób składania sił. Przypomnijmy więc sobie naprzód, że boki 1 i 2 wieloboku sznurowego poprowadziliśmy dowolnie, a kierunki tych boków wyznaczyły biegun Ω .

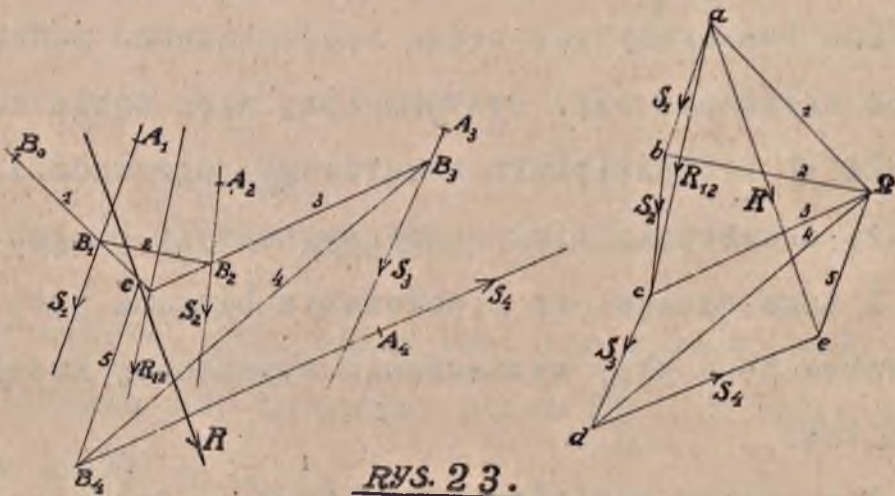
Z tego wynika, że i położenie bieguna jest dowolne. Wobec tego przy wyznaczaniu wypadkowej możemy postępować tak:

Wykreślamy wielobok sił abcd; bok jego ad

przedstawi namycę do kierunku, wartości i lotu szukaną wypadkową, następnie obieramy dowolny biegun - punkt Ω i łączymy go z wierzchołkami wieloboku sił a, b, c, d ; przez dowolny punkt B_0 obrany na siłę pierwszej, kreślimy równoległe do promienia $a\Omega$ prostą 1, z punktu przecięcia prostej 1 i siły S_1 prowadzimy prostą 2, równoległą do $b\Omega$ i t.d.; w ten sposób otrzymamy wielobok Varignona; wypadkowa przechodzić powinna przez punkt przecięcia się jego boków; pierwszego i ostatniego; przez ten punkt prowadzimy prostą równoległą do ad, będzie to linja działania wypadkowej.

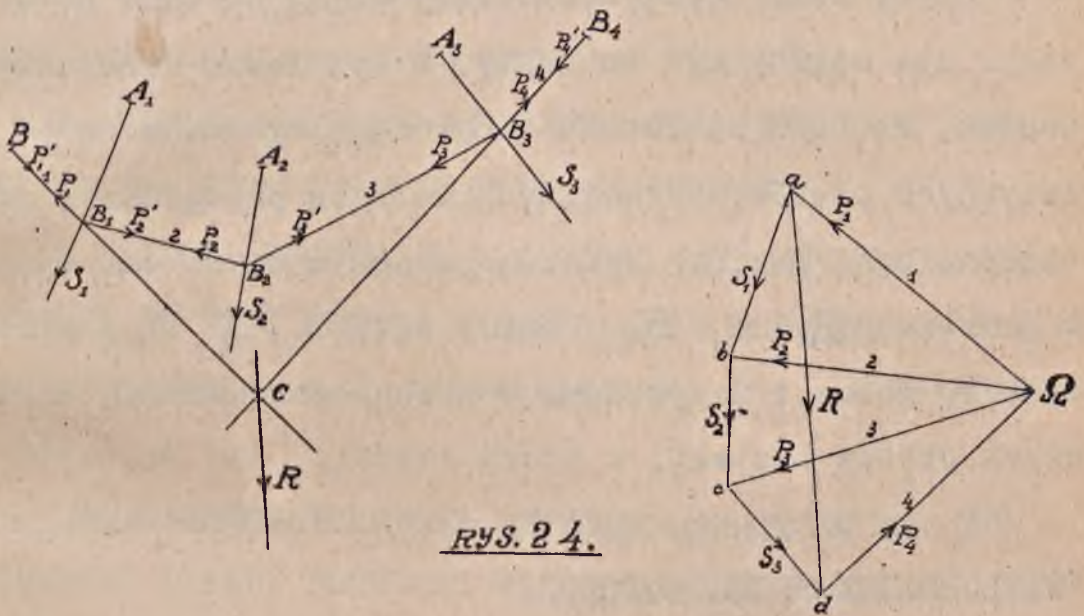
Tę samą wypadkową otrzymamy i wtedy, gdy za biegun obierzemy jakiś inny punkt.

Podczas całej tej budowy wykresu możemy nie pamiętać o promieniach wieloboku sił, albo bokach wieloboku Varignona, jako o linjach działania pewnych sił; możemy je traktować wyłącznie z punktu widzenia geometrycznego.



Na rys. 23 wyznaczona jest wypadkowa czterech sił takim właśnie zmechanizowanym sposobem.

26. Objaśnimy pochodzenie nazwy wieloboku sznurowego. Wyobraźmy sobie na pierwszym i ostatnim boku tego rysunku dwa punkty B_0 i B_4 i przypuśćmy, że w punktach tych jest zaczepiony giętki sznur, a w jego punktach B_1, B_2, B_3 działają siły S_1, S_2, S_3 /rys. 24/



Pod działaniem tych sił sznur będzie w równowadze, przybrawszy kształt według wieloboku Varignona. Z wieloboku sił obliczymy te siły, z którymi sznur będzie rozciągany: węzeł B_1 jest w równowadze pod działaniem sił P_1, P_2' i S_1 . Loty i wartości sił P_1 i P_2' znajdziemy z trójkąta sił $ab\Omega a$. Toż samo z węzłem B_2 : zachodzi równowaga sił P_2, P_3' i S_2 ; loty i wartości sił P_2 i P_3' znajdziemy z trójkąta sił $bc\Omega c$. Część sznura $B_1 B_2$ działa na węzeł B_1 z siłą P_2' /lot na pra-

wo/, zaś na węzeł B_2 z siłą P_2 /lot nalewo/; siły te są sobie równe, loty mają przeciwne, stąd wniosek, że część sznura na odcępie $B_1 B_2$, będąc w równowadze jest rozciągana siłą P_2 , względnie P_2' . To samo możemy powiedzieć o którymkolwiek kawałku sznura $B_0 B_1, B_2 B_3, B_3 B_4$. Z powyższego wynika ścisły związek między nazwą "WIELOBOK VARIGNONA" i nazwą "WIELOBOK SZNUROWY".

Gdyby siły S_1, S_2, S_3 działały dajmy na to w górę, sznur nie mógłby być tu użyty. W tym razie należałoby uważać, że bok wieloboku sznurowego wykonane są ze sztywnych prętów, połączonych ze sobą przegubami; dwa skrajne boki powinny być zamocowane w takiż sam sposób w punktach B_0 i B_4 . Wtedy siły S_1, S_2, S_3 , skierowane ku górze i przyłożone w przegubach nadadzą układowi prętów kształt, o który chodzi.

W tym przypadku możnaby nazwać wielobok Varignona "WIELOBOKIEM PRZEGUBOWYM".

27. Wykreślone wieloboki sznurowe pozwalają także wyznaczać wypadkowe niektórych sił z pośród danego układu. Tak więc np. wypadkowa sił S_1 i S_2 , czyli R_{12} /rys 23/ ma kierunek, wartość i lot, taki, jak odcinek ac , a linja jej działania przechodzi przez punkt przecięcia się boków 1 i 3 w wieloboku sznurowym. Tak samo, wypadkowa sił S_2 i S_3 jest równa $\overline{ba} = R_{23}$; punkt przecięcia się boku PRZED siłą S_2 /t.j. 2/ z bokiem ZA siłą S_3 /t.j. 4/, leży na linji działania tej wypadkowej.

Należy zwrócić uwagę, że z wykreślonego wieloboku można korzystać przy składaniu częściowym sił układu, tylko wtedy, gdy składowe następują bezpośrednio po sobie. Zapomocą wieloboku $B_0 B_1 \dots B_5$ nie możnaby np. znaleźć wypadkowej sił S_1 i S_4 albo S_2, S_4 .

28. NIEKTÓRE WŁASNOŚCI WIELOBOKU SIŁ I WIELOBOKU SZNUROWEGO. Z konstrukcji, którą stosujemy przy wyznaczaniu wypadkowej układu sił zapomocą wieloboku sznurowego, wynikają wprost następujące wnioski:

1. LICZBA PROSTYCH WIELOBOKU SIŁ JEST TAKA SAMA, JAK LICZBA PROSTYCH WIELOBOKU SZNUROWEGO.

2. KAŻDEJ PROSTEJ W WIELOBOKU SIŁ ODPOWIADA RÓWNOLEGŁA DO NIEJ PROSTA W WIELOBOKU SZNUROWYM; tak więc np. promieniowi $a\Omega$ odpowiada bok 1, promieniowi Ωc - bok 3 i t.d.

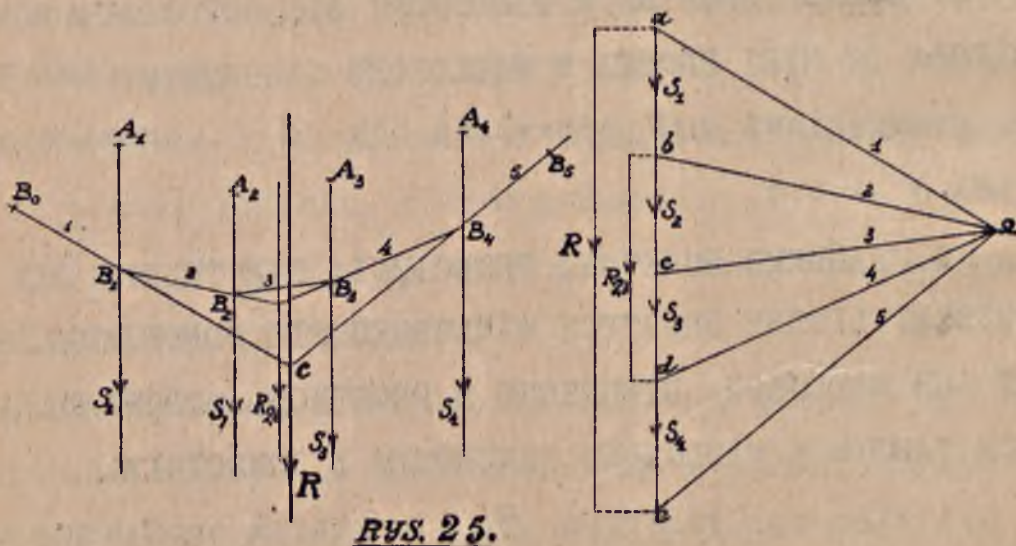
3. KAŻDEMU PUNKTOWI PRZECIĘCIA SIĘ TRZECH LUB WIĘKSZEJ LICZBY PROSTYCH WIELOBOKU SIŁ ODPOWIADA TRÓJKĄT LUB WIELOBOK, UTWORZONY Z PROSTYCH, ODPOWIADAJĄCYCH TAMTYM W WIELOBOKU SZNUROWYM I ODWROTNIE.

A więc np. punktowi B_1 , w którym spotykają się proste 1, 2 i S_1 odpowiada trójkąt $a\Omega b$, złożony z boków, równoległych do 1, 2 i S_1 , tak samo np. w wieloboku sił punktowi c przecięcia się prostych S_1, S_2 i prom. 3 odpowiada w wieloboku sznurowym trój-

kąt, którego bokami są linje działania sił S_2 , S_3 oraz bok 3; punktowi Ω wieloboku sił odpowiada wielobok sznurowy.

Z powodu tych zależności wielobok sił i wielobok sznurowy noszą nazwę FIGUR WZAJEMNYCH.

29. SKŁADANIE SIŁ RÓWNOLEGLYCH. Składanie sił równoległych zapomocą wieloboku sznurowego można uważać za przypadek szczególny poprzednich rozważań w § 24 i następnych. W tym razie wielobok sił staje się odcinkiem prostej, równoległej do sił danego układu, a wypadkowa, mając linję działania równoległą do sił zadanych, jest równa sumie algebraicznej tych sił składowych.



Na rys. 25 mamy wyznaczoną wypadkową R czterech sił równoległych, mianowicie S_1 , S_2 , S_3 , S_4 ; prócz tego jest tam znaleziona wypadkowa R_{23} sił S_2 i S_3 .

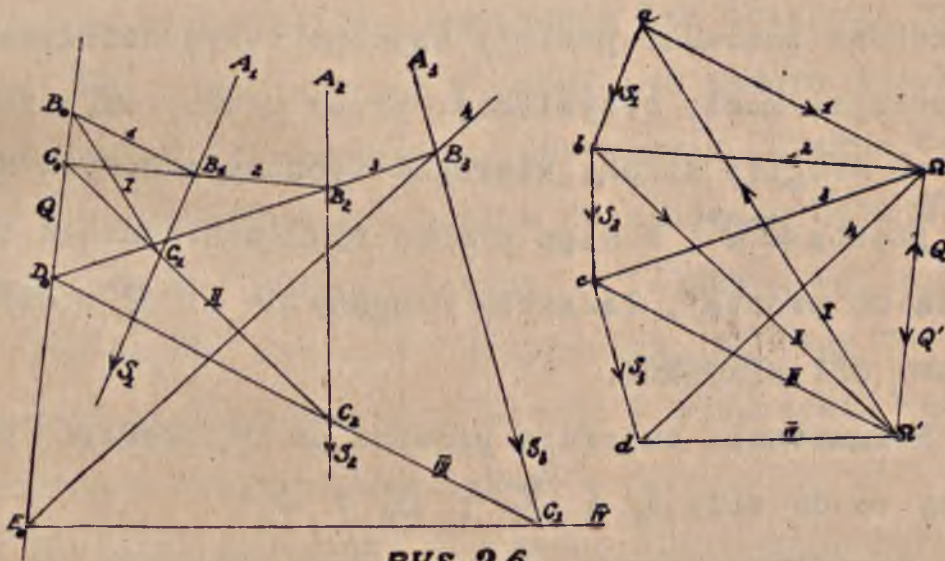
30. INNE WŁASNOŚCI WIELOBOKU SZNUROWEGO I WIELOBOKU SIŁ. ZMIANA BIEGUNA. Wyobraźmy sobie w jednej płą-

szczyźnie trzy siły S_1, S_2, S_3 , przyłożone do punktów A_1, A_2, A_3 dowolnego ciała sztywnego /rys. 26/.

Wykreślmy wieloboki: sił i sznurowy przy dowolnym biegunie Ω . Promienie pierwszej z tych figur i odpowiednie boki drugiej oznaczmy kolejno przez 1, 2, 3, 4.

Obierzmy następnie za biegun jakiś inny punkt, dajmy nato Ω' ; wykreślmy teraz nowy wielobok sznurowy. Nowe promienie i boki oznaczmy w tym samym po rządku, co poprzednio, liczbami rzymskimi I, II, III, IV.

Rozłożmy siłę S_1 na składowe w kierunkach boków 1 i 2. Rozkład ten mamy w trójkącie $ab\Omega$, gdzie są również wskazane loty szukanych składowych.



RYS. 26.

Przypuśćmy następnie, że w punkcie przecięcia boków I i II działa siła S_1' , równa i odwrotna do S_1 . Rozkładamy ją za pomocą trójkąta $ab\Omega'$ na składowe w kierunkach prostych I i II.

Ponieważ siły S_1 i S_2 są w równowadze, zatem równoważą się też układy sił $1, 2$ wraz z I, III , albo $1, I$ z $2, III$. Wypadkowa sił $1, I$ jest równa pod względem wartości, kierunku i lotu odcinkowi $\Omega'\Omega$, a linia jej działania przechodzi przez punkt B_0 , w którym przecinają się boki $1, I$ wieloboków sznurowych. Oznaczmy tę wypadkową przez Q /lot do góry/.

Podobnie znajdziemy wypadkową sił $2, III$; będzie ona równa i odwrotna do siły Q , przechodzić będzie przez punkt przecięcia się boków $2, III$, czyli przez C_0 . Oznaczmy tę wypadkową przez Q' . Ponieważ pomiędzy układami sił $1, I$ i $2, III$ zachodzi równowaga, zatem obie wypadkowe posiadać powinny wspólną linię działania, która przejść musi, oczywiście, przez punkty B_0 i C_0 .

Z drugiej strony kierunek tych wypadkowych wyznacza prosta $\Omega\Omega'$; a więc prosta B_0C_0 powinna być równoległą do prostej, łączącej bieguny Ω i Ω' , czyli do t. zw. OSI BIEGUNÓW.

Rozumowania zupełnie podobne do poprzednich powtarzamy co do siły S_2 i S_2' ; S_3 i S_3' .

Znajdziemy znowu, że wypadkowe grup sił $2, III$ i $3, III$ powinny być równe, odwrotne i równoległe do osi biegunów. Oczywiście, ich wspólną linią działania jest ta sama prosta C_0D_0 co i poprzednio, i t.d.

Naturalnie, że dowodzenie powyższe, przeprowadzone dla trzech sił, jest ważne również dla jakiegokolwiek

ich liczby /byleby siły leżały w jednej płaszczyźnie/.

Wynika stąd następujące twierdzenie: WIELOBOKI SZNUROWE, WYKREŚLONE DLA TEGO SAMEGO UKŁADU SIŁ PRZY DWÓCH RÓŻNYCH BIEGUNACH POSIADAJĄ TĘ WŁASNOŚĆ, ŻE ODPOWIEDNIE ICH BOKI PRZECINAJĄ SIĘ NA JEDNEJ PROSTEJ, RÓWNOLEGŁEJ DO OSI BIEGUNÓW.

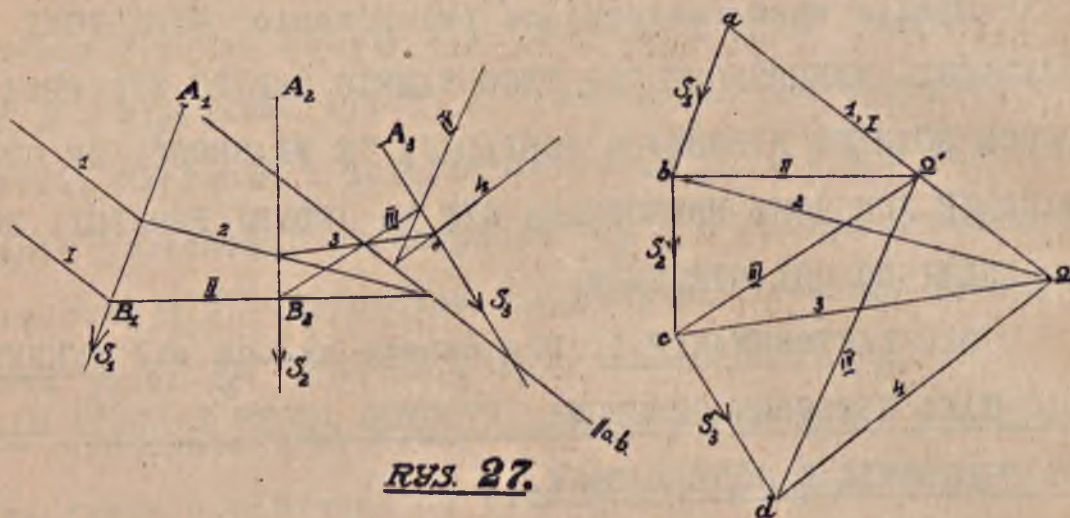
31. ZASTOSOWANIE I. Dla danego układu sił WYKREŚLIĆ TAKI WIELOBOK SZNUROWY, KTÓREGO JEDEN Z BOKÓW MIAŁBY POŁOŻENIE Z GÓRY ZADANE.

Niech będą dane 3 siły S_1, S_2, S_3 , przyłożone do punktów A_1, A_2, A_3 ; żądany, aby bok drugi był na prostej B_1B_2 .
Rep. 2p. Wykreślamy naprzód dowolny wielobok sznurowy 1, 2, 3, 4 przy biegunie Ω . Następnie tak obieramy nowy biegun Ω' , aby dany bok II mógł być jednym z boków nowego wieloboku sznurowego. Oczywiście, biegun ten musi leżeć na promieniu równoległym do zadanego boku II i przechodzącym przez koniec b siły S_1 . Innego ograniczenia dla bieguna Ω' nie mamy; przypuśćmy, że leży on na promieniu 1, a więc znajduje się on w przecięciu się tego promienia z nowym promieniem II .

Wielobok sznurowy, zbudowany dla tego nowego bieguna Ω' odpowiada postawionemu warunkowi.

Możnaby zadanie nasze rozwiązać w inny sposób: wiemy, że boki szukanego wieloboku sznurowego muszą być takie, że z odpowiednimi bokami poprzednio wykreślonego

wieloboku przecinają się na prostej, równoległej do osi



RYS. 27.

biegunów $a.b.$ Jeden punkt tej prostej znamy, jest nim bowiem przecięcie się boków \mathcal{Q} z \mathcal{II} , kierunek jej znamy również / jest \parallel do $\Omega\Omega'$ /, a zatem prosta ta jest całkowicie określona.

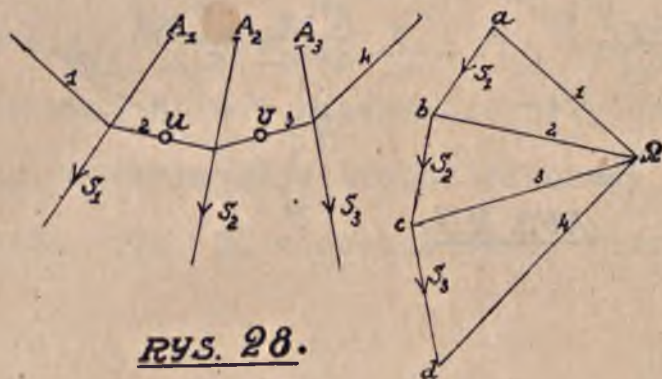
Wykreśliwszy ją, dopełniamy następnie szukany wielobok sznurowy, nie zwracając już zupełnie uwagi na wielobok sił. Tak więc np. bok I spotyka się z bokiem \mathcal{II} na sile S_2 , pozatem przechodzi on przez punkt przecięcia się boku $\mathcal{1}$ z prostą $\parallel a.b.$, czyli przez punkt nieskończenie odległy na tej prostej. Inaczej mówiąc, bok I jest równoległy do boku $\mathcal{1}$. Następnie wyznaczmy boki pozostałe.

32. ZASTOSOWANIE II.

POPROWADZIĆ WIELOBOK SZNUROWY PRZEZ DWA Z GÓRY ZADANE PUNKTY u . v .

Rozwiążmy to zadanie naprzód w tym przypadku, gdy

dane są tylko trzy siły S_1, S_2, S_3 /rys.28/, przyozem punkty U i V są oddzielone od siebie tylko jedną z nich np. S_2 .



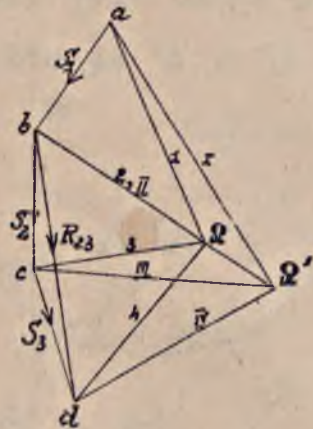
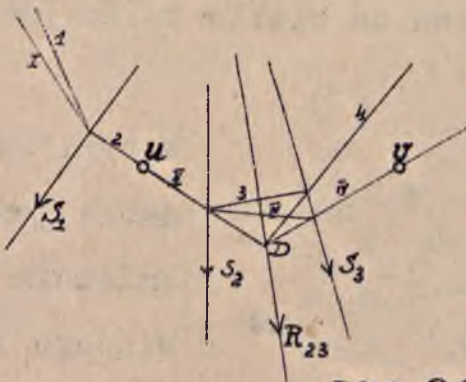
RYS. 28.

W tym razie zadanie jest niezmiernie proste. Wiadomo bowiem, że dwa boki wieloboku sznurowego można obrócić

dowolnie; niech więc będą niemi boki 2 i 3, z których pierwszy przechodzi przez punkt U , drugi przez V a ich punkt przecięcia leży na linii działania siły. Wykreślamy następnie wielobok sił i prowadzimy promienie 2 i 3, których kierunek został już obrany. Punkt przecięcia się tych promieni jest biegunem Ω ; łącząc go wreszcie z pozostałymi punktami a i d , otrzymujemy promienie, a mając je, uzupełniamy wielobok sznurowy w sposób znany. Rozwiązań możemy mieć bez liku.

33. W tym razie, gdy między punktami U i V mamy więcej, niż jedną siłę, np. dwie, jak na rys. 29, lub więcej, wówczas zastępujemy owe siły, rozgraniczając ich wypadkową; sprowadzamy więc nasze zadanie do przypadku szczególnego, rozważonego poprzednio.

Na rys. 29 mamy rozwiązany stosowny przykład dla, sił S_1, S_2, S_3 .



Rys. 29.

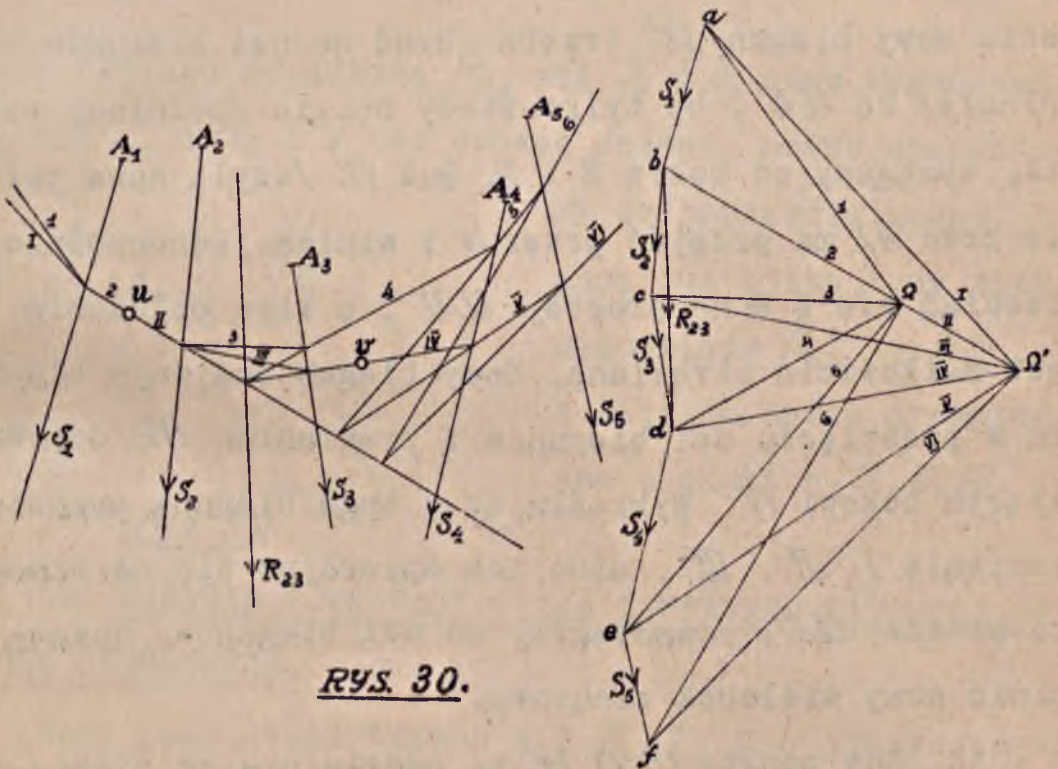
Kreślimy naprzód dowolny wielobok sznurowy 1, 2, 3, 4. Aby rzecz nieco uprościć, postępujemy tak, żeby bok 2 przechodził przez punkt U . Znajdujemy dalej wypadkową sił S_2 i S_3 , czyli R_{23} , co uskuteczniamy znanym już sposobem.

Oznaczmy punkt przecięcia się boków 2 i 4 przez D ; przez punkt D prowadzimy bok IV tak, aby przechodził również przez punkt V . Dwa te boki II i IV dają możliwość wyznaczenia nowego bieguna Ω' na promieniu II . Znalazłszy nowy biegun, uzupełniamy już z łatwością nowy wielobok sznurowy.

Możnaby tu znowu skorzystać z własności wieloboków sznurowych, opisanej w § 30.

34. Na rys. 30 jest rozwiązane zadanie bardziej jeszcze złożone. W tym przypadku mamy pięć sił S_1, S_2, S_3, S_4, S_5

zaś punkty U i V są od siebie oddzielone siłami S_2 i S_3 . Postępujemy podobnie, jak poprzednio: dodajemy siły S_2 z S_3 ; wypadkowa ich niech będzie R_{23} . W sąsiedztwie bezpośrednim z naszymi punktami mamy już tylko trzy siły, mianowicie S_1 , R_{23} i S_4 i możemy do nich zastosować wprost rozważanie przytoczone poprzednio w § 32, dopełniając wielobok sznurowy i poza siłą S_4, S_5 . Zresztą, rys. 30 w dostatecznej mierze rzecz tę wyjaśnia



RYS. 30.

35. ZASTOSOWANIE III. POPROWADZIC WIELOBOK SZNUROWY PRZEZ TRZY Z GÓRY ZADANE PUNKTY

Rozpatrzmy z początku znowu taki przypadek, gdy dane są tylko trzy siły S_1, S_2, S_3 , w ten sposób, że każde dwa dane punkty są odgraniczone od siebie jedną tylko si-

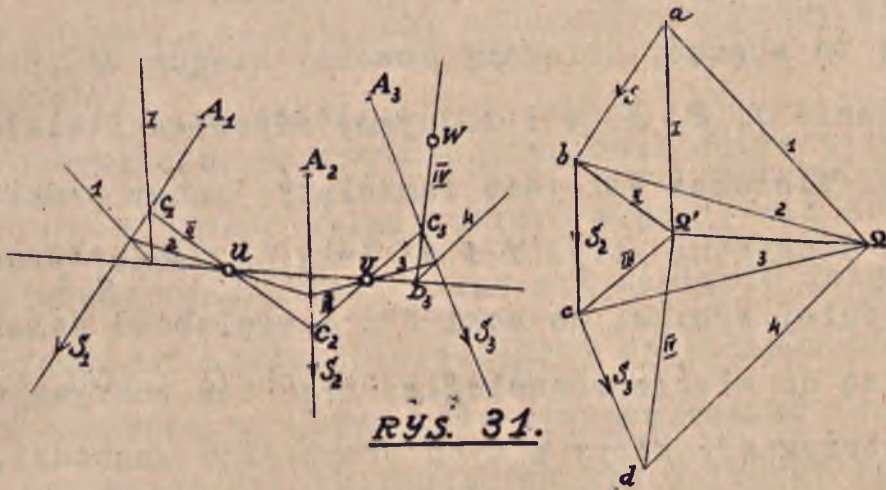
łą /rys. 31/.

Kreślimy naprzód dowolny wielobok sznurowy, którego boki 2 i 3 przechodzą przez punkty U i V . Biegunem będzie punkt Ω . Następnie wielobok ten przekształcimy tak, aby nowe położenia boków 2 i 3 przecinały się z poprzednimi w tych właśnie punktach U i V , zaś bok 4 przeszedł przez W .

Jest rzeczą jasną, że dla dokonania tego przekształcenia nowy biegun Ω' trzeba obracać na osi biegunów równoległej do UV , bo tylko wtedy będzie spełniony warunek, wymagany od boków 2 i 3. Bok IV /czyli nowe położenie boku 4/ ma przejść przez W i winien jednocześnie przeciąć się z 4 na prostej UV , a więc położenie jego jest całkowicie określone. Nowy biegun znajduje się zatem w przecięciu osi biegunów z promieniem IV , odpowiadającym bokowi IV . Wykreślając z tego bieguna pozostałe promienie I , II , III , albo też opierając się na własności prostej UV , równoległej do osi biegunów, możemy uzupełnić nowy wielobok sznurowy.

36. Gdy punkty U , V , W są oddzielone od siebie więcej, niż jedną siłą, to postępujemy podobnie, jak w odpowiednich zadaniach, w których chodziło o poprowadzenie wieloboku sznurowego przez dwa punkty rys. 29 i 30.

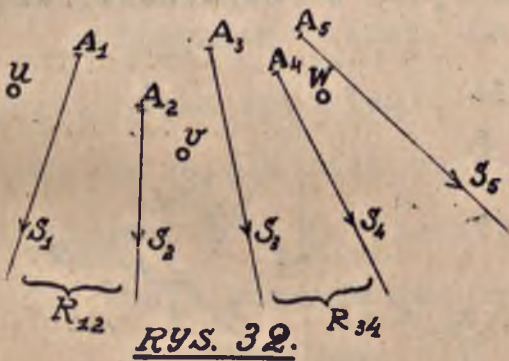
Przypuśćmy, dla przykładu, że punkty U , V , W są położone tak, jak to wskazuje rys. 32. W tym razie znaj-



RYS. 31.

dujemy naprzód wypadkową R_{12} sił S_1 i S_2 oraz wypadkową R_{34} sił S_3 i S_4 i w ten sposób zadanie nasze sprowadza-

my do poprzedzającego, bo mamy już tylko trzy siły, mianowicie R_{12} , R_{34} , S_5 z których każda przegradza dwa z punktów U, V, W .



RYS. 32.

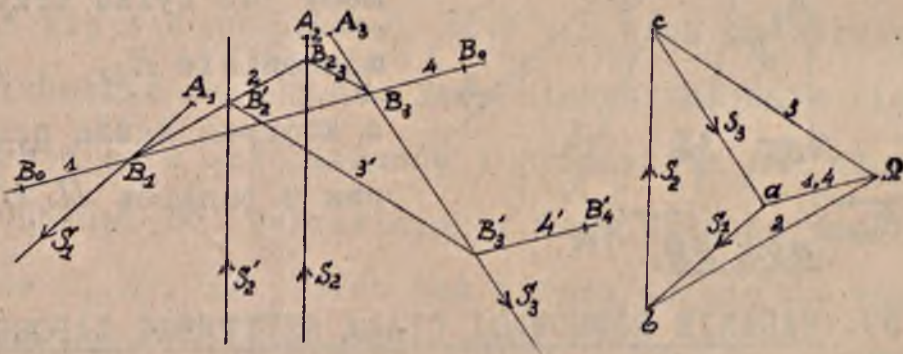
37. BADANIE RÓWNOWAGI CIAŁA SZTYWNEGO ZAPOMOCĄ WIELOBOKU SZNUROWEGO.

Dany jest układ trzech sił S_1, S_2, S_3 , przyłożonych w punktach A_1, A_2, A_3 /rys.33/.

Niech będzie wiadome zgóry, że siły te są w równowadze, że więc przecinają się w jednym punkcie, a wielobok sił, utworzony z nich, jest zamknięty. Chodzi o to, jak się zaznaczy równowaga tego układu na dowolnym wieloboku

sznurowym, wykreslonym dla danego układu sił.

Aby to zbadać, obieramy dowolny biegun Ω , prowadzimy promienie 1, 2, 3, 4 i budujemy odpowiedni wielobok sznurowy. Wielobok sił jest zamknięty; zatem promienie pierwszy i ostatni /t.j. 1 i 4/ leżą na jednej prostej; z tego, dalej wynika, że boki 1 i 4 wieloboku sznurowego albo są do siebie równoległe, albo też pokrywają się. Aby rozstrzygnąć, który z tych przypadków zachodzi, przypomnijmy sobie, że pierwszy i ostatni bok wieloboku sznurowego można uważać za linje działania dwóch sił, które zastępują układ sił danych /rys. 24/; ponieważ zaś z góry wiemy, że układ ten jest w równowadze, więc



RYS. 33.

owe siły zastępcze powinny być równe, mieć loty przeciwnie i wspólną linję działania. Pierwsze dwa warunki są spełnione w wieloboku sił, jak to widać bezpośrednio, trzeci warunek wymaga, aby BOKI 1, 4 /pierwszy i ostatni/ w wieloboku sznurowym LEŻAŁY NA JEDNEJ PROSTEJ; wów-

czas powiemy, że wielobok sznurowy sam przez się został zamknięty.

Oczywiście, wyprowadzony wniosek dotyczy również zagadnień, gdy dany układ zawiera więcej, niż trzy siły, bo i wtedy możemy taki układ sił zastąpić dwiema siłami, skierowanymi wzdłuż pierwszego i ostatniego boku wieloboku sznurowego. Zatem możemy wypowiedzieć twierdzenie, że: GDY UKŁAD SIŁ ZNAJDUJĄCYCH SIĘ W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE, DO RÓŻNYCH PUNKTÓW PRZYŁOŻONYCH JEST W RÓWNOWADZE, TO WIELOBOK SIŁ ORAZ WIELOBOK SZNUROWY ZAMYKAJĄ SIĘ SA-ME PRZEZ SIĘ.

Przypuśćmy teraz, że siła S_2 /rys. 33/ została przesunięta równolegle do swego położenia pierwotnego tak, że zajęła położenie S_2' , zachowując poprzednią wartość oraz lot. Co się stanie przez to z wielobokiem sił oraz z wielobokiem sznurowym?

Widoczne jest, że pierwszy z nich nie ulegnie żadnej zmianie; również boki 1 i 2 wieloboku sznurowego pozostaną na swych miejscach; jedynie punkt B_2 przesunie się do B_2' , a boki 3 i 4 przybiorą położenia 3' i 4' równoległe do poprzednich. Naturalnie boki 1 i 4' nie utworzą już teraz jednej prostej, lecz będą do siebie równoległe.

Z tego wynika, że siły, zastępujące dany układ i działające wzdłuż prostych 1 i 4', są równe, loty mają

przeciwnie i linje działania równoległe - tworzą więc PARE SIŁ. Łatwo wyrozumieć, że podobnych par sił możemy znaleźć tyle, ile możemy pomysleć wieloboków sznurowych dla danego układu sił.

Odwracając otrzymane twierdzenia, możemy powiedzieć, że

a/ GDY WIELOBOK SIŁ ORAZ WIELOBOK SZNUROWY SĄ ZAMKNIĘTE, TO DANY UKŁAD SIŁ JEST W RÓWNOWADZE.

b/ GDY ANI WIELOBOK SIŁ, ANI WIELOBOK SZNUROWY NIE SĄ ZAMKNIĘTE, TO DANY UKŁAD SIŁ SPROWADZA SIĘ DO JEDNEJ SIŁY WYPADKOWEJ, KTÓREJ LINJA DZIAŁANIA JEST RÓWNOLEGŁA DO BOKU ZAMYKAJĄCEGO WIELOBOK SIŁ i PRZECHODZI PRZEZ PUNKT PRZECIĘCIA SIĘ BOKÓW SKRAJNYCH WIELOBOKU SZNUROWEGO. CO DO WARTOŚCI i LOTU OKREŚLAJĄ ÓW BOK ZAMYKAJĄCY. Odpowiedź będzie jedna jedyna.

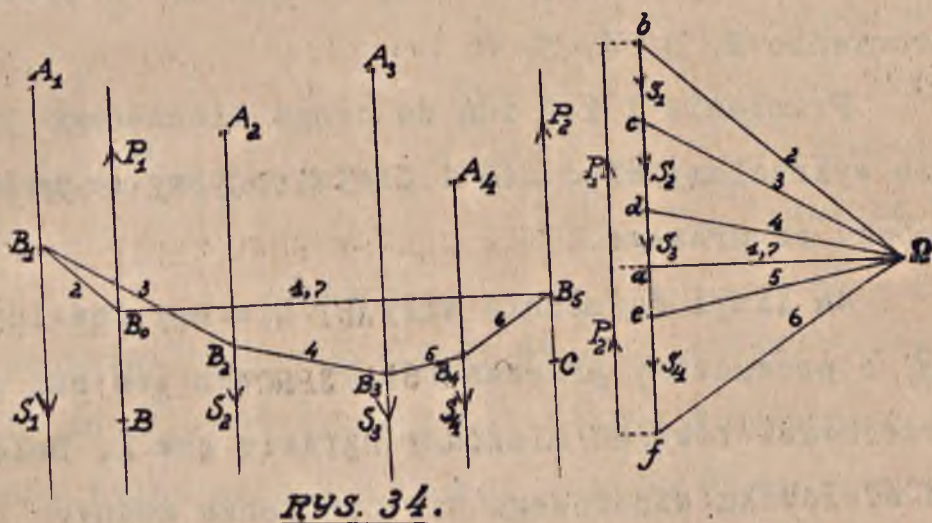
c/ GDY WIELOBOK SIŁ JEST ZAMKNIĘTY, A WIELOBOK SZNUROWY NIE, TO DANY UKŁAD SIŁ SPROWADZA SIĘ DO JEDNEJ PARY WYPADKOWEJ. Odpowiedź będziemy mieli bez liku.

38. PRZYKŁAD. Dane są siły S_1, S_2, S_3, S_4 równoległe i przyłożone w punktach A_1, A_2, A_3, A_4 . Pragniemy zrównoważyć je dwiema siłami P_1 i P_2 , z których pierwsza przechodzi przez punkt B i jest równoległa do sił danych, a druga przechodzi przez punkt C /rys. 34/.

Zauważymy naprzód, że siła P_2 również musi być równoległa do sił danych, gdyż wypadkowa sił S_1, S_2, S_3, S_4, P_1

powinna mieć z P_2 wspólną linię działania, jakoż wszystkie te siły się równoważą.

Przystępujemy do wykreślenia wieloboku sił. Siły P_1 i P_2 są pod względem wartości nieznane, a więc może-



my wykreślić jedynie odcinki, wyrażające siły S_1, S_2, S_3, S_4 . Aby konstrukcję naszą móc posunąć jaknajdalej, dogodnie jest ułożyć siły w szereg i siły P_1, P_2 ustawić na początku i końcu tego szeregu. Rozważajmy więc siły w takim porządku: $P_1, S_1, S_2, S_3, S_4, P_2$.

Zatem bok pierwszy wieloboku sił przedstawia siłę P_1 ; początek jej a jest nieznany, koniec przypada, dajmy na to w b i w tym samym punkcie rozpoczyna się bok, wyobrażający siłę S_1 ; koniec siły S_1 niech będzie punkt c ; stąd rozpoczynamy siłę S_2 i t. d., aż do siły S_4 . Dochodzimy wreszcie do punktu f , gdzie kończy się siła S_4 i zaczyna P_2 . Aby była równowaga, to wielobok sił musi się zamknąć, czyli koniec siły P_2 winien

przypaść w początku siły P_1 , t.j. w punkcie a . Ponieważ punkt ten jest nieznan, więc budowy wieloboku sił nie możemy narazie dokończyć.

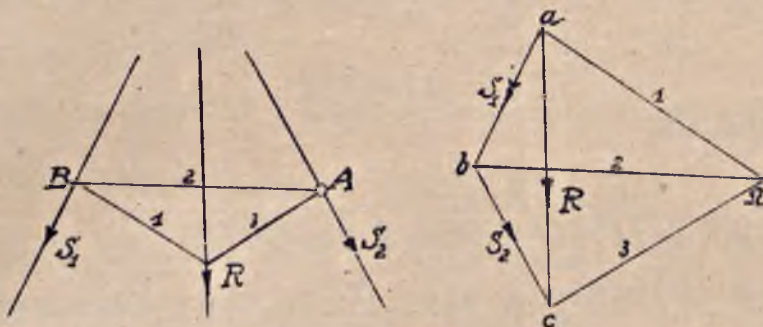
Obierzmy dalej, dowolny biegun Ω i prowadźmy promienie 2, 3, 4, 5, 6.

Promienie 1 i 7 idą do owego nieznanego punktu a , nie wykreślamy więc ich i przystępujemy do budowy wieloboku sznurowego.

Na linii działania siły P_2 obieramy dowolny punkt B_0 i prowadzimy przezeń bok 2; przez ten sam punkt przechodzi również nieznaną narazie bok 1. Dalsza budowa wieloboku sznurowego nie następuje żadnych trudności łatwo więc wykreślamy boki 3, 4, 5, 6, aż w końcu dochodzimy do punktu B_5 , przez który należy poprowadzić bok 7. Ma być równowaga układu sił, a więc pierwszy i ostatni bok wieloboku sznurowego muszą tworzyć jedną prostą, albo innymi słowy: boki 1 i 7 powinny się pokrywać. Ponieważ bok 1 przechodzi przez punkt B_0 , a bok 7 - przez B_5 , więc boki te powinny być skierowane wzdłuż prostej B_0B_5 . Mając tym sposobem znalezione boki skrajne, możemy uzupełnić wielobok sił, prowadząc przez Ω równoległą do B_0B_5 . Będzie to promień 1 /wzgl. 7/ i wyznaczy nam na prostej odcinków szukany punkt a . Tak więc $\overline{ab} = P_1$, $f\overline{a} = P_2$.

39. ROZKŁAD SIŁY NA SKŁADOWE. a/ Rozłóżyc siłę R na dwie składowe, z których jedna S_1 posiada daną

linję działania, a druga S_2 przechodzi przez dany punkt A /rys. 35/.

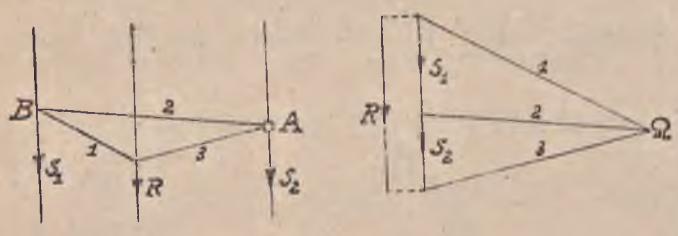


RYŚ 35.

Budujemy na-
przód wielo-
bok sił. Od-
cinek ac przed-
stawia siłę
 R ; przez

a przechodzi bok, równoległy do S_1 , przez c - bok, rów-
noległy do S_2 . Gdybyśmy znali koniec b siły S_1 , to wy-
padałoby tylko połączyć go z c ; odcinek bc wyznaczyłby
nam siłę S_2 . Jednak nie znamy punktu b - budowę wielo-
boku sił trzeba przerwać. Obieramy dowolny biegun Ω ;
prowadzimy promienie 1 i 3; promień 2 idzie do punktu
 b , jest więc nieznanym. Wykreślamy następnie wielobok
sznurowy, a właściwie jedynie jego boki 1 i 3, przytem
robimy to tak, aby bok 3 przeszedł przez A . Bok 1
przecina siłę S_1 w punkcie B ; oczywiście, prosta AB
musi być bokiem 2, gdyż bok ten powinien przejść zarów-
no przez punkt A jak i przez B .

Mając bok 2. wykreślamy z Ω promień 2 który wy-
znaczy nam nieznanym punkt b ; wówczas ab - bc przed-
stawiają nam siły S_1 i S_2 co do kierunku, wartości i lo-
tu.



RYS. 36.

Na rys. 36 widzimy sposób rozkładu siły R na dwie składowe do niej równoległe. Wypadek ten nie różni się

zasadniczo od przytoczonego poprzednio.

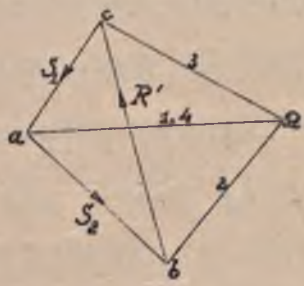
b/ W celu rozłożenia siły R na dwie składowe S_1, S_2 /dla jednej z nich jest dana linja działania, dla drugiej punkt/ można rozumować jeszcze nieco inaczej, można mianowicie uważać, że siły S_1, S_2 mają zrównoważyć odwróconą siłę R czyli R' /rys.37/.

Ustawiamy siły w szereg: S_1, R, S_2 /nieznane siły po brzegach/ i budujemy wielobok sił i wielobok sznurowy. W danym razie nieznane są położenia skrajnych promieni i boków, a więc 1 i 4. Wiemy jednak, że te boki pokrywają się wzajemnie, a ponieważ pierwszy z nich przechodzi przez punkt B , a drugi przez A , zatem AB jest ich wspólnym kierunkiem. Łatwo już teraz wykreślić

brakujące promienie 1, 4 i tym sposobem znaleźć szukane składowe



RYS. 37.



S_1, S_2 . Sposoby rozkładania sił, podane w niniejszym §, znajdują zastosowanie wówczas, kiedy linje działania sił nie przecinają się w obrębie rysunku.

ROZDZIAŁ III.

MOMENTY STATYCZNE SIŁ.

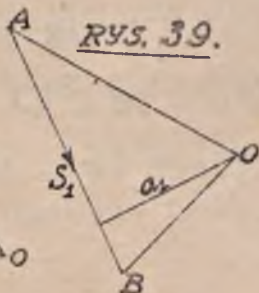
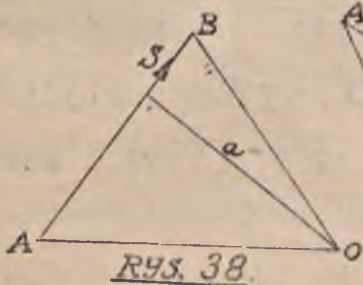
40. OKREŚLENIE MOMENTU STATYCZNEGO SIŁY. Przypuśćmy, że odcinek AB /Rys. 38/ przedstawia co do wartości, kierunku i lotu siłę S .

MOMENTEM STATYCZNYM TEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O NAZYWAĆ BĘDZIEMY ILOCZYN Z OWEJ SIŁY PRZEZ JEJ ODLEGŁOŚĆ OD O , CZYLI PRZEZ T. ZW. RAMIĘ. PRZYTEM ILOCZYNOWI TEMU PRZYPISUJEMY ZNAK $+$ LUB $-$, ZALEŻNIE OD TEGO, CZY SIŁA S DĄŻY DO OBROTU OKOŁO O W KIERUNKU RUCHU WSKAZÓWEK ZEGAROWYCH, CZY TEŻ W KIERUNKU PRZECIWNYM.

Z określenia tego wynika, że w przypadku, przedstawionym na rys. 38, moment jest dodatni; oznaczając zatem ramię przez a , będziemy mogli napisać

$$M_o S = S \cdot a;$$

lewa strona tej równości jest symbolem wyrażenia: "moment $/M/$ względem punktu O siły S ".

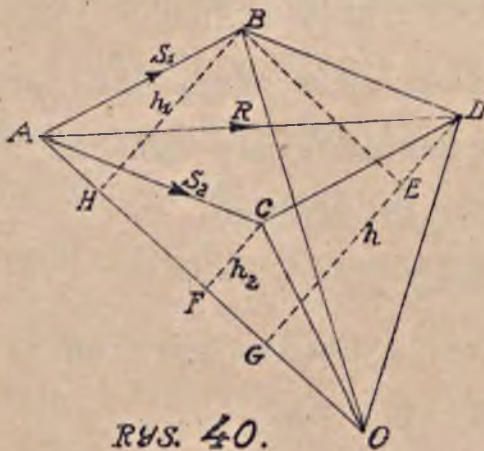


Natomiast moment siły S_1 względem punktu O /Rys. 39/ jest ujemny, a więc $M_o S_1 = -S_1 \cdot a_1$.

41. Łącząc punkty A i B z O /Rys.38/, otrzymamy trójkąt AOB , którego podwójne pole wynosi $S \cdot a$, a więc jest równe momentowi siły S względem punktu O .

Tak więc widzimy, że MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU JEST RÓWNY PODWÓJNEMU POLU TRÓJKĄTA, ZBUDOWANEGO NA TEJ SIŁE, JAK NA PODSTAWIE, i POSIADAJĄCEGO WIERZCHOŁEK W OWYM PUNKCIE. Polu temu przypisujemy znak $+$ lub $-$ stosownie do powiedzianego w poprzednim §.

42. MOMENT SIŁY WYPADKOWEJ. Niech będą dwie siły S_1, S_2 /Rys.40/, których linje działania przecinają się w punkcie A , oraz dowolny punkt O , położony w płaszczyźnie wyznaczonej przez te siły. Po przesunięciu



RYS. 40.

sił do punktu A znajdziemy za pomocą równoległoboku wypadkową R tych sił i w myśl ostatniego twierdzenia /§ 41/ wyznaczmy momenty statyczne danych sił składowych oraz moment tej wypadkowej, względem obranego punktu.

Wysokości trójkątów ABO, ACO, ADO względem wspólnej podstawy AO niech będą h_1, h_2, h ; wówczas otrzymamy:

$$M_o S_1 = 2 \cdot \Delta AOB = \overline{AO} \cdot h_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$M_o S_2 = 2 \cdot \Delta AOC = \overline{AO} \cdot h_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$M_o R = 2 \cdot \Delta AOD = \overline{AO} \cdot h \dots \dots \dots (3)$$

Poprowadźmy z punktu B prostopadłą do wysokości h i spodek jej oznaczmy przez E ; otrzymany trójkąt BED , równy trójkątowi ACF /odpowiednie boki są równoległe, a prócz tego $BD=AC$, a więc $DE=CF=h_2$; prócz tego $EG=h_1$; ponieważ $DG=h=DE+EG$, zatem

$$h = h_1 + h_2 \dots \dots \dots (4)$$

Dodajmy stronami równości (1) i (2) i weźmy pod uwagę zależność (4). wówczas

$$M_o S_1 + M_o S_2 = \overline{AO} \cdot h_1 + \overline{AO} \cdot h_2 = AO(h_1 + h_2) = \overline{AO} \cdot h.$$

Ponieważ z (3) iloczyn $\overline{AO} \cdot h$ jest równy momentowi siły wypadkowej R względem punktu O , więc

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2 ;$$

stąd mamy twierdzenie: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ R DWÓCH SIŁ S_1, S_2 WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O , OBRANEGO W PŁASZCZYŹNIE TYCH SIŁ, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW ICH WZGLĘDEM TEGOŻ PUNKTU.

43. Uogólnijmy powyższe twierdzenie dla ilukolwiek sił składowych.

Nie zmniejszając ogólności dowodu, przypuśćmy, że mamy dane tylko trzy siły S_1, S_2, S_3 /Rys. 41/, znajdujące się w jednej płaszczyźnie; wyznaczmy momenty statyczne względem punktu O , obranego w tejże płaszczyźnie.

szczyźnie.

Znajdujemy naprzód wypadkową R_{12} sił S_1, S_2 ; stosujemy do nich twierdzenie § 42 według którego:



RYS. 41.

$$M_o R_{12} = M_o S_1 + M_o S_2 \dots \dots (1)$$

Postępując tak samo z siłami R_{12} i S_3 , jako składowymi oraz z R jako ich wypadkową, otrzymamy

$$M_o R = M_o R_{12} + M_o S_3.$$

Jeżeli zamiast $M_o R_{12}$ podstawimy jego wartość z (1), wypadnie równość:

ność:

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2 + M_o S_3,$$

wyrażająca twierdzenie, o które nam chodzi.

Gdybyśmy mieli ~~dane~~ więcej, niż 3 siły składowe, to, oznaczając ich liczbę przez n i rozumując, jak poprzednio, otrzymalibyśmy:

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2 + \dots + M_o S_n$$

lub krócej

$$M_o R = \sum_{i=1}^{i=n} M_o S_i$$

Tak więc: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ ILUKOLWIEK SIŁ S_1, S_2, \dots, S_n , BĘDĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O , OBRANEGO W TEJŻE PŁASZCZYŹNIE, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW OWYCH SIŁ WZGLĘDEM TEGO PUNKTU.

44. ZASTOSOWANIE WIELOBOKU SZNUROWEGO DO WYZNACZANIA

MOMENTU STATYCZNEGO. Przypuśćmy, że mamy znaleźć moment statyczny siły S względem punktu O , odległego od niej o a . /Rys. 42/.

Wykreślmy dla tej siły wielobok sił oraz wielobok sznurowy. Promienie oraz odpowiednie boki oznaczmy przez $1, 2$. Przez punkt O poprowadźmy prostą, równoległą do siły, którą nazwiemy PROSTĄ ODCINKÓW. Boki wieloboku sznurowego odetną na tej prostej odcinek $m_1 m_2$. W ten sposób utworzy się trójkąt $m_1 B m_2$, podobny do trójkąta $a \Omega b$ w wieloboku sił. Z podobieństwa tego wynika:

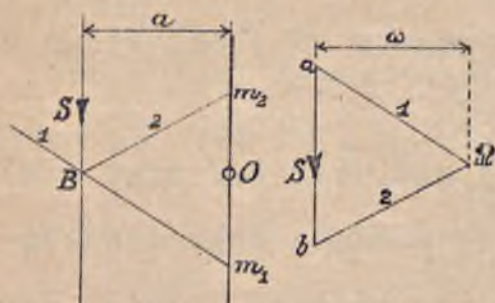
$$\frac{ab}{m_1 m_2} = \frac{\omega}{a}$$

gdzie ω oznacza w wieloboku sił odległość bieguna Ω od siły S , czyli t. zw. ODLEGŁOŚĆ BIEGUNOWĄ. Ponieważ $ab = S$, zatem

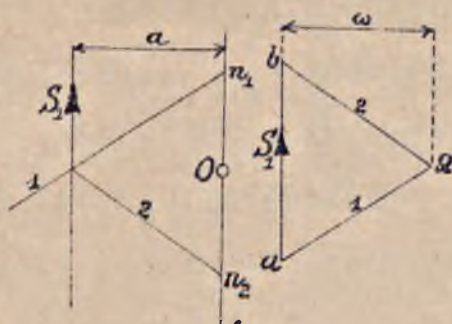
$$S \cdot a = \overline{m_1 m_2} \cdot \omega$$

Lecz Sa jest to moment siły S względem punktu O ; zatem z równości tej wynika, że moment statyczny wyznaczyć możemy, gdy pomnożymy odcinek $m_1 m_2$ otrzymany na "prostej odcinków" przez odległość biegunową.

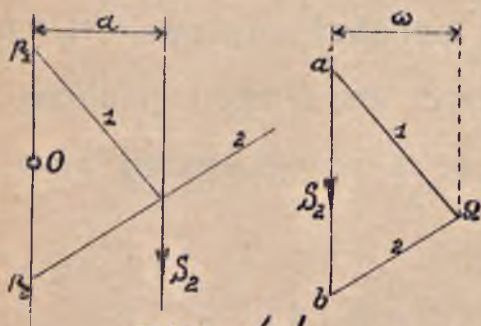
Stąd mamy następujące prawidło: ABY WYZNACZYĆ MOMENT SIŁY S WZGLĘDEM DANEGO PUNKTU O NALEŻY WYKREŚLIĆ DLA TEJ SIŁY JAKIKOLWIEK WIELOBOK SIŁ ORAZ ODPOWIEDNI WIELOBOK SZNUROWY, POPROWADZIĆ PRZEZ O PROSTĄ ODCINKÓW I ZNALEZĆ NA NIEJ ODCINEK, ZAWARTY MIĘDZY BOKAMI WIELOBOKU SZNUROWEGO; IŁOZYNY Z TEGO ODCINKA PRZEZ OD-



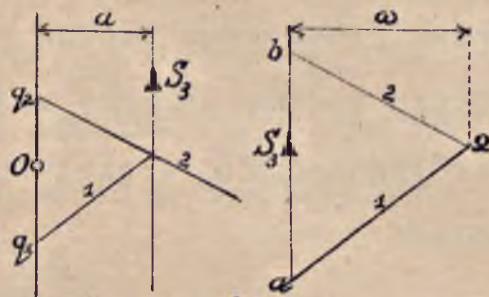
RYS. 42.



RYS. 43.



RYS. 44.



RYS. 45.

LEGŁOŚĆ BIEGUNOWĄ JEST RÓWNY SZUKANEMU MOMENTOWI STATYCZNEMU.

45. Trzeba jeszcze wskazać cechę, która pozwoli wprost z naszego wykresu określić znak, obliczonego tym sposobem momentu.

Rozpatrując rozmaite możliwe położenia siły S względem punktu O /rys. 42 do 45/ przekonamy się, że, GDY MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM OWEGO PUNKTU JEST DODATNI, TO PUNKT PRZECIĘCIA SIĘ BOKU 1 WIELOBOKU SZNUROWEGO Z PROSTĄ ODCINKÓW LEŻY PONAD PUNKTEM PRZECIĘCIA SIĘ BOKU 2 Z TĄŻ PROSTĄ, ORAZ, ŻE W PRZYPADKU ODWROTNYM JEST WRĘCZ PRZECIWIWNIE. Bok 1 nazywać będziemy też "bokiem przed siłą", zaś bok 2 - "bokiem poza siłą".

Istotnie: na rys. 42 moment siły S względem punktu O jest ujemny /widać to bezpośrednio z kierunku, w którym ta siła stara wykonać obrót około O /, jednocześnie widzimy, że punkt m_1 leży poniżej punktu m_2 , t.j. zgodnie z tem, jak możnaby przewidzieć, stosując dopiero co wymienione prawidło; na rys. 43 mamy znów wypadek dodatniego momentu; odcinek $n_1 n_2$ biegnie z góry na dół, czyli znowu zgodnie z prawidłem. Tak samo potwierdzają to ostatnie pozostałe przypadki, rozpatrzone na rys. 44 i 45.

Zwrócić należy uwagę, że powyższe prawidło będzie słuszne dotąd, dopóki biegun Ω obrany jest w wieloboku sił naprawo od linii sił. Gdybyśmy biegun obrali z lewej strony, prawidło powyższe należałoby sformułować, pod względem znaku momentów, wprost odwrotnie.

46. SKALE MOMENTÓW. Wypada jeszcze omówić sprawę skali, przy pomocy której należy w naszym wykresie mierzyć odpowiednie odcinki w celu wyznaczenia momentów statycznych sił.

Otrzymałiśmy poprzednio proporcję:

$$\frac{S}{m_1 m_2} = \frac{\omega}{a} \dots \dots \dots (1)$$

gdzie znaczenie liter wyjaśnia rys. 42. Z proporcji wynika, że najlogiczniej będzie przyjąć, iż stosunek w każdej z obu stron zawierają wielkości jednorodne, że więc $m_1 m_2$ jest wyrażone w takich samych jednostkach, jak S zaś ω - w takich samych jak a .

Z tego wnosimy, że $m_1 m_2$ NALEŻY MIERZYĆ W SKALI SIŁ, A ω - W SKALI DŁUGOŚCI.

Proporcję (1) można napisać także w sposób następujący

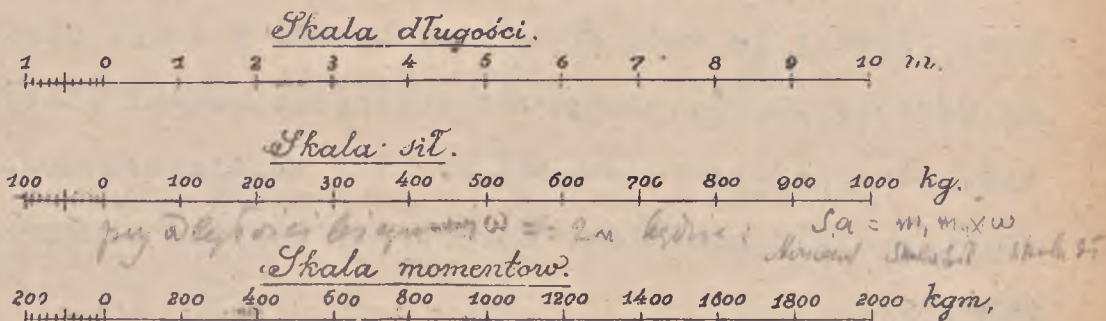
$$\frac{S}{\omega} = \frac{m_1 m_2}{a} \dots \dots \dots (2)$$

i rozumując, jak poprzednio, dojdziemy do wniosku, że MOŻNA ω MIERZYĆ W SKALI SIŁ, ZAŚ $m_1 m_2$ W SKALI DŁUGOŚCI, przyczem otrzymamy, oczywiście, ten sam wynik, co poprzednio.

Tak więc ODLEGŁOŚCI BIEGUNOWE i ODCINKI PROSTEJ ODCINKÓW NALEŻY MIERZYĆ W RÓŻNYCH SKALACH: JEŚLI PIERWSZĄ Z TYCH WIELKOŚCI MIERZYMY W SKALI DŁUGOŚCI, TO DRUGĄ TRZEBA MIERZYĆ W SKALI SIŁ, LUB ODWROTNIE.

Najczęściej stosować będziemy: dla odległości biegunowych - skalę długości, zaś dla odcinków - skalę sił.

47. Aby uniknąć wykonywania działań arytmetycznych przy wyznaczaniu momentów statycznych, kreślimy, zazwyczaj, obok skali długości i skali sił, specjalną "skalę momentów" /Rys. 46/. Każdą działkę tej skali, obieramy równą co do wielkości działki skali sił; działka skali momentów wskazać powinna iloczyn z liczby R_0 , przez odległość biegunową, zmierzoną w skali długości. Ponieważ odległość biegunowa jest wielkością stałą, zatem liczby, umieszczone nad skalą momentów, są liczbami krotnymi odpowiednich wartości na skali sił.



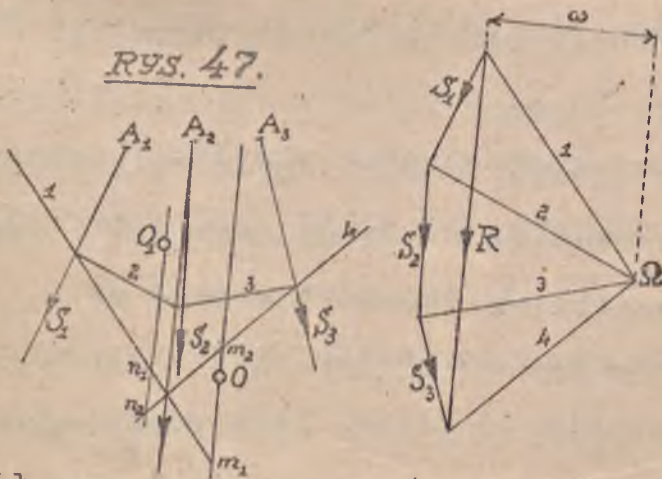
RYS. 46.

Na rys. 46 są wykreślone skale do zadania, w którym odległość biegunowa wynosi 2 m., w skali długości lub 200 kg. w skali sił.

48. Wyznaczanie MOMENTU STATYCZNEGO ILUKOLWIEK SIŁ PRZY POMOCY WIELCOKU SZNUROWEGO.

Przypuśćmy, że mamy np. trzy siły S_1, S_2, S_3 ; chodzi nam o znalezienie ich momentu statycznego względem

RYS. 47.



dowolnego punktu O /Rys. 47/.

W tym celu zastępujemy dany układ sił ich wypadkową R i znajdując ją przy pomocy wieloboku

sił sznurowego, a następnie, opierając się na twierdzeniu, dowiedzionem w § 43, wyznaczamy moment statyczny tej wypadkowej względem O .

Należy więc przez O poprowadzić prostą odcinków

równoległe do R i znaleźć punkty przecięcia jej z bokami przed i za siłą R /t.j. z bokami 1 i 4/; otrzymamy odcinek $\overline{m_1 m_2}$; następnie obliczamy moment statyczny siły, jako iloczyn $\overline{m_1 m_2} \cdot \omega$; lub też zmierzwszy odcinek $m_1 m_2$ w skali momentów, znajdziemy wartość szukanego momentu.

Zauważymy, że można się obejść bez rysowania wypadkowej w wieloboku sznurowym wyznaczając wprost przecięcia boków skrajnych z prostą odcinków.

Znak znalezionego tym sposobem momentu określamy zapomocą prawidła, przytoczonego w § 45. Stosując je, dojdziemy łatwo do wniosku, że w rozważanym przypadku /Rys. 47/ moment jest ujemny /odcinek $m_1 m_2$ biegnie z dołu do góry/.

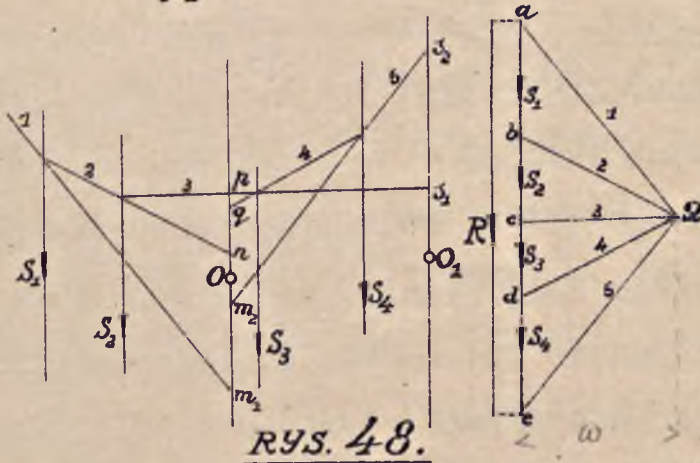
Podobnie otrzymamy, że moment statyczny tego samego układu sił względem punktu O_1 wynosi $\overline{n_1 n_2} \cdot \omega$ i posiada znak dodatni.

49. Na rys. 48 widzimy zastosowanie powyższej metody do wyznaczania MOMENTU STATYCZNEGO KILKU /czterech/ SIŁ RÓWNOLEGŁYCH S_1, S_2, S_3, S_4 względem punktu O .

W tym razie rzecz się upraszcza, gdyż wypadkowa tych sił, a więc i prosta odcinków, jest równoległa do sił składowych.

Oznaczając punkty przecięcia tej prostej z bokami skrajnymi wieloboku sznurowego przez m_1 i m_2 , napiszemy

$$\sum_{i=1}^{i=4} M_o S_i = -\overline{m_1 m_2} \cdot \omega \dots \dots (1)$$



Wynik ten łatwo sprawdzić bezpośrednio, wyznaczając moment statyczny każdej siły z osobna i następnie dodając te momenty algebraicznie.

$$\begin{aligned} \text{Istotnie: } M_o S_1 &= -\overline{m_1 n} \cdot \omega \\ M_o S_2 &= -\overline{nr} \cdot \omega \\ M_o S_3 &= +\overline{rq} \cdot \omega \\ M_o S_4 &= +\overline{qm_2} \cdot \omega \end{aligned}$$

Dodając te równości i biorąc pod uwagę, że $-\overline{m_1 n} - \overline{nr} + \overline{rq} + \overline{qm_2} = -\overline{m_1 m_2}$ otrzymamy wzór (1).

Za pomocą wykreślonego już wieloboku sznurowego można wyznaczać również momenty statyczne grupy pewnych sił z danego układu, byleby siły tej grupy następowały w wieloboku sił bezpośrednio po sobie.

Tak więc np. łatwo znajdziemy, że

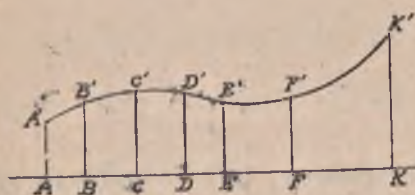
$$M_o (S_1, S_2) = -\overline{m_1 r} \cdot \omega,$$

gdzie $\overline{m_1 r}$ oznacza odcinek, znajdujący się na prostej odcinków pomiędzy punktami jej przecięcia się z bokami: przed siłą S_1 /bok 1/ i za siłą S_2 /bok 3/.

Zupełnie tak samo otrzymamy względem punktu O_2 ,

naprz.: $M_{O_2} (S_3, S_4) = -\overline{r_1 s_2} \cdot \omega$ i t.d.

50. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE. Dotychczas mieliśmy do czynienia jedynie z SIŁAMI SKUPIONEMI to jest takimi, które mają pewną skończoną wartość i są przyłożone do określonych punktów danego ciała. Rozważymy teraz przypadek gdy na ciało działają SIŁY CIĄGŁE, zmieniające się od punktu do punktu. Będzie to, naprz. obciążenie warstwą, kamieni lub piasku, nasypanego w sposób dowolny lub obciążenie tłumem ludzi, ustawionych na podłodze, spoczywającej na belce.



RYS. 49.

Przypuszcmy więc, że mamy belkę AK /rys.49/, obciążoną w sposób CIĄGŁY. Na dowolnie obraną część belki obciążonej przypadnie odpowiednia część ciężaru całkowitego.

Weźmy, dajmy na to, część belki CD o długości Δl ; przypuszcmy, że na tę długość przypada ciężar ΔP ; wtedy stosunek

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = p_0$$

wskaże nam ŚREDNIE OBCIĄŻENIE BELKI na jej części między C i D , przypadające na JEDNOSTKĘ jej długości.

Wartość tego ŚREDNIEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTKOWEGO dla obranego miejsca na belce zależy będzie od długości Δl . Aby uniezależnić wartość p_0 od długości Δl przyjmijmy, że długość Δl , mierzona od punktu C , me

leje, dążąc do zera; wówczas otrzymamy

$$\lim_{(\Delta l \rightarrow 0)} \frac{\Delta P}{\Delta l} = \frac{dP}{dl} = p;$$

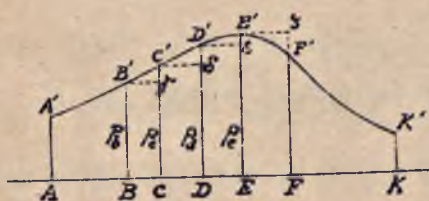
będzie to OBCIĄŻENIE JEDNOSTKOWE W DANYM PUNKCIE C ; oznaczmy je przez p . Przypuśćmy, że w sposób podobny obliczyliśmy obciążenia jednostkowe we wszystkich punktach obciążonej belki. Obrawszy, następnie, odpowiednią SKALĘ OBCIĄŻEŃ JEDNOSTKOWYCH, wystawiamy w punktach A, B, C, \dots belki prostopadłe do niej i na tych prostopadłych odkładamy odcinki AA', BB', CC', DD' i t.d. równe obciążeniom jednostkowym, znalezionym dla każdego punktu belki.

Jeżeli końce tych odcinków połączymy linią ciągłą, otrzymamy poglądowe przedstawienie rozkładu obciążeń jednostkowych wzdłuż belki. Linję $A'B'C' \dots$, która w ogólnym przypadku będzie linią krzywą, nazywać będziemy KRZYWĄ OBCIĄŻEŃ.

Obciążenie jednostkowe mierzyć będziemy najczęściej w kilogramach na metr bieżący belki /kg/m./.

Mając krzywą obciążeń daną, łatwo jest obliczyć z niej siłę, przypadającą na dowolną część belki, względnie na całą belkę.

Przyjmijmy, że mamy znaleźć siłę, działającą na część BF belki /rys. 50/. Podzielmy długość BF na dostatecznie małe części: BC, CD, DE i EF . Z pewnym przybliżeniem będziemy mogli przyjąć, że na całej długości części BC przypada jednakowe OBCIĄŻENIE JED-



RYS. 50.

NOSTKOWE, przedstawione odcinkiem $BB' = r_b$; na części CD - odcinkiem $CC' = r_c$; na części DE - odcinkiem $DD' = r_d$; itd.

Wówczas na część belki

BC działać będzie siła /ciężar/ $= r_b \cdot \overline{BC}$

CD " " " $= r_c \cdot \overline{CD}$

DE " " " $= r_d \cdot \overline{DE}$ i t.d.

Iloczyn $r_b \cdot \overline{BC}$ jest to pole prostokąta $BB'C$

" $r_c \cdot \overline{CD}$ " " " " $CC'SD$

" $r_d \cdot \overline{DE}$ " " " " $DD'EE$

" $r_e \cdot \overline{EF}$ " " " " $EE'SF$

Zatem siłę, działającą na część belki BF obliczymy /w przybliżeniu/ z pola, zawartego między rzędnymi krzywej obciążeń w punktach B i F , osią belki i linią schodkową $B'C'SD'EE'S$.

Jeśli byśmy podział belki BF dokonali na bardzo wiele części o bardzo małej długości, wówczas pole nasze ograniczone będzie od góry linią schodkową, która bardziej, niż poprzednia, zbliżyć się będzie do krzywej obciążeń $B'C'D'E'F'$. Wyobraźmy sobie, że podział belki BF skuteczniliśmy na nieskończenie wiele części; wtedy linia schodkowa zamieni się w krzywą $B'.....F'$ i siłę, działającą na część belki BF , obliczymy z pola zawartego między osią belki, rzędnymi w punktach,

ograniczających badaną część belki i krzywą obciążeń.

W podobny sposób znaleźlibyśmy siłę, działającą na część belki AB obliczywszy pole $AA'BB'$; toż samo dla całej belki AK należałoby obliczyć pole — $AA'B'C'D'E'F'K'K$.

Dla tego też pole, zawarte pomiędzy osią belki, krzywą obciążeń jednostkowych i dwiema rzędnymi, ograniczającymi rozpatrywaną część belki, nazywamy **POLEM OBCIĄŻEŃ**.

Wartość pola obciążeń, w zastosowaniach praktycznych, znajdziemy z dostatecznym przybliżeniem, dzieląc pole to na takie figury, aby pole każdej z nich można było łatwo obliczyć; wówczas pole obciążeń rozbite będzie na pola trójkątów, prostokątów, odcinków koła i t.p.

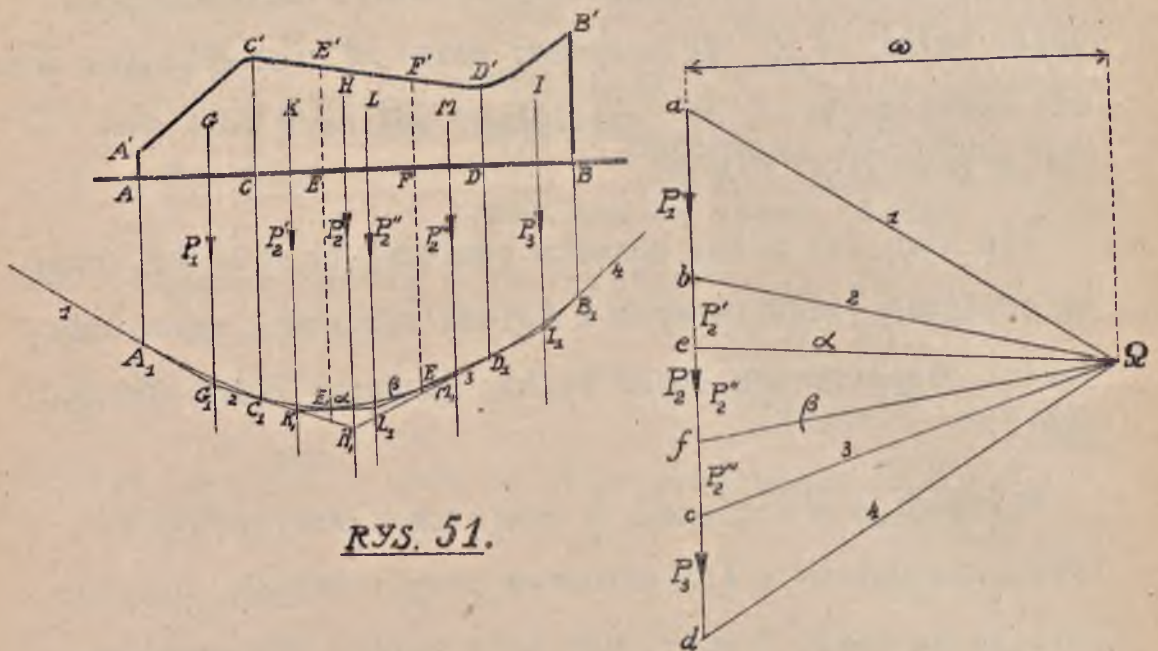
Wymiary tych figur otrzymywać należy, mierząc je, - w kierunku równoległym do osi belki - w skali długości, w kierunku prostopadłym do osi - w skali obciążeń jednostkowych. Wówczas pole da nam wielkość o wymiarze:

$$m \times \frac{\text{kg}}{m} = \text{kg}.$$

51. WIELOBOK SZNUROWY DLA PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.

Przypuśćmy, że mamy belkę, obciążoną w sposób ciągły; pole obciążeń niech będzie $AA'C'E'F'D'B'B$ /rys. 51/. Należy wykreślić wielobok sznurowy dla tego obciążenia.

Podzielmy pole obciążeń a kilka - w naszym przy-



RYS. 51.

kładzie na trzy - części $AA'CC'$, $CC'D'D$ i $DD'B'B$, z których każda łatwo da się obliczyć. Wartości tych pól niech będą P_1, P_2, P_3 . Wielkości wyznaczają nam siły, z którymi obciążenie ciągłe działa na poszczególne części belki AC , CD i DB . Uważamy siły P_1, P_2, P_3 jako siły skupione, które działają na poszczególne części belki i są przyłożone do środków ciężkości G, H, I poszczególnych pól wspomnianych. Dalej postępujemy jak z siłami skupionymi: kreślimy wielobok sił; obrawszy dowolny biegun Ω , prowadzimy promienie $1, 2, 3, 4$; następnie wykreślamy wielobok sznurowy $1, 2, 3, 4 - A_1, G_1, H_1, I_1, B_1$. W danym przypadku wielobok sznurowy posiada tylko 4 boki, gdyż obciążenie

ciągłe zastąpiliśmy trzema siłami skupionymi. Gdybyśmy chcieli otrzymać rozwiązanie /wielobok sznurowy/ bardziej dokładnie, należałoby pole obciążeń podzielić na większą liczbę części. Dajmy na to, że, dążąc w tym kierunku, jedno z pól, naprz. $CC'D'D$ podzielimy jeszcze na kilka /trzy/ dowolnych części. W ten sposób zamiast jednej siły skupionej P_2 mieć ich będziemy trzy:

P_2', P_2'', P_2''' , przyłożonych w środkach ciężkości K, L, M tych mniejszych pól.

Wykreślmy teraz dla układu sił skupionych

$$P_1, \underbrace{P_2', P_2'', P_2'''}_{P_2}, \text{ i } P_3$$

wielobok sił i wielobok sznurowy; zauważymy wtedy, że siły P_2', P_2'', P_2''' w wieloboku sił zajmą dokładnie miejsce między b i c , ponieważ $P_2' + P_2'' + P_2''' = P_2 = bc$, oraz że nowe promienie α i β , poprowadzone do końców $P_2' P_2''$ znajdą się między promieniami 2 i 3; promień za siłą

P_2''' pokrywa promień 3; wielobok sznurowy wykreślimy, pozostawiając bok 1 pierwotny; bok 2 - za siłą P_1 i przed siłą P_2' - zostanie ten sam, co i pierwiej; lecz tylko dojdzie do siły P_2' , t.j. do punktu K_1 , stąd pójdzie bok α do siły P_2'' - do punktu L_1 , dalej poprowadzimy bok β do siły P_2''' - do punktu M_1 , zaś poza siłą P_2''' i przed siłą P_3 otrzymamy bok 3 - poprzedni - i dalej za P_3 - bok 4 - poprzedni.

Stąd widzimy, że po zastąpieniu obciążenia ciągłego trzema siłami - wielobok sznurowy otrzymuje 4 boki;

jeśli którąkolwiek część obciążenia, zastąpioną poprzednio przez jedną siłę, podzielimy na kilka sił, otrzymamy wielobok sznurowy o zwiększonej liczbie boków; **NOWO PRZYBYŁE BOKI ZOSTANĄ WPISANE W PIERWOTNY WIELOBOK sznurowy.** Niech podział wspomnianego pola $CCDD$ będzie dokonany na znaczną liczbę części, co oznaczać będzie, że obciążenie tej części belki CD zastąpione zostanie przez znaczną liczbę mniejszych sił.

Wszystkie te siły w wieloboku sił ułożą się między punktami b i c ; promienie $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ znajdą się między promieniami 2 i 3; w wieloboku sznurowym bok 1 pozostanie bez zmiany, bok 2 pozostanie ten sam, lecz pójdzie do pierwszej siły z grupy sił, zastępujących P_2 - a to będzie zaraz przy punkcie C_1 , odpowiadającym punktowi C ; od tego miejsca pójdzie szereg boków $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ wpisanych w wielobok pierwotny - aż dopiero ostatni bok poza siłą ostatnią z grupy sił, zastępujących P_2 , - przy punkcie D_1 - przejdzie w bok 3 i wreszcie otrzymamy bok 4 na poprzednim miejscu.

Jeśli sił, zastępujących P_2 wyobrazimy sobie nieskończenie wiele, wielobok sznurowy na części między C_1 i D_1 zamieni się w **KRZYWĄ SZNUROWĄ**. Krzywa ta, jak wynika to z poprzedniego rozumowania, posiada pierwszy element w punkcie C_1 /jako bok przed siłami grupy P_2 / wspólny z bokiem 2, zaś ostatni element - jako bok poza siłami grupy P_2 - wspólny z bokiem 3. Innymi słowy, krzywa

sznurowa jest wpisana w pierwotny wielobok sznurowy, przytem w punktach C_1 i D_1 - w punktach odpowiadających początkowi i końcowi badanego obciążenia ciągłego - krzywa ta jest styczną do odpowiednich boków pierwotnego wieloboku sznurowego. Krzywa sznurowa dla części belki CD będzie styczna do boków α i β w punktach E_1 , F_1 , odpowiadających podziałowi obciążenia.

Jeżeli poprzednie rozumowanie zastosujemy do pierwszego pola $AA'C'C$, to dla obciążenia ciągłego części belki AC wielobok sznurowy otrzyma się jako krzywa wpisana w wielobok 1, 2, krzywa ta będzie styczna do boków 1 i 2 w punktach A_1 i C_1 .

Tak samo dla trzeciej części belki DB , obciążonej w sposób ciągły, otrzymamy krzywą sznurową wpisana w wielobok 3, 4, przyzem krzywa ta w punktach D_1 i B_1 będzie styczną do boków 3 i 4.

Stąd otrzymujemy następujące prawidło do wykreślenia krzywej sznurowej dla dowolnego obciążenia ciągłego:

a/ pole obciążeń dzielimy na kilka części dogodnych do obliczenia; w środku ciężkości każdej części przykładamy skupione siły zastępcze, równe odpowiednim ciężarom;

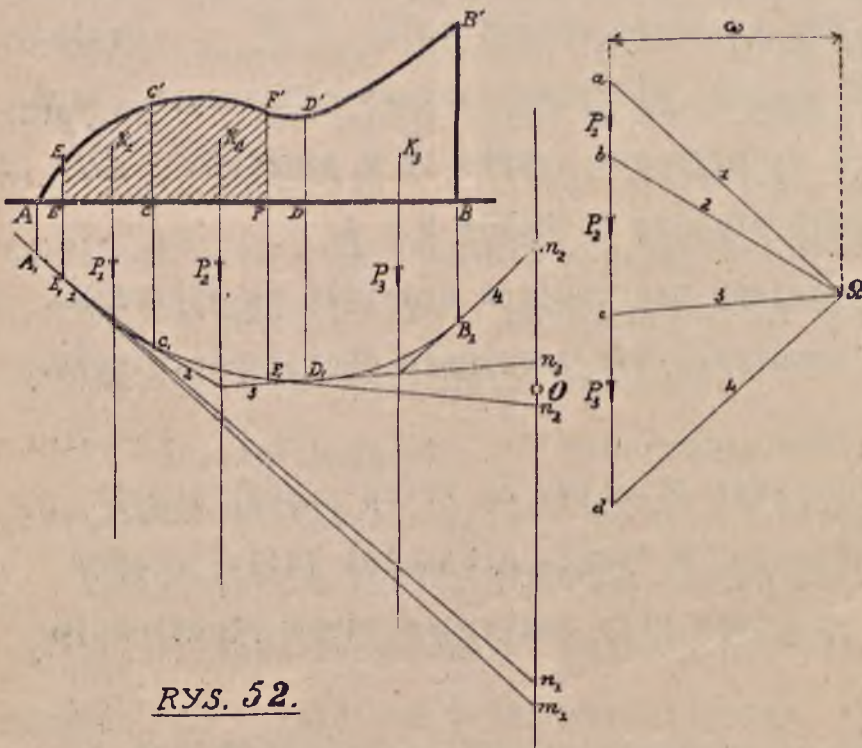
b/ wykreślamy wielobok sił dla zastępczych sił skupionych;

c/ wykreślamy dla tych sił wielobok sznurowy;

d/ wykreślamy krzywą sznurową, wpisując ją w otrzymany wielobok sznurowy, przyczem korzystamy z tego, że krzywa szukana powinna być styczna do boków wieloboku sznurowego w tych punktach, które odpowiadają linjom podziału pola obciążeń.

Jeśli zachodzi obawa, że przy zadanem dowolnem polu obciążeń niektóre części krzywej sznurowej mogą nie dać się dostatecznie dokładnie wykreślić, należy odpowiednio części pola obciążeń podzielić na większą liczbę drobniejszych pól.

52. MOMENT STATYCZNY W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.



RYS. 52.

Niech belka AB będzie obciążona w sposób ciągły. Pole obciążenia niech będzie dane $AC'D'B'B$ /rys. 52/.
Mamy znaleźć mo-

ment statyczny dowolnej części obciążenia belki względem jakiegokolwiek punktu O .

Przypuśćmy, że sposobem, wskazanym w poprzednim /51/ paragrafie, po podzieleniu obciążenia na 3 części $AC'C, CC'DD, DD'B'B'$ znaleźliśmy wielobok sznurowy 1,2,3,4, poczem w ten wielobok wpisaliśmy krzywą, która, zgodnie z poprzednim, jest styczną w punktach A_1, C_1, D_1, B_1 , do boków 1,2,3,4 wieloboku sznurowego.

Zauważmy, że wykreślona krzywa sznurowa powinna być uważana, co wynika z poprzedniego, jako wielobok sznurowy o nieskończenie wielkiej liczbie boków.

Niech będzie żądane znaleźć moment statyczny względem punktu O sił, działających na belkę na długości od E do F . Postępujemy w tym celu zgodnie z prawidłem, wyjaśnionym w paragr.49. Przez punkt O prowadzimy PROSTĄ ODCINKÓW; następnie odnajdujemy boki "przed" i "za" siłami, działającymi na belkę EF . W punkcie E_1 - spotykamy na krzywej sznurowej element jej, który jest właściwym bokiem "przed" i w punkcie F_1 - element, który jest bokiem "za" siłami. Przedłużamy boki "przed" i "za" siłami do spotkania się z prostą odcinków. Przedłużenia tych elementów - boków - będą to styczne do krzywej sznurowej w punktach E_1 i F_1 .

Styczna w E_1 spotyka prostą odcinków w p. n_1 , zaś styczna w F_1 przecina prostą odcinków w p. n_2 .

Stąd: mom. stat. sił na dk. EF względem $O = -\overline{n_1 n_2} \cdot \omega$, gdzie $\omega =$ odległości biegunowej, a znak $(-)$ wskazuje, że moment będzie ujemnym, gdyż odcinek $n_1 n_2$ idzie z

dołu do góry. Jeśli mamy wykreśloną skalę momentów, to, mierząc w tej skali odcinek $n_1 n_2$, znajdziemy odrazu wartości momentu.

W podobny sposób należy postępować przy szukaniu momentu statycznego względem zadanego punktu dla tej czy innej części obciążonej belki.

Gdyby, wypadkowo, chodziło o znalezienie momentu statycznego dla tej części obciążenia, która przy pierwotnym podziale, przyjęta była za odrębną część, wówczas niema potrzeby nawet wykreślenia krzywej sznurowej: wystarczy zadowolnić się pierwotnym wielobokiem sznurowym.

Naprz. niech będzie potrzeba znalezienia momentu statycznego względem p. O dla części obciążenia belki od A do D . Wówczas "przed" siłami okaże się bok 1, zaś "za" siłami bok 3 i szukany moment statyczny =

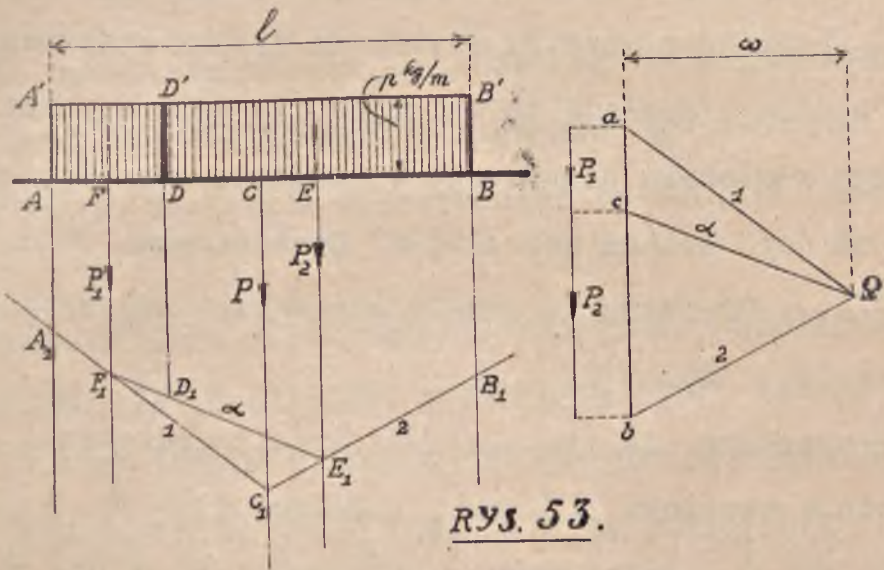
$$= - \overline{m_1 n_3} \cdot \omega$$

Tak samo postępowalibyśmy, gdyby była potrzeba znalezienia momentu statycznego względem poprzedniego punktu dla całego obciążenia belki od A do B . Moment wtedy będzie $= - \overline{m_1 m_2} \cdot \omega$.

53. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE JEDNOSTAJNE. Zbadamy teraz szczególny przypadek obciążenia ciągłego, gdy obciążenie to jest jednostajne. Krzywa obciążeń $A'B'$ staje się prostą równoległą do osi belki /rys.53/.

Aby wyznaczyć kształt linii sznurowej, odpowiada-

jącej temu przypadkowi, przypuścimy naprzód, że całkowite obciążenie P jest zastąpione siłą skupioną, przyłożoną do środka ciężkości pola obciążeń, czyli prostokąta $AA'B'B$. Linja działania siły P przechodzić będzie przez połowę długości obciążonej belki.



RYS. 53.

Oczywiście, $P = p \cdot l$, gdzie p oznacza stałe obciążenie jednostkowe, a l — długość belki obciążonej. Wykreślmy dla owej skupionej siły P wielobok sił oraz odpowiedni wielobok sznurowy. Promienie pierwszego, a boki drugiego oznaczmy odpowiednio przez 1 i 2.

Podzielmy, następnie, obciążenie całkowite na dwie części linją podziału DD' i rozważajmy obciążenia każdej z tych części, które mogą być uważane jako siły skupione, przyłożone do odpowiednich środków ciężkości.

Budujemy nowy wielobok sznurowy dla owych sił zastępczych, które oznaczamy przez P_1 i P_2 .

Wielobok utworzony będzie z trzech boków, z których dwa skrajne /przed siłą P_1 i za siłą P_2 / będą temi samemi bokami 1 i 2, co poprzednio, zaś bok środkowy \mathcal{L} połączy punkty przecięcia linii działania sił P_1 i P_2 z owemi bokami skrajnemi.

Z rozważań paragr. 51 wiemy, że krzywa sznurowa, której szukamy, posiada tę własność, że jest styczna do nowego wieloboku sznurowego w punktach, znajdujących się na jego bokach pod linjami podziałkowemi AA' , BB' i DD' . Oznaczmy te punkty styczności odpowiednio przez A_1 , B_1 , D_1 .

Przypuśćmy, że linja DD_1 dzieli obciążenia całkowite w stosunku $1:n$. Zatem $AD = \frac{\ell}{n}$ i $DB = \ell - \frac{\ell}{n} = \frac{n-1}{n} \ell$. Dalej mamy $AF = \frac{AD}{2} = \frac{\ell}{2n}$; $DE = \frac{1}{2} DB = \frac{n-1}{2n} \ell$.

Rozpatrzmy teraz odcinki, utworzone przez proste równoległe AA_1 , FF_1 , CC_1 na prostych AC i A_1C_1 : między nimi zachodzi zależność następująca:

$$\frac{A_1F_1}{A_1C_1} = \frac{AF}{AC} = \frac{\ell}{2n} : \frac{\ell}{2} = \frac{1}{n},$$

skąd $A_1F_1 = \frac{A_1C_1}{n}$. Widzimy stąd, że punkt F_1 dzieli odcinek A_1C_1 na dwie części w stosunku $\frac{1}{n}$, t.j. w takim samym, w jakim linja DD' dzieli pole $AA'B'B$.

Analogicznie znajdziemy:

$$\frac{C_1E_1}{C_1B_1} = \frac{CE}{CB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{n} \quad x/$$

$x/$ Ponieważ: $AD = AB - DB$

i następnie: $\frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{DB}{2}$

$$AF = BC - EB = CE.$$

skąd $C_1 E_1 = \frac{C_1 B_1}{n}$. Zatem również i punkt E_1 dzieli odcinek $C_1 B_1$ boku 2 na dwie części w tym samym stosunku: $\frac{1}{n}$.

Wreszcie otrzymamy z łatwością, że

$$\frac{F_1 D_1}{F_1 E_1} = \frac{FD}{FE} = \frac{AF}{AC} = \frac{l}{2n} : \frac{l}{2} = \frac{1}{n},$$

czyli że punkt styczności D_1 boku \mathcal{L} z krzywą sznurową dzieli ten bok również w stosunku $\frac{1}{n}$.

Reasumując wszystkie wyprowadzone tu wnioski, powiemy, że:

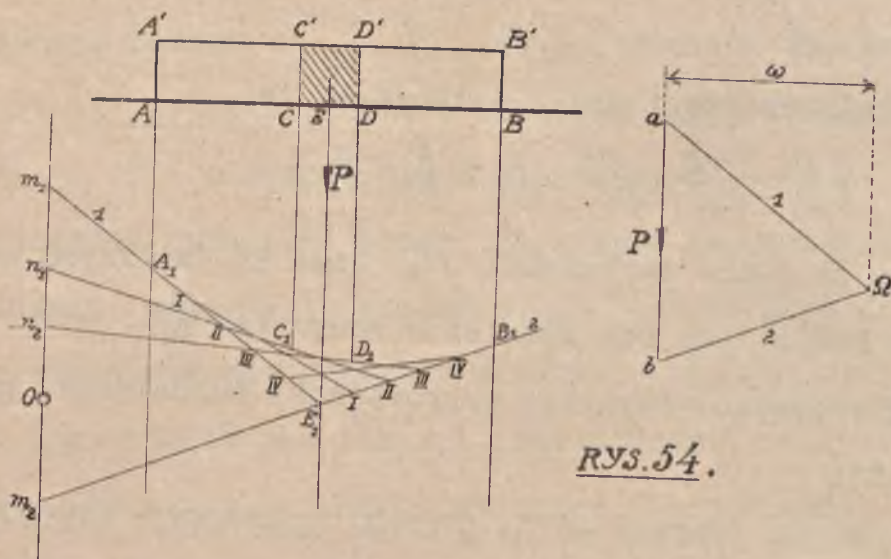
DOWOLNA STYCZNA \mathcal{L} DO KRZYWEJ SZNUROWEJ, ODPOWIADAJĄCEJ OBCIĄŻENIU CIĄGŁEMU I JEDNOSTAJNEMU, DZIELI KAŻDĄ Z DWUCH INNYCH STYCZNYCH W JEDNAKOWYM STOSUNKU.

W TAKIM SAMYM STOSUNKU NOWA STYCZNA DZIELI SIĘ W JEJ PUNKCIE STYCZNOŚCI Z KRZYWĄ SZNUROWĄ.

Z geometrii analitycznej oraz rzutowej wiadomo, że takie własności posiada jedynie krzywa, zwana PARABOLĄ. Z tego więc wynika, że KRZYWĄ SZNUROWĄ W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO I JEDNOSTAJNEGO JEST PARABOLA.

54. Otrzymane poprzednie własności krzywej sznurowej paraboli pozwalają jednocześnie wykreślać ją w sposób nadzwyczaj prosty /rys.54/.

Wystarczy w tym celu wykreślić wielobok sznurowy dla siły skupionej P , zastępującej całkowite obciążenie $AA'B'B$ i każdy z dwóch boków tego wieloboku, a więc $A_1 E_1$ i $E_1 B_1$ podzielić na jednakową liczbę



RYS. 54.

części. Punkty podziału na stycznej $A_1 E_1$ i oddzielnie na $E_1 B_1$ numerujemy kolejno, poczynając od A_1 i E_1 . Następnie łączymy ze sobą punkty, zaopatrzone w jednakowe numery, i w ten sposób otrzymamy szereg prostych, których obwiednią jest właśnie szukana parabola. (x)

55. Gdy już mamy wykreśloną parabolę, jako krzywą sznurową dla jednostajnego obciążenia ciągłego, z kątością możemy wyznaczyć momenty statyczne danego obciążenia lub jego części względem dowolnych punktów.

(x) UWAGA PRAKTYCZNA. Mając dostateczną liczbę stycznych do paraboli, niema już potrzeby jej wykreślać, bo styczne te zarysują parabolę dość dokładnie. Wykreślanie paraboli jest nawet niepożądane, bo poza tem, że zabiera dużo czasu, prawdopodobieństwo niedokładności będzie większe niż wtedy, gdy poprzestajemy tylko na stycznych.

Tak więc np. /rys. 54/ moment statyczny obciążenia belki na długi. AB wzgl. punktu $O = M_o (\sum P)_{AB} = m_1 m_2 \omega$, podobnież : $M_o (\sum P)_{CD} = n_1 n_2 \omega$;
 odcinki $m_1 m_2$ i $n_1 n_2$ są wyznaczone na prostej odcinków przez styczne do paraboli w punktach, odpowiadających linjom podziału pola $AA'B'B$. Obydwa momenty w danym przypadku są dodatnie.

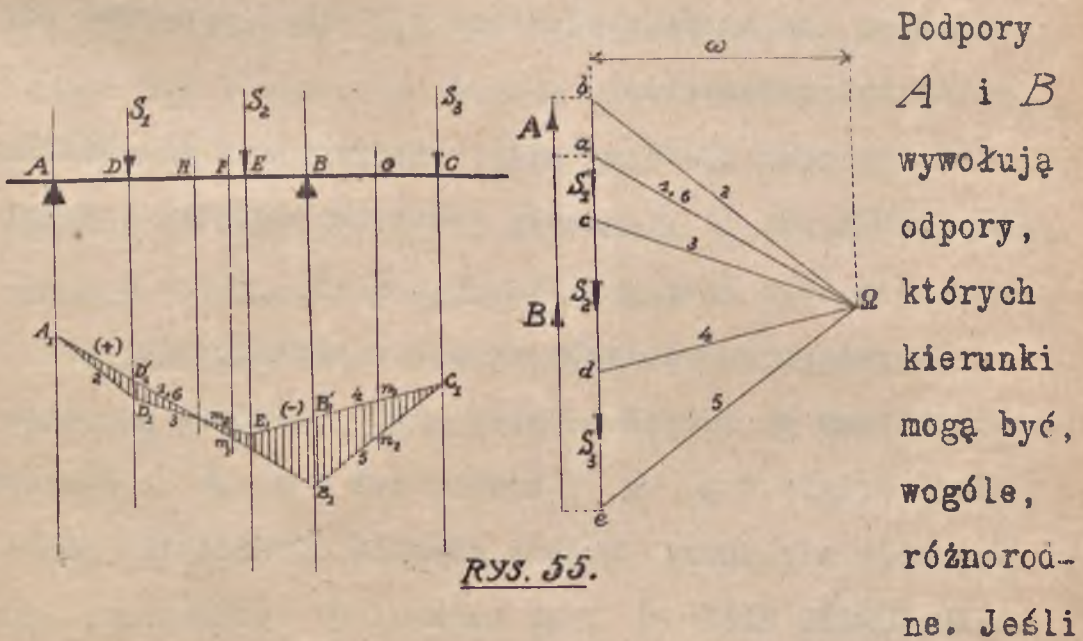
ROZDZIAŁ IV.

BELKA PROSTA NA DWUCH PODPORACH.

A. OBCIĄŻENIE BEZPOŚREDNIE.

56. OKREŚLENIE ODPORÓW.

Wyobraźmy sobie belkę prostą, opartą na dwóch podporach A i B i obciążoną pionowymi siłami skupionymi S_1, S_2, S_3 . /Rys. 55/.



RYS. 55.

Podpory A i B wywołują odpory, których kierunki mogą być, wogóle, różnorodne. Jeśli

jednak przypuścimy, że jedna z podpór, dajmy na to

A stanowi jak gdyby ostrze, mogące wywierać działa-

nie jedynie w pewnym kierunku naprz. pionowym, to również i oddziaływanie drugiej podpory będzie określone; w danym razie będzie pionowe.

Wynika to z tego, że pod wpływem sił pionowych S_1 , S_2 , S_3 albo ich wypadkowej R równoległej do nich, a więc siły pionowej oraz odporów A i B belka znajduje się w równowadze, zatem siła R odpory A i B powinny przeciąć się w jednym punkcie. Punkt ten znajduje się w nieskończoności, gdyż siły R i A są siłami równoległymi. Odpór B , wobec tego, musi być do nich równoległym.

Mając już kierunki oddziaływań A i B możemy wyznaczyć ich wartości, budując wielobok sił, o dowolnym biegunie \mathcal{O} , oraz odpowiedni wielobok sznurowy i pamiętając, że zarówno wielobok sił jak i sznurowy powinny być zamknięte.

W tym celu układamy siły w szereg tak, aby NIEZNANE ODPORY A i B stały jeden na początku i drugi na końcu tego szeregu: A, S_1, S_2, S_3, B .

Przystępujemy do wykreślenia wieloboku sił: powinniśmy go zacząć od siły A , której początek niech będzie w p. a , koniec zaś w p. b . Ponieważ tej siły nie znamy, możemy narazie obrać tylko punkt b , JAKO KONIEC SIŁY A ; od punktu b odkładamy: odcinek bc , przedstawiający siłę S_1 , za nim odcinek cd - siłę S_2 , odcinek de - siłę S_3 ; w p. e znaleźć

się powinien POCZĄTEK SIŁY B , koniec tej siły upadnie na punkt a , gdyż wielobok się ma być zamknięty. Na razie jednak punktu a nie znamy.

Obieramy, dalej, dowolny biegun Ω i kreślimy promienie: do punktu a - na razie nieznanego - niech pójdzie promień 1 /nie wykreślany go/;

do p. b - prowadzimy promień 2

" " c " " 3

" " d " " 4

" " e " " 5

promień ostatni 6 powinien być poprowadzony do punktu a , t.j. powinien się ułożyć wzdłuż promienia 1.

Promienie 1 i 6 będziemy mogli dopiero później wyznaczyć.

Przystępujemy teraz do budowy wieloboku sznurowego. Bok 1 powinien przejść przez dowolny punkt A_1 , obrany na linii działania siły A , równoległe do promienia 1. Tego promienia nie znamy i, wobec tego, nie możemy też na razie wykreślić boku 1.

Wykreślamy dalsze boki wieloboku sznurowego:

przez p. A_1 bok 2 /równoległe do prom. 2/ do siły S_1 - do

p. D_1

" " D_1 " 3 / " " 3/ do siły S_2 - do

p. E_1

" " E_1 " 4 / " " 4/ do siły S_3 - do

p. C_1

przez p. C_1 bok 5 /równoległe do prom.5/ do siły B - do
p. B_1

" " B_1 powinien przejść bok 6, równoległe do promienia 6.

Ponieważ promienie 1 i 6, ze względu na równowagę układu sił, pokrywają się, więc boki 1 i 6 powinny być równoległe; a że, dalej, wielobok sznurowy ma być zamknięty, zatem boki 1 i 6 powinny się pokrywać, czyli że jedyne ich połączenie jest-wzdłuż prostej, łączącej punkty A_1 i B_1 . Znaleźliśmy więc boki 1 i 6, tem samym mamy możność wykreślenia promieni 1, 6, prowadząc z bieguna Ω prostą równoległą do boku 1, 6. Tą drogą znajdujemy punkt α , w którym przypadają POCZĄTEK SIŁY A : KONIEC SIŁY B . Zatem odcinek ab przedstawia nam odpór A , zaś odcinek ea - odpór B .

Znaleźliśmy więc oba odpory belki, podpartej w dwóch punktach, oraz wykreśliliśmy wielobok sznurowy dla sił, działających na belkę.

Zaznaczyć należy, że powyższy sposób, cokolwiek szczegółowiej opisany, daje się zastosować bez żadnej trudności do każdego najbardziej zawiłego przypadku belki, podpartej w dwóch punktach.

57. MOMENTY GNĄCE BELKI. Do wyznaczenia wymiarów belki, poddanej działaniu jakiegokolwiek układu sił, ^(x)

(x) Jest to zagadnienie, rozpatrywane w "Wytrzymałości materiałów/.

potrzebna jest znajomość t.zw. "momentu gnącego", który można określić w sposób następujący:

MOMENTEM GNĄCYM BELKI, WZGLĘDEM DANEGO PRZEKROJU, NAZYWAMY SUMĘ MOMENTÓW STATYCZNYCH WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NA LEWO OD TEGO PRZEKROJU WZGLĘDEM ŚRODKA CIĘŻKOŚCI TEGO PRZEKROJU.

Warunek, aby brać pod uwagę siły, leżące NA LEWO od rozważanego przekroju /nie zaś na prawo/ nie jest istotny, a ma jedynie na celu ujednostajnienie postępowania. W samej rzeczy: zważmy, że wszystkie siły, działające na belkę, są w równowadze, a więc suma momentów statycznych wszystkich sił, leżących NA LEWO i NA PRAWO od danego przekroju względem jakiegokolwiek punktu, a więc względem środka ciężkości tego przekroju - jest = zeru; stąd mamy, że suma mom.stat. wszystkich sił, wziętych NA LEWO od danego przekroju i suma wszystkich sił, wziętych NA PRAWO od niego, muszą być sobie równe, różniąc się tylko znakiem. Posiadając wielobok sznurowy, możemy znajdować wprost momenty gnące względem któregośkolwiek przekroju belki, a to na zasadzie § 49. Tak więc np., aby wyznaczyć moment gnący, w przypadku zadania na rys.55, względem przekroju F czyli $(M_g)_F$, prowadzimy przez F prostą odcinków i szukamy przecięcia się jej z bokami przed i za siłami, znajdującymi się na lewo od F .

Aby znaleźć te boki zważmy, że na lewą część belki od zadanego przekroju działają siły A i S , które w wieloboku sił mają początek w punkcie a i kończą się w punkcie C ; do tych punktów idą promienie 1 i 3; zatem przed siłami mamy bok 1, zaś za siłami bok 3.

Boki 1 i 3 przecinają się z linią odcinków w punktach m_1, m_2 ; wobec tego

$$(M_g)_F = -\overline{m_1 m_2} \cdot \omega$$

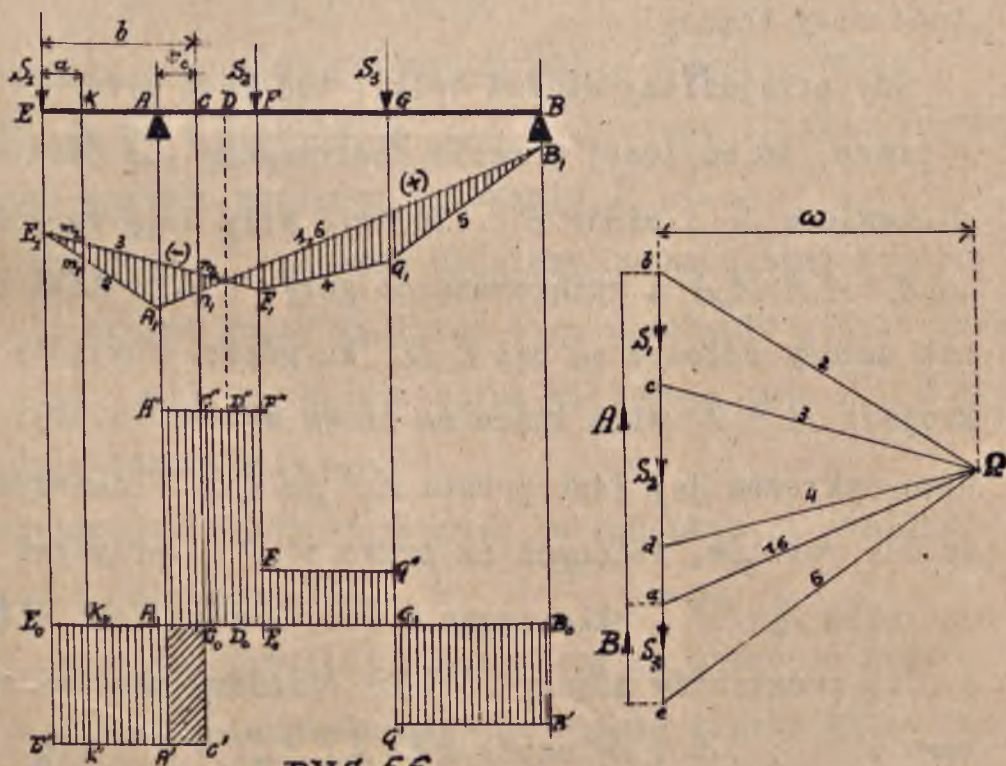
przyczem ω oznacza, jak zwykle, odległość biegunową.

Jeżeli będziemy obierali przekroje na prawo od poprzedniego przekroju F , to znajdować będziemy dla nich coraz większe wartości momentów gnących, przyczem będą one wciąż ujemne. Nad podporą B , panuje, jak widzimy, moment gnący największy $= (M_g)_B = -\overline{B_1 B_1'} \cdot \omega$ poczem momenty zaczynają się zmniejszać; w przekroju G $(M_g)_G = -\overline{n_1 n_1'} \cdot \omega$ i dalej staje się zerem dla przekroju, w którym działa siła S_3 . Łatwo dostrzeżemy, że w przekrojach na lewo od F moment gnący maleje, w przekroju H jest równy zeru, następnie zmienia znak /staje się więc dodatni/ i wzrasta aż do punktu D przyłożenia siły S_2 , gdzie $(M_g)_D = +\overline{D_1 D_1'} \cdot \omega$, poczem maleje i nad podporą A jest zerem.

Widzimy, że wielobok sznurowy daje nam bezpośrednio możliwość wyznaczania momentów gnących dla dowolnego przekroju belki i wskazania, gdzie i jakie są momenty gnące maksimum. Wielobok ten obejmuje pewne pole, które możemy nazwać **POLEM MOMENTÓW GNĄCYCH** lub wprost **POLEM MOMENTÓW**

58. INNY PRZYKŁAD. Na rys.56 mamy wykreślone pole momentów, dla przykładu, stanowiącego nieznaczną odmianę przykładu, rozwiązanego w paragrafie poprzednim. Można do niego bez zmiany zastosować te rozumowania, które przytaczaliśmy tam; nie chcąc się więc powtarzać, porzucamy na samym wykresie, sądząc, że czytelnik sam da sobie radę.

59. SILY TNĄCY. Na rys.56 pod polem momentów widzimy jeszcze inny wykres, zwany WYKRESEM SIŁ TNĄCYCH.



Poznamy zaraz znaczenie nowego pojęcia, zaznaczając, że znajomość sił tnących jest potrzebna, według "wytrzymałości materiałów" do obliczania belek.

Oś SIŁĄ TNĄCĄ, ALBO SIŁĄ POPRZECZNĄ DLA DANEGO PRZEKROJU BELKI NAZYWAMY ALGEBRAICZNĄ SUMĘ WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NA LEWO OD TEGO PRZEKROJU.

Tak więc np. dla wszystkich przekrojów belki od E do A siła tnąca ma wartość stałą i równą S_1 . Chcąc zbudować wykres tej siły tnącej, odmierzamy od dowolnej osi poziomej E_0B_0 odcinek $E_0E' = S_1$ i skierowany tak, jak siła S_1 , czyli w dół. Przez E' prowadzimy prostą $E'A'$ równoległą do E_0B_0 . Otrzymamy w ten sposób linię prostą, której rzędne będą oznaczały w każdym miejscu wartość siły tnącej.

Gdy przejdziemy wzdłuż belki, tuż poza przekrój A w prawo, to po lewej stronie dostrzegamy już dwie siły, mianowicie S_2 i odpór A . Te dwie siły dają wypadkową $A_0A_1 + A'A'' = A_0A''$ i skierowaną do góry, a więc taki odcinek należy odłożyć od osi E_0B_0 ku górze. Pomiędzy przekrojami A i F siła tnąca ma znowu wartość stałą, a więc wykresem jej jest prosta $A''F'' \parallel$ do E_0B_0 . W dalszym ciągu dla punktów, leżących na prawo od F , przybywa jeszcze siła $S_2 = F'F''$, skierowana w dół, a więc jako siłę tnącą dla przekrojów między F i G będziemy uważali wypadkową sił S_1, A i S_2 czyli $E_0F' + F'F'' = E_0F''$ i t.d. Postępując w dalszym ciągu w taki sam sposób, dojdziemy wreszcie do punktu B' , od którego w górę powinniśmy odłożyć odpór B . O ile wykres był wykonany prawidłowo, wtedy odcinek $B'B_0$ powinien być właśnie równy temu odporowi.

Wynika to stąd, że w przekroju B siła tnąca jest równa zeru /belka bowiem jest w równowadze, a więc suma wszystkich sił zewnętrznych musi być równą 0/.

Figura $E_0E'A'A''F'F'G'G'B'B_0$ nosi nazwę WYKRESU SIŁ TNĄCYCH lub SIŁ POPRZECZNYCH.

60. ZWIĄZEK, POMIĘDZY WYKRESEM MOMENTÓW GNĄCYCH I WYKRESEM SIŁ POPRZECZNYCH.

Weźmy pod uwagę przekrój belki K /rys.56/, odległy o a od przekroju E . Moment gnący dla tego przekroju możemy wyznaczyć:

$$(M_g)_K = -S_1 \cdot a$$

Ponieważ, z drugiej strony, $E_0E' = S_1$, a $E_0K_0 = a$, zatem widzimy, że pole prostokąta $E_0E'K'K_0$ jest liczbowo równe momentowi gnącemu względem przekroju K .

Gdy przekrój K obierać będziemy coraz bliżej podpory A , to moment gnący względem tego przekroju będzie wzrastał, gdyż ramię a będzie coraz większe i pole $E_0E'K'K_0$ też będzie wzrastać.

O wzrastaniu momentów gnących ku podporze A wnioskujemy też z pola momentów.

Gdy rozważany przekrój przesuniemy na prawo od podpory, to do wyznaczenia momentu gnącego będzie trzeba wziąć pod uwagę już dwie siły, mianowicie S_1 i odpór A . Będzie zatem

$$(M_g)_C = -S_1 \cdot b + Ac \dots \dots \dots /1/$$

gdzie b i c oznaczają odpowiednie odległości przekroju C od sił S_1 i A .

Pierwszy składnik tej sumy wyraża pole $E_o F' C' C_o$, drugi zaś - pole $A' A'' C'' C'$, zatem otrzymujemy: $(M_g)_c = -E_o E' C' C_o + A' A'' C'' C' = -E_o E' A' A_o - A_o A' C' C_o + A_o A' C' C_o + A_o A'' C'' C_o = -E_o E' A' A_o + A_o A'' C'' C_o$.

Umówmy się pola POD osią $E_o B_o$ uważać za ujemne, zaś NAD osią $E_o B_o$ za dodatnie, wówczas $(M_g)_c$ obliczymy jako sumę pól, zawartych między osią $E_o B_o$, linią sił tnących oraz dwiema rzędnymi, z których jedna należy do lewego końca belki, druga poprowadzona jest przez dany przekrój.

Łatwo dostrzeżemy, że gdy tylko przekroczymy podporę A , to zjawiają się pola dodatnie, które będą zmniejszały sumę poprzednią. Z tego wynika, że, o ile linja sił tnących przecina oś $E_o B_o$ w pewnym miejscu, to moment gnący w tym miejscu posiada wartość największą, a więc i rzędne wieloboku sznurowego osiągną tutaj maximum^{x/}.

W przekroju D moment gnący jest zerem, co wskazuje, że pole $E_o E' A' A_o$ musi być równe polu $A_o A'' D'' D_o$. Poza przekrojem D będą już momenty dodatnie, rosnące w miarę zbliżania się do przekroju F . Za tym przekrojem mamy mo-

^{x/} Wartość momentu gnącego nad podporą A w naszym przykładzie jest ujemna; wobec tego właściwie należałoby uważać ją jako "minimum". Ponieważ, jednak, z punktu widzenia "wytrzymałości materiałów" jest wszystko jedno, czy mamy do czynienia z momentem gnącym ujemnym, czy dodatnim, więc największe wartości tych momentów będziemy zawsze notowali jako "maximum".

menty, wprowadzie wciąż dodatnie, ale już wolniej rosnące, bo przybywa tu działanie siły S_2 , dającej momenty ujemne. To samo wynika z rozpatrywania wykresu sił tnących, gdzie, jak widzimy, przy przesuwaniu się do przekroju F przybywają pola prostokątów o większych wysokościach, niż poza tym przekrojem. Dla przekroju G mamy znowu moment "maximum" i jednocześnie widzimy, że linja sił tnących w tem miejscu przecina oś $E_0 B_0$.

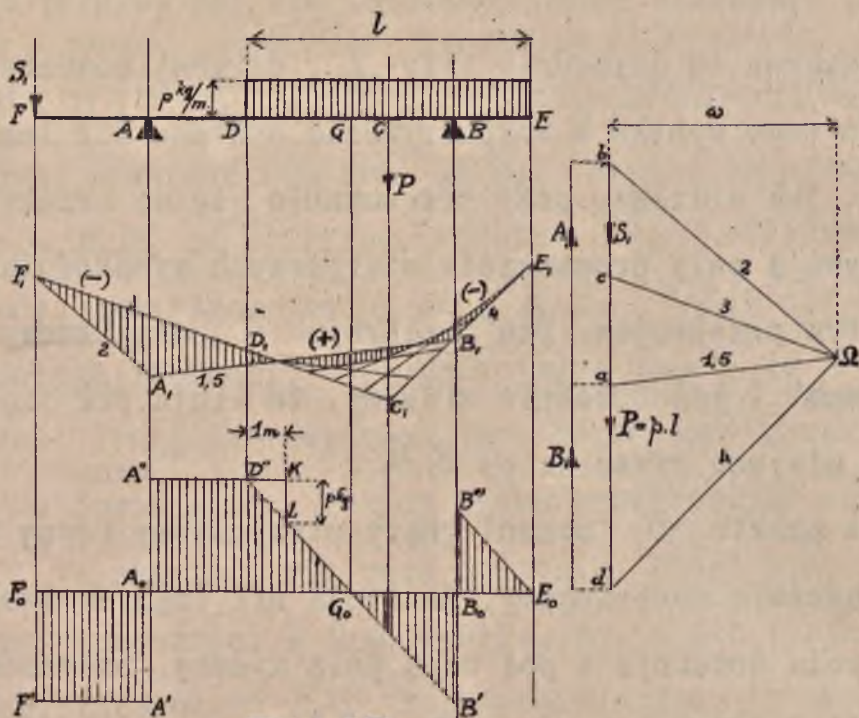
Dla punktu B moment gnący otrzymujemy równy zeru; jednocześnie dostrzegamy, że linja sił tnących tworzy ponad osią pola dodatnie i pod osią pola ujemne, przyczem wartości pól dodatnich i ujemnych są równe - w sumie dają zero.

Z powyższego można wyprowadzić następujący wniosek ogólny: MAXIMUM MOMENTU GNĄCEGO ZNAJDEMIY DLA TYCH PRZEKROJÓW BELKI, W KTÓRYCH WYKRES SIŁ TNĄCYCH PRZECINA OŚ BELKI.

61. WYKRES SIŁ TNĄCYCH DLA CIĄGŁEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTAJNEGO. Rys. 57 zawiera wielobok sznurowy - inaczej pole momentów oraz wykres sił tnących dla belki, obciążonej jedną siłą skupioną S_2 oraz na długości l siłą ciągłą, wynoszącą p kg/m.

Wykreślenie wieloboku sznurowego wykonamy z łatwością; stąd otrzymany pole momentów.

Tak samo nie znajdziemy trudności przy wykreśleniu linji sił tnących, aż do punktu D , gdzie zaczyna się obciążenie ciągłe.



RYS. 57.

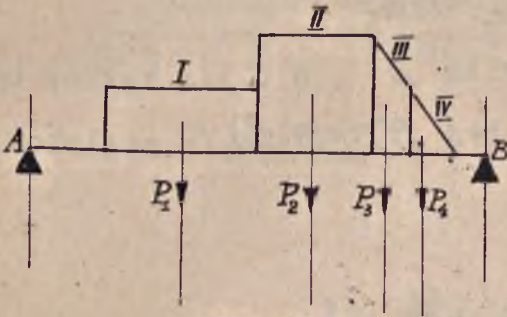
Od tego punktu siła tnąca maleje stale, a ponieważ obciążenie jest jednostajne, więc ubytek jej będzie proporcjonalny do odległości od przekroju D , czyli wyrazi się za pomocą prostej pochyłej $D''B'$. Wykreślimy tę prostą, korzystając z tego warunku, że w odległości 1 m. $D''K$ od D'' siła tnąca jest o ρ kg. = KL /nie ρ kg/m./ mniejszą, niż w przekroju D .

W przekroju na podporze B zachodzi skok w wartości siły tnącej o wartość odporu $B = B'B''$, a następnie mamy znowu spadek według prostej $B''E_0$, równoległej do $D''B'$; prosta $B''E_0$ powinna przeciąć oś F_0E_0 w punkcie E_0 , gdyż tu siła tnąca = 0.

Linia sił tnących $F_0FA'A''D''B'B''E_0$ przecina oś F_0E_0 .

w trzech punktach: A_0 , G_0 i B_0 , co wskazuje, że w przekrojach, odpowiadających punktom A , G i B momenty otrzymają wartość maximum.

62. OBCIĄŻENIE NIEJEDNOSTAJNE. Aby wyznaczyć wykresy momentów i sił tnących dla przypadku obciążenia ciągłego niejednostajnego, postępujemy na zasadzie par. 51 /rys. 58/. Dzielimy więc pole obciążeń na części, wyznaczamy środek ciężkości każdej z nich i uważamy, że w tych środkach są skupione odpowiednie ciężary i dla nich budujemy nasze wykresy.



RYS. 58.

go niejednostajnego, postępujemy na zasadzie par. 51 /rys. 58/. Dzielimy więc pole obciążeń na części, wyznaczamy środek ciężkości każdej z nich i uważamy, że w tych środkach są skupione odpowiednie ciężary i dla

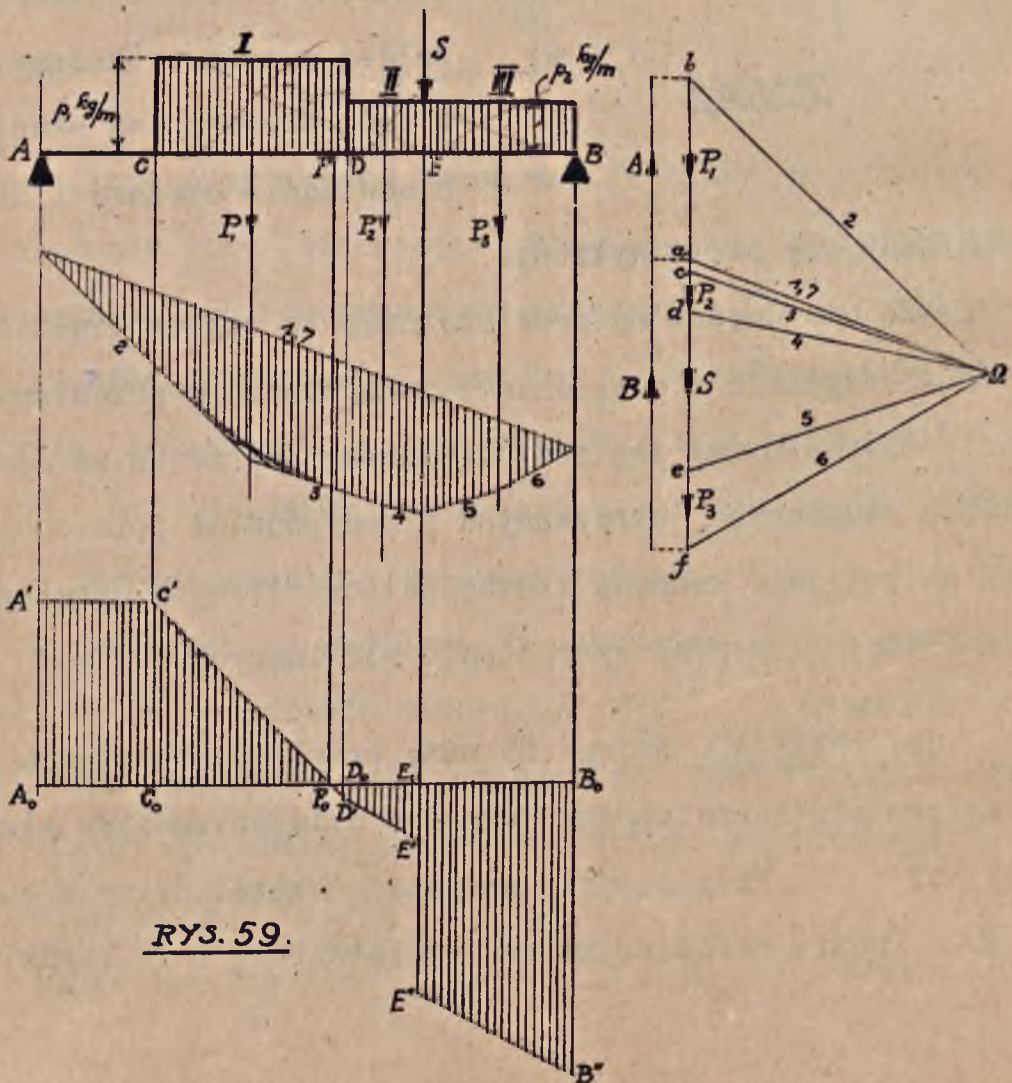
niech budujemy nasze wykresy. O ile owe części są prostokątami, to wykres momentów trzeba uzupełnić odpowiednimi parabolami; w przeciwnym razie zadawaliśmy się przybliżeniem, poprzestając na siłach skupionych, otrzymanych przez podział pola obciążeń na możliwie znaczną liczbę pól cząstkowych. Analogicznie postępujemy przy wykreślaniu sił tnących.

63. PRZYKŁAD. Na rys. 59 mamy przykład obciążenia ciągłego niejednostajnego wespół z działaniem siły skupionej S . Podział pola obciążeń uskuteczniamy w punktach D /gdzie zachodzi zmiana obciążenia/, i E , gdzie jest

przyłożona siła skupiona S , a dalej postępujemy w sposób, wskazany w par. poprzednim.

Wykres siły tnącej, otrzymany od obciążenia I, tworzy prosta $C'D'$, której pochyłość wyznacza obciążenie jednostkowe p_1 kg/m. Pochyłość prostych $D'E'$ i $E''B''$, odpowiadających obciążeniom II i III jest inna; wyznaczamy ją z obciążenia jednostkowego p_2 kg/m.

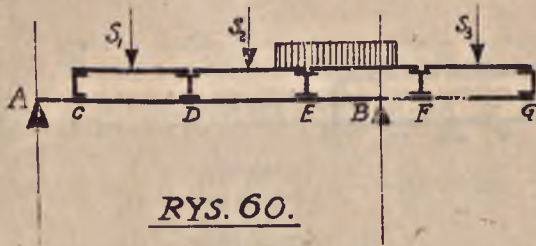
Odcinek $E'E''$ jest równy sile S , a o ile wykres był prawidłowo wykonany, powinno być $B''B_0 = B - f\bar{a}$ / w wieloboku sił/.



RYS. 59.

B. OBCIĄŻENIE POŚREDNIE.

64. Dotychczas rozważaliśmy te przypadki, w których na belkę, podpartą w dwóch punktach, działają siły, przyłożone bezpośrednio do belki.



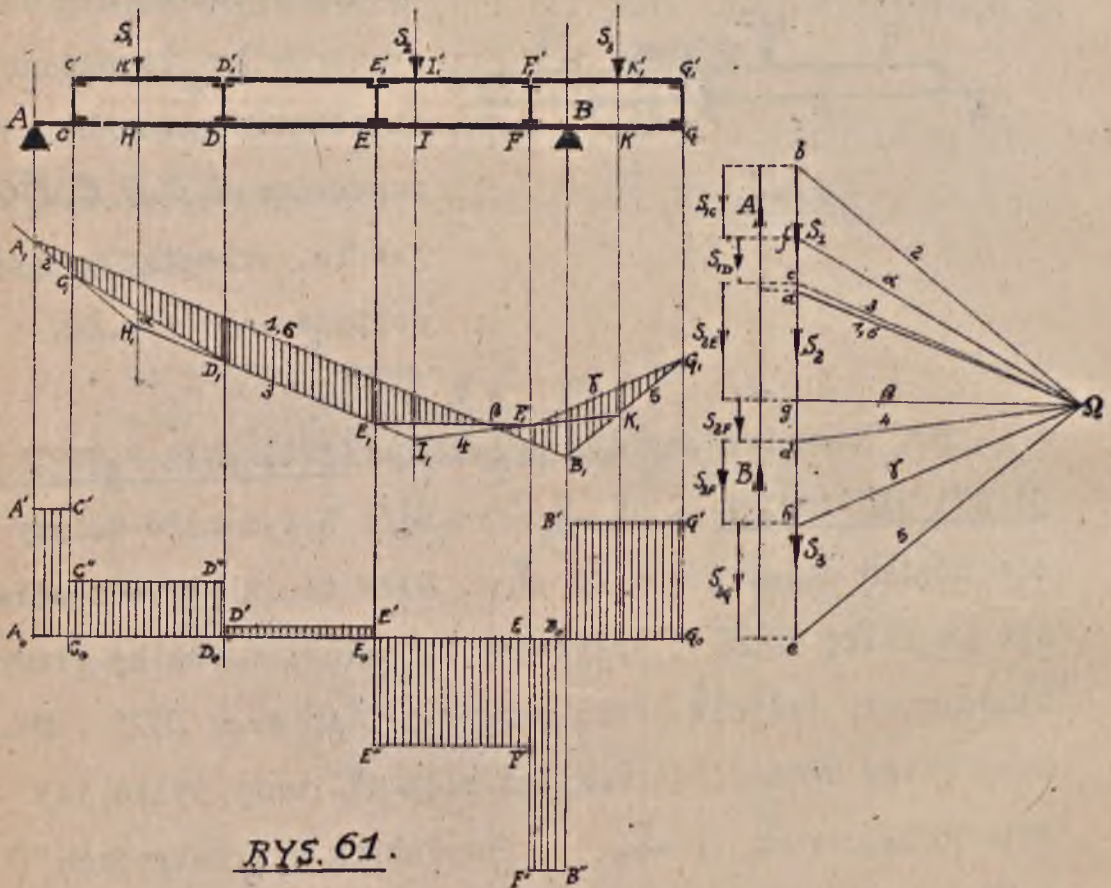
Teraz zbadamy przypadek, gdy obciążenie działa na belkę, rozważaną za pośrednictwem beleczek poprzecznych C, D, E, F, G, \dots , jak to, zresztą, wyjaśnia dostatecznie rys.60.

65. Rozpatrujemy dla przykładu OBCIĄŻENIE POŚREDNIE SIŁAMI SKUPIONEMI S_1, S_2, S_3 /rys.61/. W tym celu badamy z początku działanie siły S_1 . Siła ta działa bezpośrednio na belkę $C'D'$, wpływ jej natomiast na belkę główną AB ujawnia się jedynie przez podpórki $C C'$ oraz DD' . Możemy zatem uważać, że zamiast siły S_1 mamy tylko jej dwie składowe S_{1C} i S_{1D} , przyłożone w przekrojach C i D belki AB . Składowe te znajdziemy łatwo zapomocą wieloboku sił i sznurowego, o bokach 2, 3, α , przy czem α oznacza bok zamykający.

Podobnie rozkładamy siłę S_2 na dwie składowe, działające w punktach E i F . Posiłkujemy się przytem rozpoczętymi poprzednio wielobokami; tak więc za bok przed siłą S_2 uważamy bok 3, kreślimy promień 4 oraz odpowia-

dający mu bok 4, a wreszcie budujemy bok zamykający β .
 Promień β podzieli nam S_2 na szukane dwie składowe S_{2E}
 i S_{2F} .

Zupełnie tak samo postępujemy z siłą S_3 , rozkłada-
 jąc ją na składowe S_{3F} i S_{3G} . Przytem bokiem przed siłą S_3
 jest bok 4, bokiem za siłą - bok 5, zaś bokiem zamykają-



RYS. 61.

cym - bok γ .

Kiedy we wskazany sposób rozłożyliśmy siły S_1, S_2, S_3 , mo-
 żemy zagadnienie nasze tak przedstawić: należy wykreślić
 pole momentów gnących oraz linię sił poprzecznych dla
 belki AB , obciążonej BEZPOŚREDNIO siłami: 1/ S_{1C} w prze-
 kroju C , 2/ S_{1D} - w D , 3/ S_{2E} - w E ; 4/ S_{2F} i S_{3F}

- w F , oraz 5/ S_{3G} — w G .

Widzimy więc, że zadanie nasze sprowadziliśmy do rozwiązanego w § 56. Należy tylko skorzystać z wykonanej dotychczas budowy.

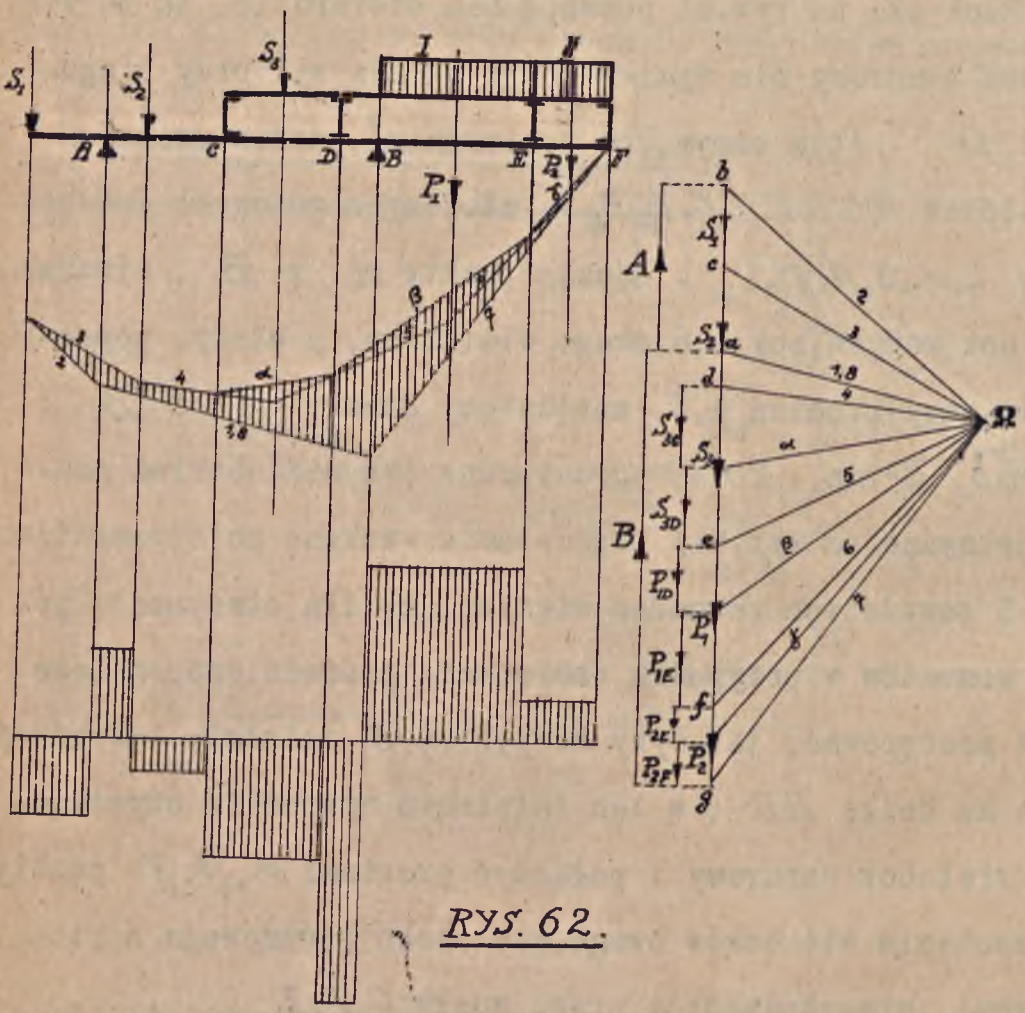
Rzut oka na rys.61 pozwala nam stwierdzić, że za wielobok sznurowy dla wymienionego układu sił przy biegunie \mathcal{O} /tym samym, co poprzednio/, można uważać wielobok $A, C, D, E, F, G, B_1, A_1$, złożony z gotowych już boków $2, \alpha, 3, \beta, \gamma, 5$. Łącząc punkty A_1 z B_1 , otrzymamy bok zamykający 1,6 owego wieloboku, a wtedy, poprowadziwszy promień 1,6, znajdziemy odpory A i B : $A = \bar{a}b$, $B = \bar{e}a$. Pole, ograniczone tym wielobokiem /zakreskowane na rys.61/ przedstawia szukane pole momentów.

Z powyższych rozważań widzimy, że dla otrzymania pola momentów w przypadku obciążenia pośredniego, należy tak postępować, jakgdyby siły S_1, S_2, S_3 działały bezpośrednio na belkę AB ; w tem założeniu wykreślić odpowiedni wielobok sznurowy i połączyć prostymi α, β, γ punkty przecięcia się boków owego wieloboku sznurowego z pionowami, przechodzącymi przez węzły C, D, E, \dots

66. Wykres sił tnących otrzymamy tak samo, jak w § 59 , pamiętając wciąż o tem, że nie mają dla nas znaczenia istotnie działające siły S_1, S_2, S_3 , a tylko ich składowe w punktach oparcia beleczek CC', DD', \dots

67. SIŁY CIĄGŁE. Rozumowania nasze dla obciążenia

ciągłego będą zupełnie podobne do przytoczonych w par. 65 i 66. Wyjaśnia je przykład, rozwiązany na rys. 62. Mamy tu jednocześnie do czynienia z siłami skupionymi S_1, S_2, S_3 oraz z siłą ciągłą P . Z tych dwie pierwsze działają bezpośrednio, dwie pozostałe - pośrednio.



RYS. 62.

Wykreślamy naprzód wieloboki sił i sznurowy dla sił S_1, S_2 przy dowolnym biegunie Ω ; odpowiednie promienie i boki są: 2, 3, 4. Następnie rozkładamy siłę S_3 na dwie składowe S_{3C} i S_{3D} , o pionowych liniach działania, przecho-

dających przez C i D . Robimy to za pomocą sposobu, wyłożonego w par.65, korzystając przytem z tego samego bieguna Ω i z boku 4 - jako boku przed siłą S_3 . Bok zamykający oznaczony jest na rys.62 przez α .

Dalej dzielimy obciążenie ciągłe P na dwie części, prowadząc linię podziału przez podpórkę E ; zastępcze siły skupione są P_1 i P_2 ; rozłożymy każdą z nich na składowe P_{1D} , P_{1E} i P_{2E} , P_{2F} , przyczem postępujemy tak samo, jak w przypadku obciążenia skupionego. Rozkład ten wykonywamy za pomocą dalszego ciągu wieloboku sznurowego, rozpoczętego poprzednio. Wypadnie tylko dobudować do niego nowe boki 5, 6, 7 oraz boki zamykające β, γ .

Tak więc możemy w danym razie uważać, że belka AB jest obciążona bezpośrednio siłami $S_1, S_2, S_{3C}, S_{3D}, P_{1D}, P_{1E}, P_{2E}, P_{2F}$; dla nich trzeba wyznaczyć wielobok sznurowy. Oczywiście jest nim 1, 2, 3, 4, α , β , γ , 7, 8, przyczem 1, 8 oznacza bok zamykający, który pozwoli określić odpory A i B . Pole, ograniczone powyższym wielobokiem, jest szukanym polem momentów; na rysunku pole momentów dla belki ABF jest zakreskowane.

Sposób otrzymania wykresu sił poprzecznych nie wymaga bliższego omówienia, gdyż nie różni się on od tego sposobu, który przytaczaliśmy w par.66.

68. BELKI KONSOLOWE, znane również pod nazwą belek o podporach wiszących, belek rozciętych, belek Gerbera, belek wielopodporowych /podpór > 2 /.

Mówić tu będziemy tylko o belkach statycznie wyznaczalnych, poddanych działaniu sił, znajdujących się we wspólnej z osią belki płaszczyźnie.

Aby lepiej zrozumieć cel i treść belek konsolowych, rozważmy zwykłą belkę, podpartą na dwóch podporach; siły niech będą dowolnie skierowane, byleby znajdowały się w jednej płaszczyźnie. Oddziaływania tych podpór wyznaczmy dokładnie wtedy, kiedy jedna z nich jest tego rodzaju, że może okazać odpór o ŚCIŚLE WYZNACZONYM KIERUNKU /naprz. przy podparciu belki na wałku, na wózku, lub na ostrzu/, druga zaś podpora powinna być wykonana na sposób przegubu, który może okazać odpór w DOWOLNYM KIERUNKU.

Dla ułatwienia dalszych rozumowań nazwijmy podpory o ściśle wyznaczonym kierunku działania - PODPORAMI 1-go RODZAJU, zaś podpory, oddziaływujące w dowolnym kierunku, PODPORAMI 2-go RODZAJU.

Wykreślnie już wiemy, jak wyznaczać w poprzednim przykładzie odpory; wiemy również, że odpowiedź będzie tylko jedna /porównaj §56 /.

Analitycznie sprawa powyższa da się wyjaśnić w następujący sposób. Podpora 1-go rodzaju daje się zastąpić jedną siłą o określonej linii działania /rys.63 - podpora *B* /; podpora 2-go rodzaju może być zastąpiona dwiema siłami z obranymi linjami działania /rys.63 - podpora *A* /. Na belkę, o której poprzednio mówiliśmy, działają prócz



RYS. 63.

danych sił zewnętrznych jeszcze 3 siły odporowe ; siły te co do wartości są nam nieznane. Mamy więc 3 niewiadome. Do wyznaczenia tych niewiadomych potrzeba trzech równań, które otrzymamy z 3 warunków równowagi belki, poddanej działaniu sił zadanych i odporów. Z tych właśnie równań znajdziemy niewiadome odpozy.

69. Gdybyśmy belkę, o której poprzednio była mowa, podparli nie w dwóch, lecz w trzech punktach, lub w większej ich liczbie, albo dali choćby dwie podpory, lecz obie drugiego rodzaju, wówczas ściśle określenie odporów droga statyki będzie niewykonalne. Belka taka będzie statycznie niewyznaczalna, gdyż więcej mamy niewiadomych niż równań. Aby nieokreśloność odporów usunąć, przecinamy belkę taką na pewną liczbę części i w odpowiedni sposób ustawiamy jedne części na zadanych podporach, STAŁYCH, inne zaś części belki opieramy na zwieszających się końcach takich części; te ostatnie podpory nazwiemy WISZĄCEM. Podpory wiszące mogą być wykonane zarówno jako podpory 1-go lub 2-go rodzaju.

Poznajmy zależność pomiędzy liczbą podpór stałych i liczbą podpór wiszacych, jeśli belka ma być statycznie wyznaczalna. Niech, dajmy nam to, będzie S podpór sta-

łych, w tem S_1 podpór 1-go rodzaju i S_2 - 2-go rodzaju, oraz w podpór wiszących, w tem w_1 pierwszego rodzaju i w_2 - drugiego rodzaju. Jeśli jest w podpór wiszących, zatem cała belka jest w w miejscach przecięta na $(w+1)$ części

Niewiadomych sił /zastępujących działania podpór/ będzie, zgodnie z poprzednim, S_1+2S_2 dla podpór stałych i w_1+2w_2 dla podpór wiszących, a razem

$$S_1+2S_2+w_1+2w_2.$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych należy skorzystać z warunków równowagi poszczególnych części belki.

Ponieważ tych części jest $w+1$, a dla każdej z nich możemy napisać 3 warunki równania—/suma rzutów na jedną oś. — na drugą oś i suma momentów statycznych/, więc razem ustawimy 3 $(w+1)$ równań.

Jeśli zadanie ma być określone, powinien istnieć związek: $S_1+2S_2+w_1+2w_2=3(w+1)$ albo, po-

nieważ $w = w_1 + w_2$, więc

$$S_1+2S_2-2w_1-w_2=3.$$

Tak sprawa się przedstawia, jeśli na belkę działają siły, znajdujące się w jednej płaszczyźnie, lecz dowolnie skierowane.

70. Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy wszystkie siły są pionowe, jak to zazwyczaj mieć będziemy przy mostach;

również niech podpory 1-go rodzaju okazują oddziaływania w kierunku pionowym. Wówczas podpory 2-go rodzaju okażą odpory pionowe.

W takim razie każdy z odporów, niezależnie od rodzaju podpory, możemy zastąpić jedną tylko siłą pionową. Niewiadomych zatem będzie:

$$S_1 + S_2 + W_1 + W_2 = S + W.$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych możemy utworzyć po dwa równania dla każdej części belki /suma rzutów na oś pionową i suma momentów statycznych/. Ponieważ podpór wiszących jest w , zatem części będzie $w+1$ i równań niezależnych utworzymy $2(w+1)$. Jeśli więc belka ma być statycznie wyznaczalna, powinno być

$$S + W = 2(w+1), \quad \text{albo}$$

$$S - W = 2$$

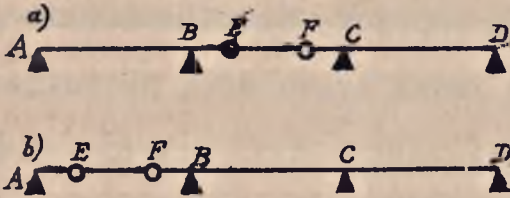
t.j. podpór stałych powinno być o dwie więcej, niż wiszących. Zaznaczyć tu trzeba, że warunek powyższy powinien być zachowany nie tylko dla całej belki, lecz dla każdej części, na które belka jest podzielona; przyczem w miejscu podpór wiszących należy przyłożyć odpowiednie siły zewnętrzne.

71. Wyjaśnimy powyższe na przykładach.

Rozpatrzmy belki, przedstawione na rys. 64.

Dla pierwszej z nich $s=4$, /A, B, C, D/ $w=2$ /E, F/.

więc $s-w=2$; dla części AE mamy $s=2$ /A i B/; $w=0$,
 więc $s-w=2$ i t.d. Z tego wynika, że belka /a/ jest sta-
 tycznie wyznaczalna.



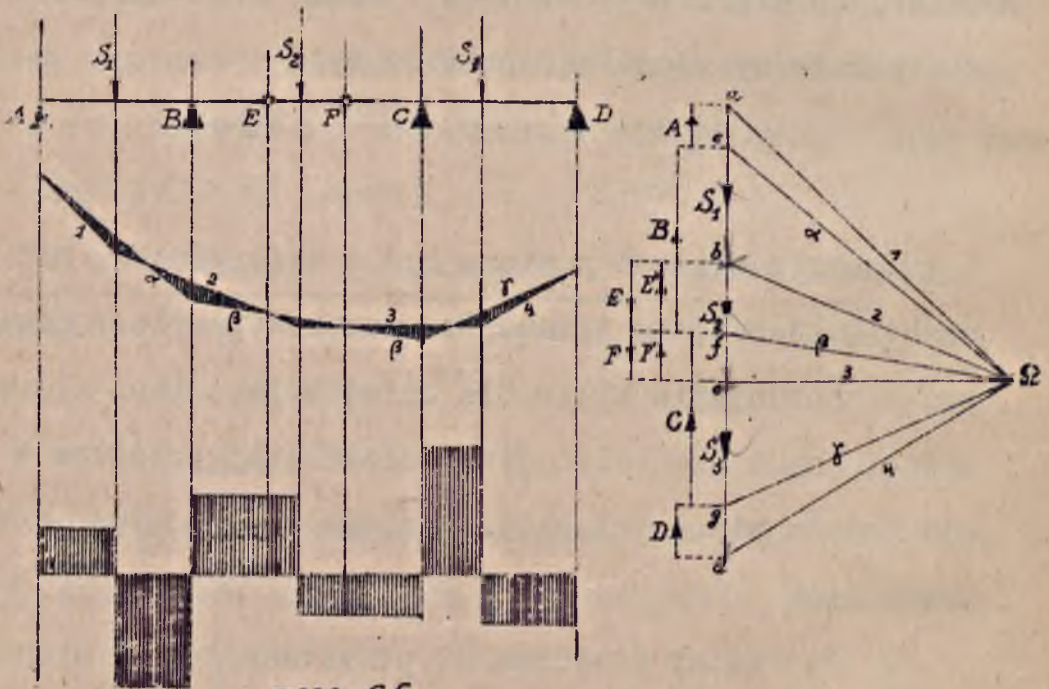
Dla belki drugiej /b/
 mamy $s=4$, $w=2$, $s-w=2$;
 lecz dla części AF: $s=1$,
 $w=1$; $s-w=0$; tak samo

RYS. 64.

dla części FD $s=3$, $w=0$; $s-w=3$.

Belka /b/ jest więc statycznie niewyznaczalna.

72. Pole momentów dla belki konsolowej. Dla przykładu
 rozpatrzmy belkę, przedstawioną na rys. 65, obciążoną si-



RYS. 65.

łami pionowymi S_1, S_2, S_3 Belka składa się z trzech cze.

ści, spoczywających na czterech podporach stałych:

A, B, C i D i dwóch podporach wiszących E i F.

Rozpatrzmy część belki EF, wspartą na wiszących podporach wraz z siłami do niej przyłożonemi. Jeśli jedna z tych podpór jest 1-go rodzaju /§ 68/, a oddziaływanie jej będzie pionowe, wówczas obydwaj odpory będą pionowe, gdyż siły zewnętrzne, obciążające daną belkę, mają kierunek pionowy. Aby znaleźć odpory należy wykreślić dla siły S_2 wielobok sił oraz odpowiedni wielobok sznurowy /z bokami 2, 3/; następnie należy połączyć punkty przecięcia się boków skrajnych /2 i 3/ wieloboku sznurowego z linjami działania odporów E i F linią prostą, otrzymamy bok zamykający β . Równoległy do tego boku promień β podzieli siłę S_2 na dwie: $\overline{fb} = E'$ i $\overline{cf} = F'$. Odpory te idą z dołu do góry.

Przechodzimy następnie do jednej z belek skrajnych, naprz. do belki lewej. Na belkę tę, podpartą w punktach A i B, działają siły: S_1 i nacisk końca belki EF; nacisk ten = poprzednio znalezionemu odporowi E' , skierowany jest z góry na dół i w wieloboku sił może być przedstawiony odcinkiem $bf = E$.

Zatem na belkę AB działają siły S_1 , E oraz odpory nieznanne A i B. Aby znaleźć odpory, postępujemy w sposób, we właściwym miejscu wyjaśniony. Ustawiamy siły w

szereg, w którym niewiadome staną po brzegach szeregu:

A, S_2, E, B . Siły S_2 i E w wieloboku sił już są zaznaczone. Prowadzimy promienie w wieloboku sił i boki wieloboku sznurowego w takim porządku: za siłą A i przed siłą S_2 /do punktu a / - promień i bok 1; za siłą S_2 i przed siłą E /do punktu b / - promień i bok 2; za siłą E i przed siłą B /do punktu f / - promień i bok β . Zauważyć tu należy, że zarówno w wieloboku sił, jak i w wieloboku sznurowym - podczas rozpatrywania belki EF - były już wykreślone promienie i boki 2 i β ; teraz dodaliśmy tylko promień i bok 1.

Następnie przez punkt przecięcia się boku 1 z linią działania odporu A i przez punkt przecięcia się boku β z linią działania odporu B prowadzimy bok α , który będzie bokiem zamykającym. Promień α , równoległy do boku α , w wieloboku sił daje nam punkt e , który będzie początkiem siły A i końcem B . Stąd znajdziemy: odpór

$A = \vec{ea}$, odpór $B = \vec{fe}$. Jednocześnie widzimy, że wielobok sił jest $abfea$ oraz że wielobok sznurowy tworzą boki: 1, 2, β , α .

Zupełnie w ten sam sposób rozpatrzemy belkę prawą FD : na nią działają siły S_3 , w końcu F siła $F = \vec{fc}$ /w wieloboku sił/ oraz odpory C i D . Skorzystamy z gotowych już promieni i boków i po dopełnieniu promienia-
mi i bokami 4, γ otrzymamy: odpór $C = \vec{gf}$, odpór

$D = \overline{dg}$, wielobok sił $fedgf$, oraz wielobok sznurowy, utworzony z boków: β , 3, 4, γ ; γ jest tu bokiem zamykającym.

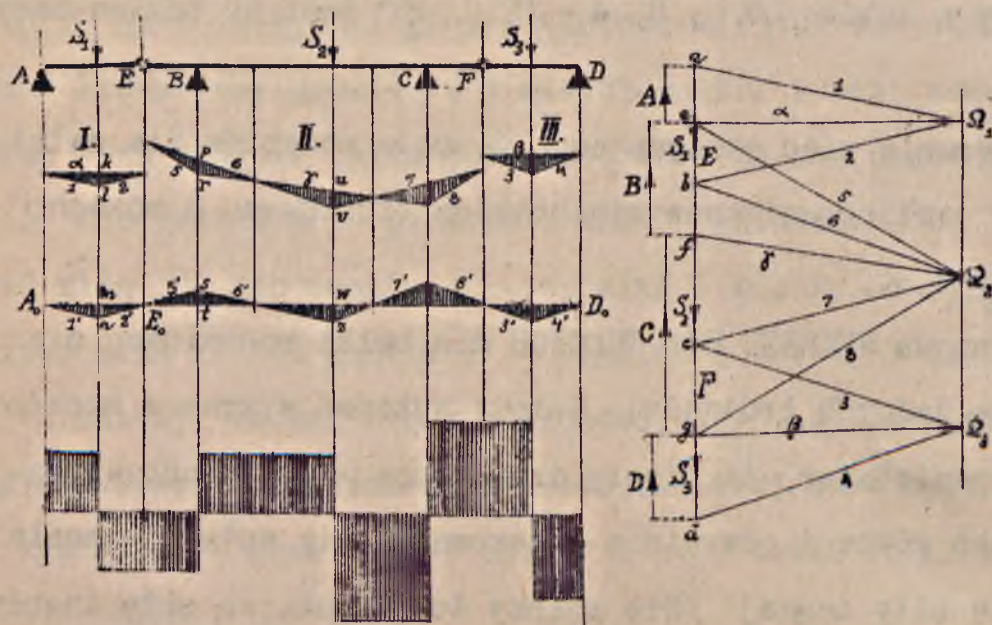
Ostatecznie więc otrzymujemy, że pole momentów dla całej belki AD jest ograniczone wielobokiem sznurowym, o bokach 1, 2, 3, 4, γ , β , α .

73. Budowa WYKRESU SIŁ TNĄCYCH dla belki konsolowej nie nastęrcza żadnych trudności. Należy wykonać wykres w sposób zwykły, pamiętając, że odpory działające w podporach wiszących, jako równe i odwrotnie skierowane, nie wpływają wcale na zmianę siły tnącej. /Nie znaczy to jednak, że siły tnące nie zależą od owych podpór; tak nie jest, można dostrzedz bowiem łatwo, że odpory A, B, C, D, są zależne od rozstawienia podpór wiszących, a od oddziaływań tych zależą znowu siły tnące/.

74. INNY SPOSÓB wykreślenia pola momentów: na przykładzie par. poprzedzającego dostrzegamy, że, obierając dla wszystkich części belki przegubowej wspólny biegun Ω , otrzymujemy wielobok sił o promieniach tworzących ze sobą bardzo ostre kąty, co może spowodować niedokładności przy obliczaniu momentów gnących z wieloboku sznurowego.

Niedogodności tej unikniemy, gdy dla każdej części belki konsolowej obierzemy inny biegun, korzystając zresztą wciąż z tego samego wieloboku sił. Otrzymamy wtedy dla każdej czę-

ści cełki wielobok sznurowy, niezależny od innych wielo-



RYS. 66.

boków. Aby jednak każdy z tych wieloboków dawał wartości momentów gnących w tej samej skali, należy obrać bieguny na jednej prostej, równoległej do linii sił /odległość biegunowa jest wtedy jednakowa dla wszystkich wieloboków/.

Na rys.66 mamy przykład, rozwiązany w sposób powyższy. Rozważania zaczynamy od belek skrajnych AE i FD, gdy mamy w nich tylko po dwie niewiadome, mianowicie po jednym oddziaływaniu stałej podpory i po jednym - wiszącej podpory.

Dla belki AE obieramy biegun Ω_1 i znanym sposobem znajdujemy opory $A = \bar{e}\bar{a}$ i $E = \bar{b}\bar{e}$. Potem przechodzimy do belki FD: odmierzamy na linii sił odcinek $bc = S_2$ a dalej $cd = S_3$; następnie obieramy biegun Ω_3 i znowu

sposobem znanym wyznaczamy siły $D = \bar{d}g$ i $F = \bar{g}c$.

Wreszcie rozpatrujemy belkę środkową EF. Robimy to, obrawszy biegun Ω_2 , pomiędzy Ω_1 i Ω_3 . Podobnie, jak poprzednio, znajdziemy jedyne dwa niewiadome-odpory B i C. Pola momentów dla poszczególnych części belek są: dla belki AE - pole I, dla belki EF - pole II, dla belki FD - pole III. Aby dogodniej było korzystać z pól momentów, sprowadzamy je często do jednej osi. Wówczas postępujemy tak:

Prowadzimy prostą A_0D_0 , równoległą do osi belki, i od punktów przecięcia się jej z linjami działania sił i linjami podpór odmierzamy odpowiednie wartości momentów, odczytane z pól I, II, III. Tak np. w przekroju, na który działa siła S_1 , mamy moment gnący $= kl$, odcinamy więc od osi A_0D_0 $mn = kl$. Tak samo $st = pr$, $wz = uv$ i t.d. Łącząc ze sobą prostymi znalezione w ten sposób punkty

A_0, n, E_0, s, z, \dots , otrzymamy wielobok, który ogranicza pole momentów, sprowadzone do osi A_0D_0 .

Wykres sił tnących wyznaczamy tak samo, jak w § 73.

ROZDZIAŁ IV.

ŚRODEK SIŁ I ŚRODEK CIĘŻKOŚCI.

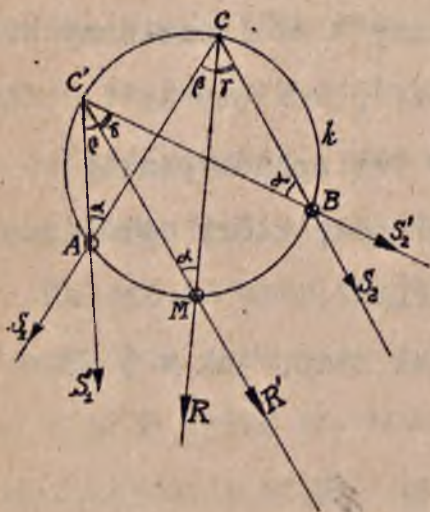
75. ŚRODEK DWUCH SIŁ. Przypuśćmy, że do punktów A i B dowolnego ciała sztywnego są przyłożone dwie siły S_1, S_2 . Niech siły te będą jakiegokolwiek, byleby tylko leżały w jednej

płaszczyźnie. Znajdźmy ich wypadkową.

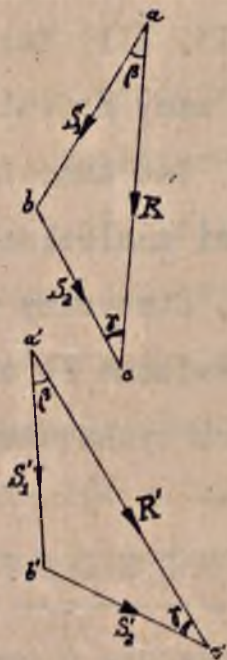
Zapomocą wieloboku sił abc znajdujemy wartość wypadkowej $R = \bar{ac}$; linja działania wypadkowej, jest, oczywiście, równoległa do \bar{ac} i przechodzi przez punkt C przecięcia się linij działania sił składowych.

Poprowadźmy teraz okrąg koła k przez punkty A, B i C. Punkt, w którym okrąg koła będzie przecięty linją działania wypadkowej R, oznaczmy przez M.

Dowiędziemy, że GDY SIŁY S_1 i S_2 OBRÓCĄ SIĘ OKOŁO PUNKTÓW A i B O JEDNAKOWE KĄTY W JEDNĄ I TĘ SAMĄ STRONĘ, TO ICH WYPADKOWA R WYKONA OBRÓT O TAKIŻ SAM KĄT I W TĘ SAMĄ STRONĘ OKOŁO PUNKTU M.



RYS. 67.



Aby tego dowieść, zwróćmy uwagę na to, że przy wskazanym obrocie ani wartości sił S_1 i S_2 , ani kąt, zawarty między nie-

mi, zmianie nie ulegają, a zatem nie zmienia się również pod względem wartości wypadkowa R, nie zmienia się też kąty pomiędzy tą wypadkową a siłami składowymi

Widać to wprost z wieloboku sił $a'b'c'$, który możemy

wykreślić dla nowego położenia sił S_1' i S_2' . Wynika stąd także, że jeśli siły S_1, S_2 zostały odchylone o kąt α , to również i wypadkowa R' odchyli się, tworząc ze swym położeniem pierwotnym także sam kąt α . Trzeba jeszcze tylko dowieść, że wypadkowa R' przechodzi przez punkt M , znaleziony na okręgu koła.

W tym celu zbadajmy, gdzie będzie po obrocie sił punkt C' przecięcia się linii działania sił składowych. Rozumujemy tak: kąty ACB i $AC'B$ powinny być podczas obrotu boków wciąż równe, zatem punkt C musi znajdować się na okręgu koła k , przechodzącym przez punkty A, B, C . Następnie powiemy: ponieważ kąt ACM równa się kątowi $AC'M$ i ponieważ wierzchołek kąta C posuwa się po okręgu koła k , więc i punkt M otrzymany jako przecięcie się R' z R będzie leżał na okręgu tego samego koła k . Wi-
dzimy więc, że punkt, oznaczony poprzednio przez M , jest środkiem obrotu wypadkowej R . Punkt ten nazwiemy ŚRODKIEM SIŁ S_1 i S_2 .

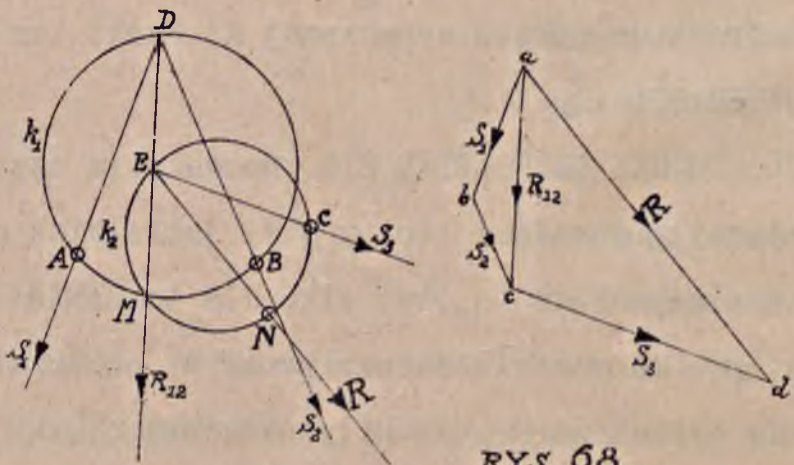
76. ŚRODEK ILUKOLWIEK SIŁ. Rozważania nasze będą się tyczyły dowolnej liczby sił, jakkolwiek prowadzić je będziemy dla p...oty tylko dla trzech sił S_1, S_2, S_3 . /rys.68/. Mamy znaleźć taki punkt N , około którego obra-
ca się wypadkowa R , gdy siły składowe S_1, S_2, S_3 wykony-
wują obroty o jednakowe kąty i w tę samą stronę około

swych punktów przyłożenia A, B, C.

Punkt ten zwać będziemy, jak poprzednio, ŚRODKIEM SIŁ S_1, S_2, S_3 .

Znajdujemy naprzód środek sił S_1, S_2 . Przedewszystkiem wyznaczamy punkt D, w którym przecinają się siły S_1 i S_2 ; następnie wykreślamy wypadkową R_{12} z wieloboku abc ; zataczamy przez punkty A, B, D okrąg koła k_1 i przez D prowadzimy równoległą do R_{12} ; przecięcie się linii działania R_{12} z owym okręgiem daje szukany środek sił S_1 i S_2 w punkcie M.

Możemy teraz przyjąć, że mamy już tylko dwie siły: R_{12} i S_3 ; środek tych dwóch sił jest jednocześnie środkiem sił S_1, S_2, S_3 . Znajdziemy go jak poprzednio: wyznaczamy wypadkową R sił R_{12} i S_3 z wieloboku acd ; przez punkty M, C, E zataczamy okrąg koła k_2 ; wreszcie kreślimy przez



RYS. 68.

z równoległą do R ; przecięcie się tej równoległej z okręgiem koła K_2 daje nam szukany środek N sił S_1, S_2, S_3 .

Gdy chodzi o środek większej liczby sił, to postępujemy zupełnie tak samo, jak poprzednio: wyznaczamy środek dowolnych dwóch sił z danego układu, następnie środek wypadkowej tych dwóch oraz jakiegokolwiek trzeciej, potem środek wypadkowej trzech poprzednich i dowolnej czwartej i t.d.

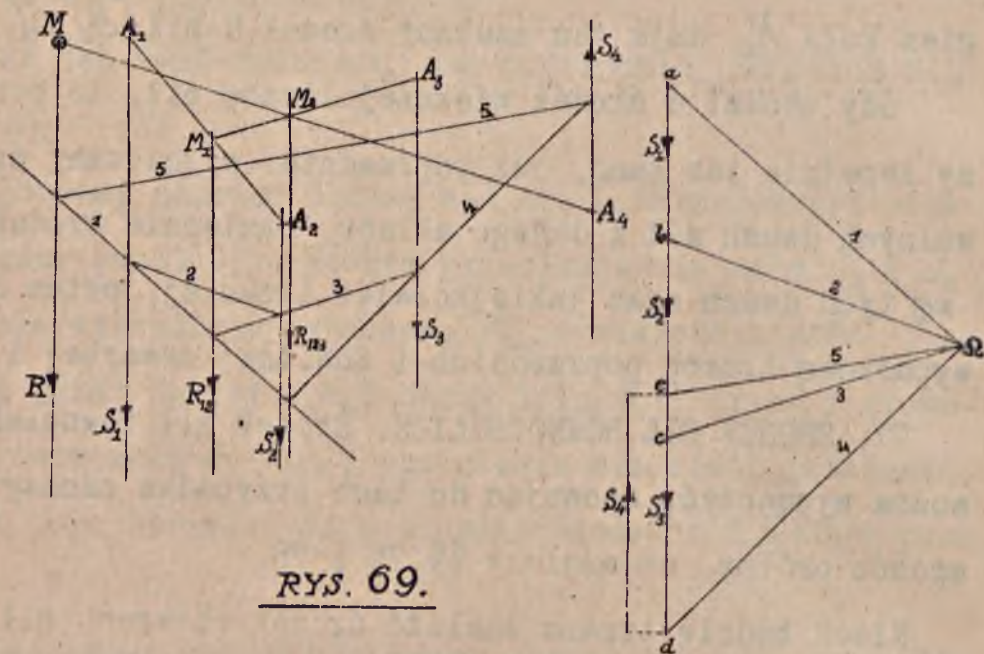
77. ŚRODEK SIŁ RÓWNOLEGLYCH. Środek sił równoległych można wyznaczyć, stosując do tego przypadku szczególnego sposób ogólny, objaśniony §§ 75 i 76.

Niech będzie trzeba znaleźć środek czterech sił równoległych S_1, S_2, S_3, S_4 , przyłożonych odpowiednio do punktów A_1, A_2, A_3, A_4 /rys. 69/.

Wyznaczymy najprzód środek sił S_1 i S_2 . W tym celu zataczamy okrąg koła przez punkty A_1 i A_2 oraz przez punkt przecięcia się linii działania tych dwóch sił, czyli przez punkt znajdujący się nieskończenie daleko. Zatem będzie to okrąg koła, którego promień jest nieskończenie wielki, zaś łuk koła między A_1 i A_2 staje się prostą A_1A_2 .

Następnie wyznaczamy wypadkową R_{12} sił S_1 i S_2 . Uskuteczniamy to za pomocą wieloboku sił oraz wieloboku sznurkowego, przyczem budowę wieloboków prowadzimy odrazu dla wszystkich czterech sił, gdyż, jak później zobaczymy, przyda się to w następstwie.

Tak więc mamy już wypadkową R_{12} . Punkt M_1 przecięcia



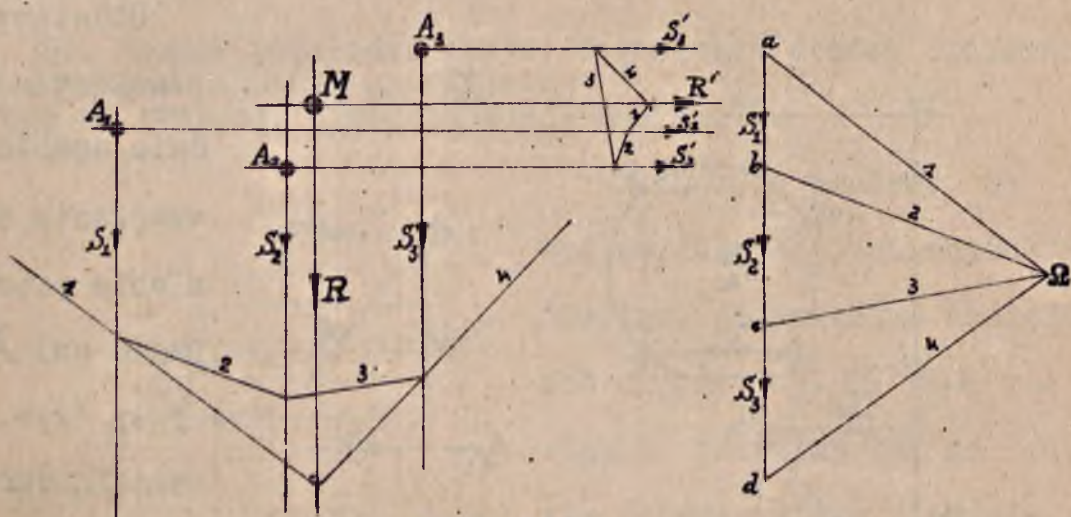
RYS. 69.

się wypadkowej R_{12} z prosta A_1A_2 jest środkiem sił S_1, S_2 . Dalej znajdujemy środek M_2 sił R_{12} i S_3 . Leży on z jednej strony na prostej M_1A_3 , z drugiej - na wypadkowej sił R_{12} i S_3 /czyli wypadkowej sił S_1, S_2, S_3 /. Wypadkową tę otrzymamy, korzystając z wykreślonego już wieloboku sznurowego. Wreszcie postępujemy tak samo z wypadkową R_{123} i z siłą S_4 . Punkt M przecięcia się wypadkowej R tych dwóch sił /albo S_1, S_2, S_3, S_4 / z prosta M_2A_4 jest szukanym środkiem danego układu. Opisany powyżej sposób wykreślania środka sił nadaje się do wszelkich sił równoległych, które niekoniecznie w jednej płaszczyźnie się znajdują.

78. INNY SPOSÓB. Środek sił równoległych można znaleźć łatwo innym jeszcze sposobem, wynikającym wprost z określe-

nia środka sił.

Zastosujemy ten sposób do sił S_1, S_2, S_3 /rys. 70/, przyłożonych do punktów A_1, A_2, A_3 .



RYS. 70.

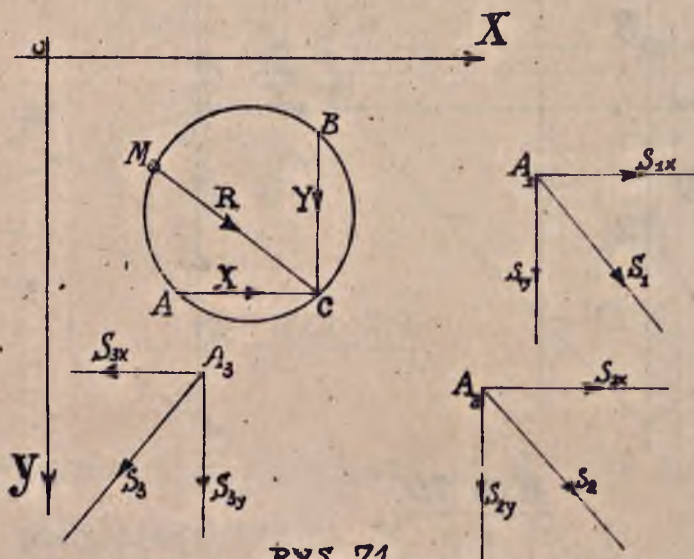
Wyznaczamy naprzód wypadkową R tych sił, posługując się przytem wielobokiem sił i wielobokiem sznurowym. Następnie obracamy wszystkie siły składowe około ich punktów przyłożenia o 90° i wyznaczamy ich wypadkową R' w tem nowem położeniu. Punkt M przecięcia się wypadkowej R , znalezionej poprzednio z wyznaczoną obecnie R' jest, w myśl określenia, szukanym środkiem sił.

Przy wykreślaniu nowego wieloboku sznurowego niema potrzeby wykreślać nowy wielobok sił; możemy posilkować się poprzednim wielobkiem, pamiętając tylko, że boki nowego wieloboku sznurowego powinny być prostopadłe do odpowied-

nich promieni wykreślonego wieloboku sił.

79. UWAGA DO § 76. W celu wyznaczenia środka dowolnej liczby danych sił, jakkolwiek w płaszczyźnie skierowanych, dogodnie jest nieraz stosować następujący sposób:

Obieramy w płaszczyźnie dwie dowolne, wzajemnie do siebie prostopadłe osi X i Y ; /rys. 71/; każdą z danych sił rozkładamy w kierunkach tych osi.



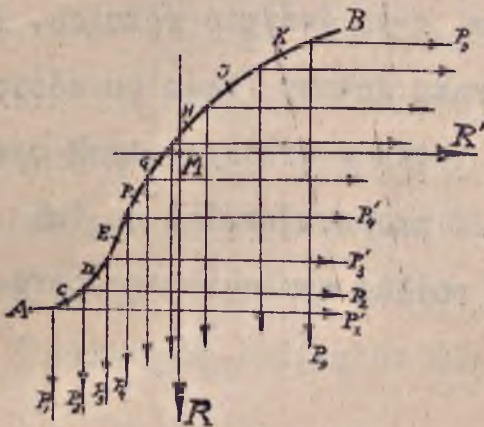
RYŚ. 71.

Następnie wyznaczamy wypadkowe obydwu grup sił, równoległych do każdej z osi oraz ich środki. Przypuśćmy, że są to siły X i Y ; środki ich niech będą w punktach A i B . Wypadkowe X i Y przecinają się w punkcie C . Otóż środek danego układu sił znajdziemy jako punkt przecięcia się okręgu koła, zatoczonego przez punkty A , B , C , z wypadkowa R sił X, Y .

80. ŚRODEK CIĘŻKOŚCI. Środkiem ciężkości jakiegokolwiek układu nazywamy ŚRODEK SIŁ CIĘŻKOŚCI, DZIAŁAJĄCYCH NA POSZCZEGÓLNE ELEMENTY TEGO UKŁADU, w założeniu, że układ ten jest ciężki.

Z określenia tego wynika, że do wyznaczenia środka ciężkości będziemy mogli stosować bezpośrednio rozważania par. 77 i 78.

81. Środek ciężkości linii. Wyznaczamy środek ciężkości łuku AB krzywej, przedstawionej na rys. 72.



RYŚ 72.

W tym celu uważamy, że wzdłuż łuku AB jest rozłożone dowolne, jednostajne obciążenie ciągłe, np. $p \text{ kg/m}$; następnie dzielimy łuk na szeregi części, które niewiele różnią się od odcinków prostej i w środku każdej z nich przykładamy siłę skupioną,

zastępującą obciążenie, które na nią przypada.

Tak więc

$$P_1 = p \cdot \overline{AC}$$

$$P_2 = p \cdot \overline{CD}$$

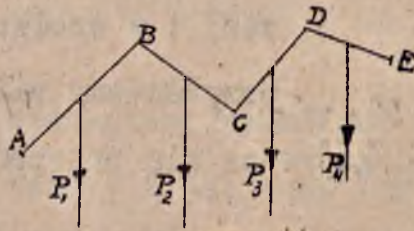
$$\dots \dots \dots P_n = p \cdot \overline{KB}$$

Następnie wyznaczamy za pomocą wieloboku sznarcowego wypadkową sił P_1, P_2, \dots . Przypuśćmy, że będzie nią siła R .

Obracamy teraz każdą z sił P_1, P_2, \dots około jej punktu przyłożenia o 90° i w tem nowym położeniu wyznaczamy wy-

padkową. Oznaczmy ją przez R' . Punkt M , w którym przecina się ona z wypadkową R jest, na zasadzie par.79, szukanym środkiem ciężkości.

82. Środek ciężkości linii łamanej. Aby wyznaczyć środek ciężkości linii łamanej ABCDE /rys.73/ postępujemy podobnie, jak w par.poprzedzającym, z tą jedynie różnicą, że podział linii na części mamy odrazu gotowy /będą to odcinki AB, BC,...../, wypadnie więc tylko w środkach tych części przyłożyć siły P_1, P_2, \dots , proporcjonalne do ich długości, poczem wykonać budowę podług wymienionego paragrafu.

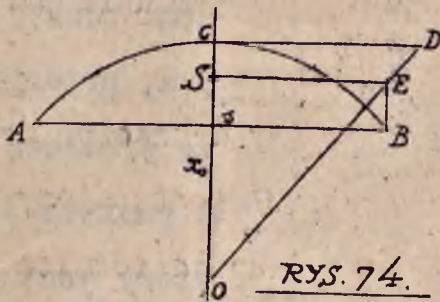


RYŚ. 73.

83. Środek ciężkości łuku koła /rys.74/ wyznaczamy wykreślnie, korzystając ze wzoru:

$$x_0 = \frac{r \cdot s}{l} \dots \dots \dots //$$

gdzie x_0 oznacza odległość szukanego środka ciężkości S od środka koła, r — promień koła, s — długość cięciwy rozważanego łuku, a l — długość tego łuku.



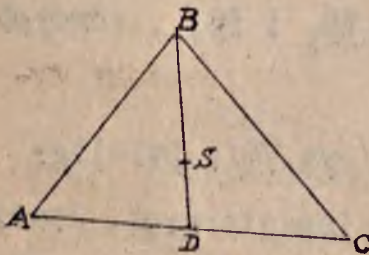
RYS. 74.

Aby znaleźć punkt S wykreślnie, odkładamy na stycznej do łuku w punkcie C odcinek CD równy $l/2$, łączymy punkt D ze środkiem O, a przez punkt B prowadzimy równoległą do OC. Z punktu E przecięcia

się prostych OD i BE prowadzimy równoległą do stycznej CD; w przecięciu z promieniem OC otrzymamy szukany środek ciężkości S.

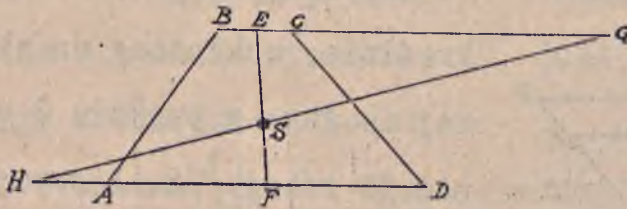
Z podobnych trójkątów OSE i OCD wypada wzór $l/3$.

84. Środek ciężkości pola trójkąta ABC /rys.75/ wyznaczamy, odmierzając na którejkolwiek środkowej /np. BD/ odcinek $BS = 2/3 BD$. Punkt S jest szukany środek ciężkości.

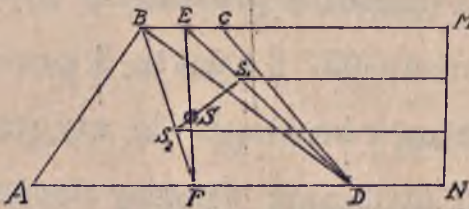


RYS. 75.

85. Środek ciężkości pola trapezu. Sposób 1-szy /rys.76/: przedłużamy podstawę BC w prawo i odmierzamy odcinek $GG = AD$, następnie przedłużamy podstawę AD w lewo i odmierzamy odcinek $AH = BC$. Prosta GH, łą-



RYS. 76.



RYS. 77.

cząca otrzymane
stąd punkty G
i H, przecina się
ze środkową EF
w punkcie S ,
który jest szuka-
nym środkiem cięż-
kości.

86. Sposób

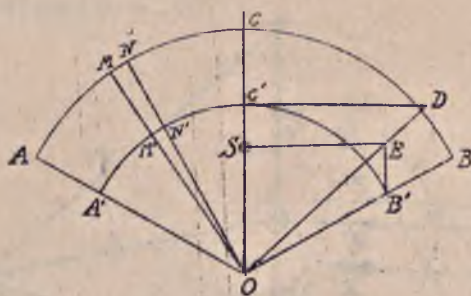
2-gi /rys.77/:

Dzielimy dany trapez na dwa trójkąty zapomocą przekątnej BD i wyznaczamy według par.84 środek ciężkości każdego z nich z osobna. W przecięciu się prostej $S_1 S_2$, łączącej te środki ciężkości ze środkową EF otrzymany szukany środek ciężkości trapezu S.

Wysokość MN, podzielona na 3 równe części ułatwia odmierzenie na środkowych ED i BF odcinków ES_1 i FS_2 , równych $\frac{1}{3}ED$ i $\frac{1}{3}BF$.

87. Środek ciężkości wycinka koła /rys.78/. Dzielimy dany wycinek ACBO na szereg wycinków elementarnych. Jednym z nich niech będzie OMN. Można uważać, że ciężar takiego wycinka, jako nieznacznie różniącego się od trójkąta, jest skupiony na łuku $M'N'$, odległym od łuku MN o $\frac{1}{3}$ promienia OM. To samo dotyczy każdego innego wycinka elementarnego,

$C'D = \text{łukowi } C'B'$



RYS. 78.

a z tego wynika, że można uważać, iż ciężar całego wycinka AOB jest skupiony na łuku A'C'B', o promieniu = $\frac{2}{3} OM$.

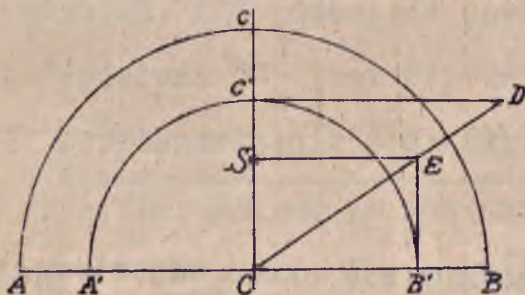
Oczywiście środek ciężkości /S/ łuku A'C'B' będzie jednocześnie środkiem

ciężkości danego wycinka. Zadanie nasze sprowadziliśmy więc do rozwiązane go już par. 83.

88. Podobnie postępujemy przy wyznaczeniu środka cięż-

kości półkola /rys. 79/.

$C'D = \text{łukowi } C'B'$

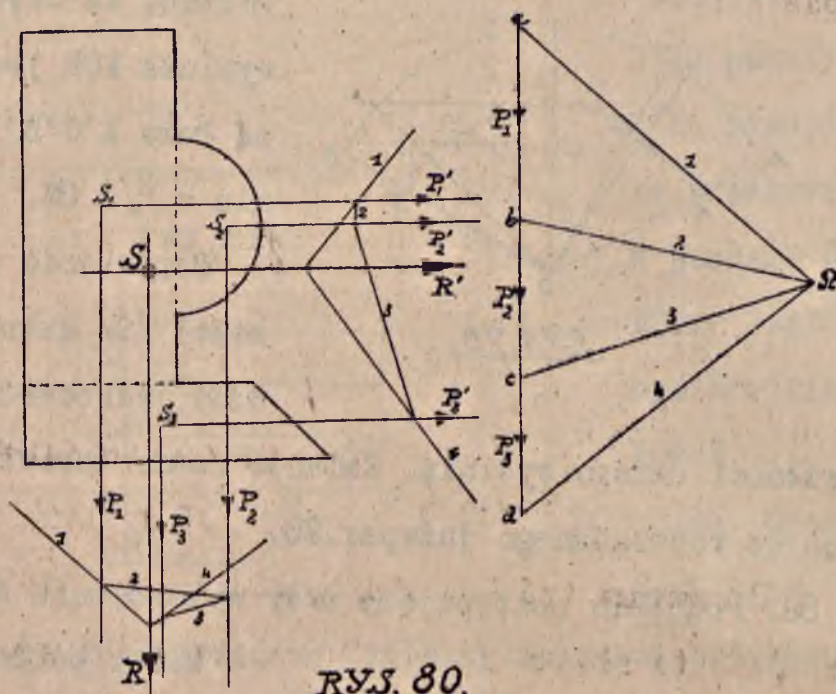


RYS. 79.

Jest to oczywiście szczególny przypadek zadania poprzedniego.

89. Środek ciężkości dowolnego pola płaskiego. Aby wyznaczyć środek ciężkości

pola, przedstawionego na rys. 80, dzielimy je na 3 części: prostokąt, trapez i półkole, wyznaczamy środek ciężkości każdej z nich i w środkach tych przykładamy siły równoległe, proporcjonalne do odpowiednich pól i wyznaczamy wypadkową /R/ tych sił.



RY.S. 80.

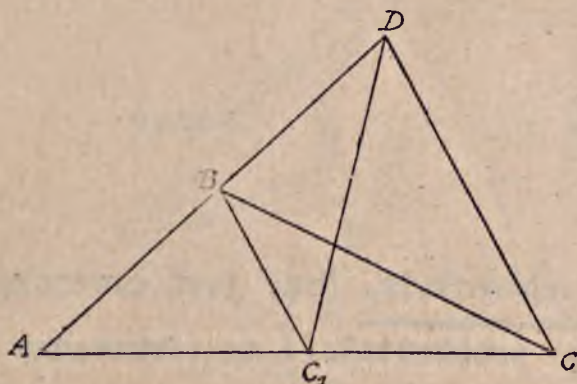
Następnie obracamy każdą z sił około odpowiedniego środka ciężkości o 90° i znowu wyznaczamy wypadkową R' . Punkt S przecięcia się wypadkowych R i R' jest szukanym środkiem ciężkości.

Zauważmy, że do wyznaczenia wypadkowej R' nie trzeba budować nowego wieloboku sił, należy tylko pamiętać, że promienie tego wieloboku są prostopadłe do odpowiednich promieni poprzedniego wieloboku sił, za pomocą którego wyznaczyliśmy wypadkową R .

90. Równoważność wieloboków. Przekształcanie wieloboków na równowazne im trójkąty znajduje częste zastosowanie przy rozwiązywaniu zagadnień statycznych. Z tego względu rozpatrujemy tu kilka ważniejszych przypadków tego przekształcenia, jakkolwiek sprawa ta należy do geometrii.

91. Przekształcenie trójkąta. Dany jest trójkąt ABC

/rys.81/; należy go przekształcić na równoważny mu trójkąt o podstawie = AC_1 .

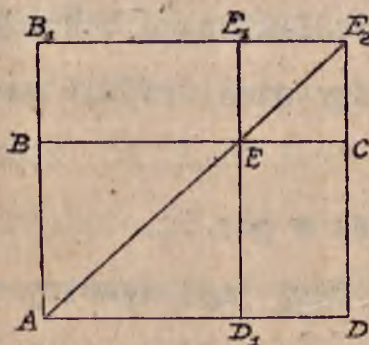


RYŚ. 81

W tym celu łączymy punkty B i C_1 i przez wierzchołek C prowadzimy prostą, równoległą do BC_1 . Punkt D przecięcia się tej prostej z przedłużeniem boku AB łączymy z punktem

C_1 . Otrzymamy trójkąt ADC_1 , który jest trójkątem szukanym. Jest to słusznem, gdyż trójkąty ABC i ADC_1 mają część ABC_1 wspólną, zaś pozostałe części: BCC_1 i BDC_1 mają pola równe /podstawa BC_1 jest wspólna, wysokości zaś równe/.

92. Przekształcenie prostokąta. Dany jest prostokąt ABCD /rys.82/; należy go przekształcić na równoważny mu



RYŚ. 82

prostokąt, którego jeden z boków = AD_1 .

W tym celu prowadzimy prostą D_1E , równoległą do AB; punkt E przecięcia się jej z bokiem BC łączymy z wierzchołkiem A.

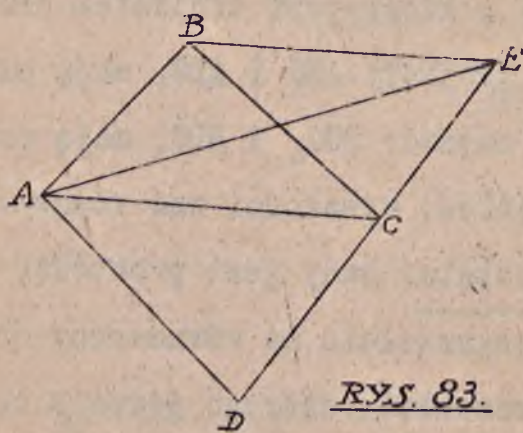
Przedłużamy następnie bok CD i prostą AE i przez punkt E_2 prze-

cięcia się ich prowadzimy prostą E_2B_1 równoległą do AD. Otrzymamy stąd prostokąt szukany $AD_1E_1B_1$. Jest to słuszne, gdyż

$$\frac{AD_1}{AD} = \frac{D_1E_1}{DE_2} = \frac{CD}{D_2E_2}, \quad \text{a więc}$$

$$AD \cdot CD = AD_1 \cdot D_1E_1.$$

93. Przekształcenie czworokąta. Dany jest czworokąt ABCD /rys.83/; należy go przekształcić na równoważny mu trójkąt, posiadający z tym czworokątem wspólny bok AD.



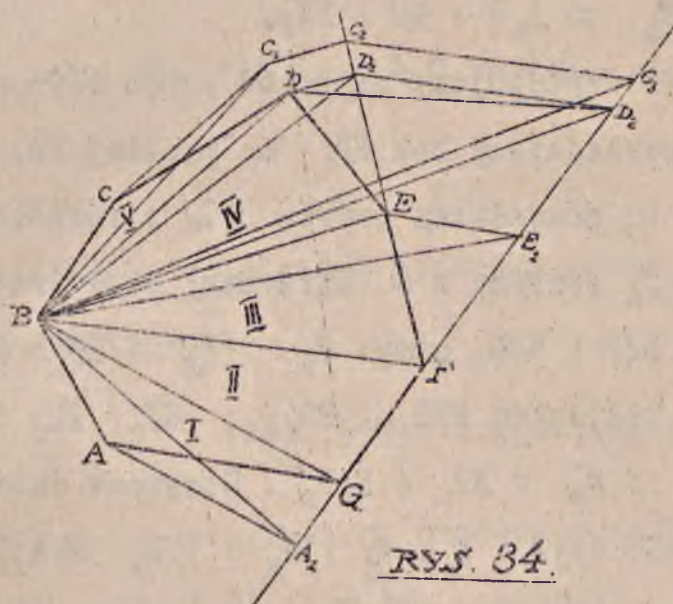
RYŚ. 83.

W tym celu dzielimy czworokąt na dwa trójkąty za pomocą przekątnej AC; przez wierzchołek B prowadzimy do niej równoległą, a punkt E przecięcia się tej równoległej z przedłużeniem boku CD

łączymy z wierzchołkiem A. Otrzymamy stąd trójkąt szukany ADE.

Dowieść tego można podobnie, jak w par.91.

94. Przekształcenie wieloboku. Dany jest dowolny wielobok ABCDEFG /rys.84/; należy go podzielić na szereg trójkątów, któreby miały wspólną wysokość, zaś podstawy niech będą na prostej GF.



W tym celu dzielimy dany wielobok na trójkąty za pomocą przekątni, wychodzących naprz. z wierzchołka B. Trójkąty te są oznaczone na rys. 84 przez I, II, III, IV, V, pola ich oznaczymy odpowiednio przez F_I , F_{II} , F_{III} , F_{IV} , F_V .

Trójkąt I przekształcimy, prowadząc prostą AA_1 równoległą do BG i łącząc punkty B i A_1 . Jest rzeczą oczywistą, że pole $\triangle A_1BG$ jest równe polu $\triangle AEG$, a więc $= F_I$.

Trójkąta II nie ma potrzeby przekształcać, gdyż odpowiada on wymaganym warunkom.

Trójkąt III przekształcimy podobnie, jak $\triangle I$: przez punkt E prowadzimy równoległą EE_1 do przekątni BF, po czym łączymy punkty B i E_1 . Trójkąt FBE_1 posiada takie

samo pole, jak $\triangle FBE$, a więc $= F_{\text{III}}$. Wobec tego mamy:
 $F_I : F_{\text{II}} : F_{\text{III}} = A_1G : GF : FE_1$.

Trójkąt IV zastępujemy najprzód przez równoważny trójkąt BED_1 , posiadający bok ED_1 na prostej FE . Następnie przez punkt D_1 prowadzimy prostą D_1D_2 , równoległą do EE_1 i punkt D_2 łączymy z B . Otrzymamy stąd trójkąt E_1BD_2 . Z trójkątów BEF i BED_1 mamy: $F_{\text{III}} : F_{\text{IV}} = EF : ED_1$, następnie z trójkątów FEE_1 i FD_1D_2 : $EF : ED_1 = FE_1 : E_1D_2$, zatem $F_{\text{III}} : F_{\text{IV}} = FE_1 : E_1D_2$. Stosunek ostatni razem z poprzednimi daje: $F_I : F_{\text{II}} : F_{\text{III}} : F_{\text{IV}} = A_1G : GF : FE_1 : E_1D_2$.

Podobnie postępujemy z trójkątem V: zastępujemy go przez równoważny trójkąt DBC_1 , mający bok DC_1 na prostej ED , prowadzimy prostą C_1C_2 , równoległą do DD_1 , a przez punkt C_2 przecięcia się jej z prostą FE - równoległą do D_1D_2 /a więc i do EE_1 /; w przecięciu się z prostą GF otrzymamy punkt C_3 ; łącząc go z wierzchołkiem B znajdziemy trójkąt D_2BC_3 .

Wobec równych wysokości trójkątów BED i BDC_1 możemy napisać

$$F_{\text{IV}} : F_{\text{V}} = ED : DC_1$$

a że

$$ED : DC_1 = ED_1 : D_1C_2$$

więc

$$F_{IV} : F_V = ED_1 : D_1 C_2.$$

Ponieważ

$$ED_1 : D_1 C_2 = E_1 D_2 : D_2 C_3$$

więc

$$F_{IV} : F_V = E_1 D_2 : D_2 C_3.$$

Z zestawienia ostatniego stosunku razem z poprzednimi wypadnie ostatecznie:

$$F_I : F_{II} : F_{III} : F_{IV} : F_V = A_1 G : GF : FE_1 : E_1 D_2 : D_2 C_3$$

Jeśli oznaczymy przez h wspólną wysokość trójkątów $A_1 BG$, GBF , FBE , $E_1 BD_2$ i $D_2 BC_3$, wówczas

$$F_I : F_{II} : F_{III} : F_{IV} : F_V = A_1 G \cdot h : GF \cdot h : FE_1 \cdot h : E_1 D_2 \cdot h : D_2 C_3 \cdot h.$$

Ponieważ

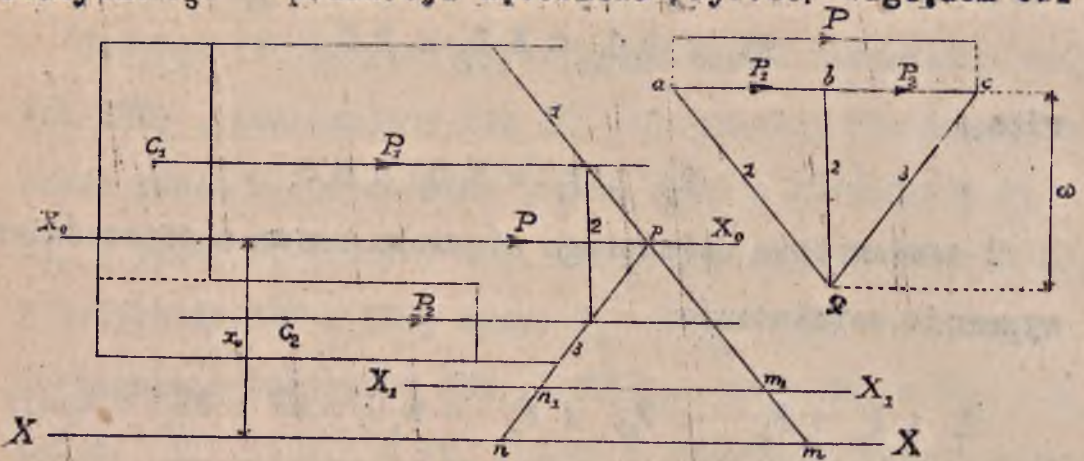
$$GF \cdot h = F_{II} \quad , \quad \text{więc} \quad A_1 G \cdot h = F_I \quad ; \quad FE_1 \cdot h = F_{III} ;$$

$$E_1 D_2 \cdot h = F_{IV} \quad ; \quad D_2 C_3 \cdot h = F_V \quad ;$$

zatem pole wieloboku $ABCDEF G = h/A_1 G + GF + FE_1 + E_1 D_2 + D_2 C_3 / = h \cdot A_1 C_3 =$ polu trójkąta $A_1 BC_3$.

95. Moment statyczny pola. Momentem statycznym pola względem dowolnej osi nazywamy iloczyn tego pola przez odległość jego środka ciężkości od tej osi. Pokażemy na przykładzie, w jaki sposób wykreślnie wyznacza się momen-

ty stat. pól. Przypuśćmy, że chodzi o znalezienie mom. statycznego przekroju kątownika /rys.85/ względem osi



RYŚ. 85.

XX. W tym celu dzielimy dane pole na dwa prostokąty i w środku ciężkości każdego z nich przyjmujemy, jak gdyby siły P_1 i P_2 , wielkości proporcjonalne do odpowiednich pól cząstkowych i równoległe do osi XX. Moment statyczny tych wielkości-sił-względem osi XX będzie równocześnie momentem statycznym danego pola względem tej osi. Wyznaczamy go sposobem, wyłożonym w par.44: budujemy więc wielobok sił, o dowolnym biegunie Ω oraz odpowiedni wielobok sznurowy. Jeżeli pierwszy i ostatni bok tego wieloboku przecina oś XX w punktach m i n , a odległość biegunowa wynosi ω , to szukany mom.stat. jest równy, według wymienionego paragrafu

$$M_s = \overline{mn} \cdot \omega.$$

Łatwo dostrzedz, że wynik nie zależy od tego, na ile

części dzielimy zadane pole; gdyż moment statystyczny zależy wyłącznie od wartości odcinka mn , odciętego na osi XX przez pierwszy i ostatni bok w- boku sznurowego; a te boki przecież zostaną bez zmiany, niezależnie od tego, na ile części dane pole podzielimy.

96. Za pomocą tego samego wieloboku sznurowego można wyznaczyć również momenty statyczne względem innych osi, równoległych do XX . Np. mom. stat. względem osi X_1X_1 wynosi $m_1n_1 \cdot \omega$ i t.d.

Z rysunku też wprost wynika, że moment statystyczny pola względem osi X_0X_0 , przechodzącej przez środek ciężkości danego pola, jest równy zeru.

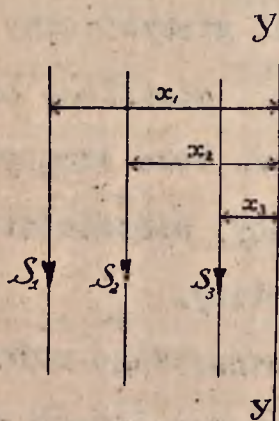
ROZDZIAŁ VI.

MOMENT BEZWŁADNOŚCI.

97. Moment bezwładności sił równoległych. Momentem bezwładności sił S_1, S_2, S_3 względem osi YY /rys.86/ nazywamy sumę iloczynów z tych sił przez kwadraty ich odległości od tej osi.

Jeśli więc oznaczymy ów moment przez J_y , a odpowiednie odległości przez x_1, x_2, x_3 , otrzymamy:

$$J_y = S_1 \cdot x_1^2 + S_2 \cdot x_2^2 + S_3 \cdot x_3^2.$$



RYŚ. 86.

Poznamy dwie metody wykreślonego wyznaczania momentów bezwładności sił, mianowicie sposób Culmanna i sposób Mohra.

98. Sposób Culmanna. Wyznamy dla przykładu moment bezwładności \mathcal{I}_y 4 sił: S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi YY /rys.87/.

W tym celu budujemy dla tych sił wielobok o dowolnym biegunie \mathcal{R} z odległością biegunową ω . Budujemy następnie odpowiedni wielobok sznurowy, a punkty przecięcia się kolejnych boków tego ostatniego z osią YY oznaczmy literami f, g, h, i, k .

Uważamy dalej odcinki $\overline{fg}, \overline{gh}, \overline{hi}, \overline{ik}$ jako nowe siły, działające wzdłuż tych samych linii co siły S_1, S_2, S_3, S_4 i zbudujemy dla nich nowy wielobok o biegunie \mathcal{R}' z odległością biegunową ω' oraz odpowiedni wielobok sznurowy. Oznaczmy wreszcie przez m, n, o, p, q punkty przecięcia się kolejnych boków tego ostatniego z osią YY i zobaczymy, jakie znaczenie mają odcinki $\overline{mn}, \overline{no}, \overline{op}, \overline{pq}$.

W myśl par.97 możemy napisać:

$$\mathcal{I}_y = S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 + S_4 x_4^2,$$

albo

$$\mathcal{I}_y = S_1 x_2 \cdot x_2 + S_2 x_2 \cdot x_2 + S_3 x_3 \cdot x_3 + S_4 x_4 \cdot x_4 + \dots \dots \dots //$$

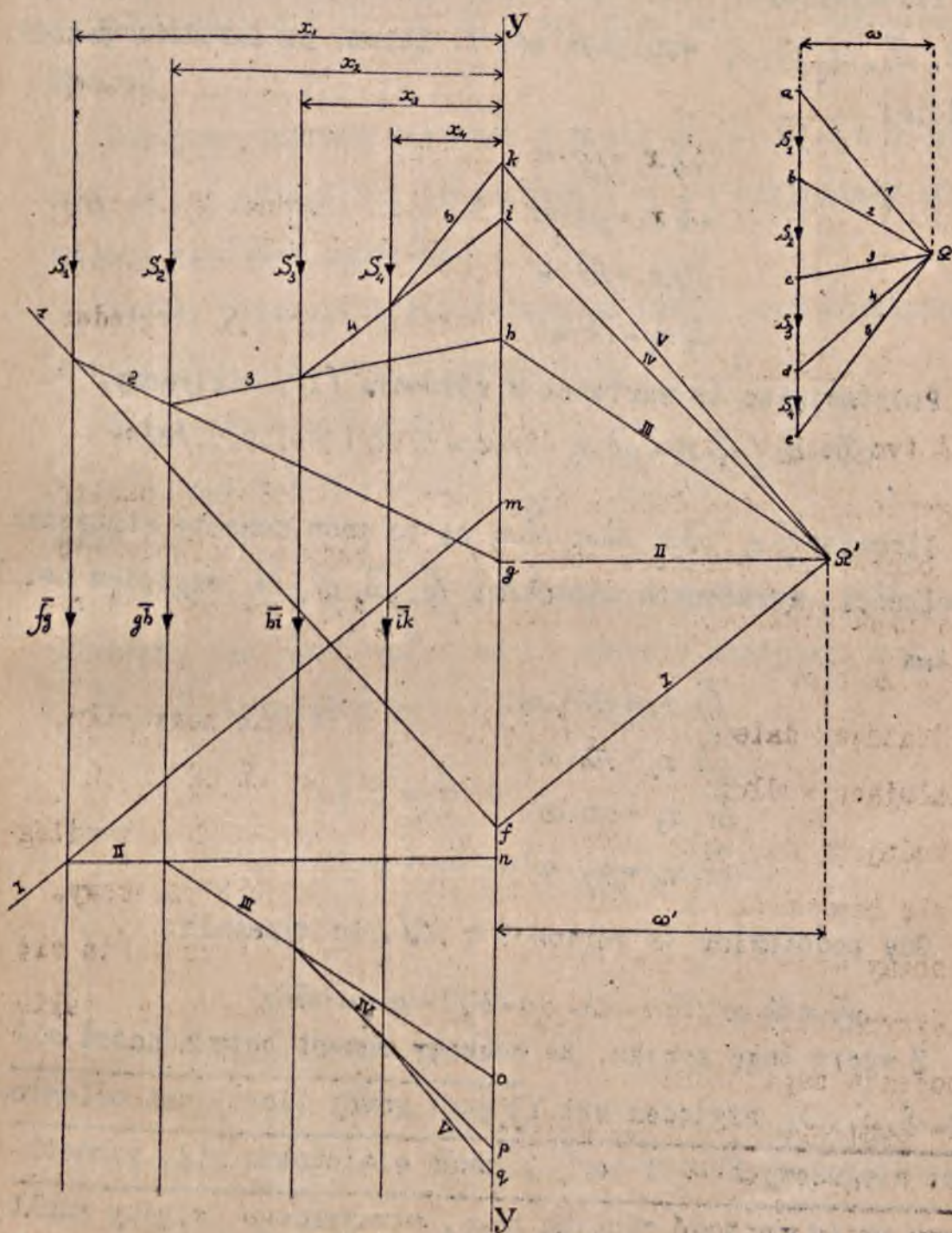


PLATE 87.

Iloczyny $S_1 x_1, S_2 x_2, S_3 x_3, S_4 x_4$ są to momenty statyczne sił S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi Y. Zatem, na zasadzie par.44, będzie:

$$\begin{aligned} S_1 x_1 &= \overline{fg} \cdot \omega \\ S_2 x_2 &= \overline{gb} \cdot \omega \\ S_3 x_3 &= \overline{hi} \cdot \omega \\ S_4 x_4 &= \overline{ik} \cdot \omega \end{aligned}$$

Podstawiając te wartości w równanie /1/, otrzymamy:

$$J_y = \omega (\overline{fg} \cdot x_1 + \overline{gb} \cdot x_2 + \overline{hi} \cdot x_3 + \overline{ik} \cdot x_4) \dots\dots\dots /2/$$

Iloczyny $\overline{fg} \cdot x_1, \overline{gb} \cdot x_2, \overline{hi} \cdot x_3, \overline{ik} \cdot x_4$ są to znów momenty statyczne wielkości, wyrażonych odcinkami $\overline{fg}, \overline{gb}, \overline{hi}, \overline{ik}$ względem osi Y. Zatem

$$\begin{aligned} \overline{fg} \cdot x_1 &= \overline{mn} \cdot \omega' \\ \overline{gb} \cdot x_2 &= \overline{no} \cdot \omega' \\ \overline{hi} \cdot x_3 &= \overline{op} \cdot \omega' \\ \overline{ik} \cdot x_4 &= \overline{pq} \cdot \omega' \end{aligned}$$

Gdy podstawimy te wartości w /2/, to wypadnie:

$$J_y = \omega \cdot \omega' (\overline{mn} + \overline{no} + \overline{op} + \overline{pq}) = \omega \cdot \omega' \cdot \overline{mq}$$

Z wzoru tego wynika, że szukany moment bezwładności sił S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi YY jest równy iloczynowi odległości biegunowych ω i ω' i dwóch wieloboków sił, pomnożonemu przez wartość odcinka \overline{mq} , otrzymanego między punktami przecięcia się z osią YY pierwszego i ostatniego boku wtórnego wieloboku sznurowego.

99. SPOSÓB MOHRA. Na rys. 88 mamy wyznaczony moment bezwładności sił S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi YY sposobem Mohra.

Budujemy naprzód wielobok dla sił S_1, S_2, S_3, S_4 o biegunie ω i odległości biegunowej = ω i wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy.

Punkty przecięcia się kolejnych boków tego ostatniego z osią YY oznaczymy literami f, g, h, i, k .

Na zasadzie paragrafu 97 jest

$$J_y = S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 + S_4 x_4^2$$

albo

$$J_y = S_1 x_1 \cdot x_1 + S_2 x_2 \cdot x_2 + S_3 x_3 \cdot x_3 + S_4 x_4 \cdot x_4 + \dots //1/$$

Iloczyny zaś $S_1 x_1, \dots, S_4 x_4$ są to momenty statyczne sił S_1, \dots, S_4 względem osi YY , zatem

$$S_1 x_1 = \bar{f}g \cdot \omega$$

$$S_2 x_2 = \bar{g}h \cdot \omega$$

$$S_3 x_3 = \bar{h}i \cdot \omega$$

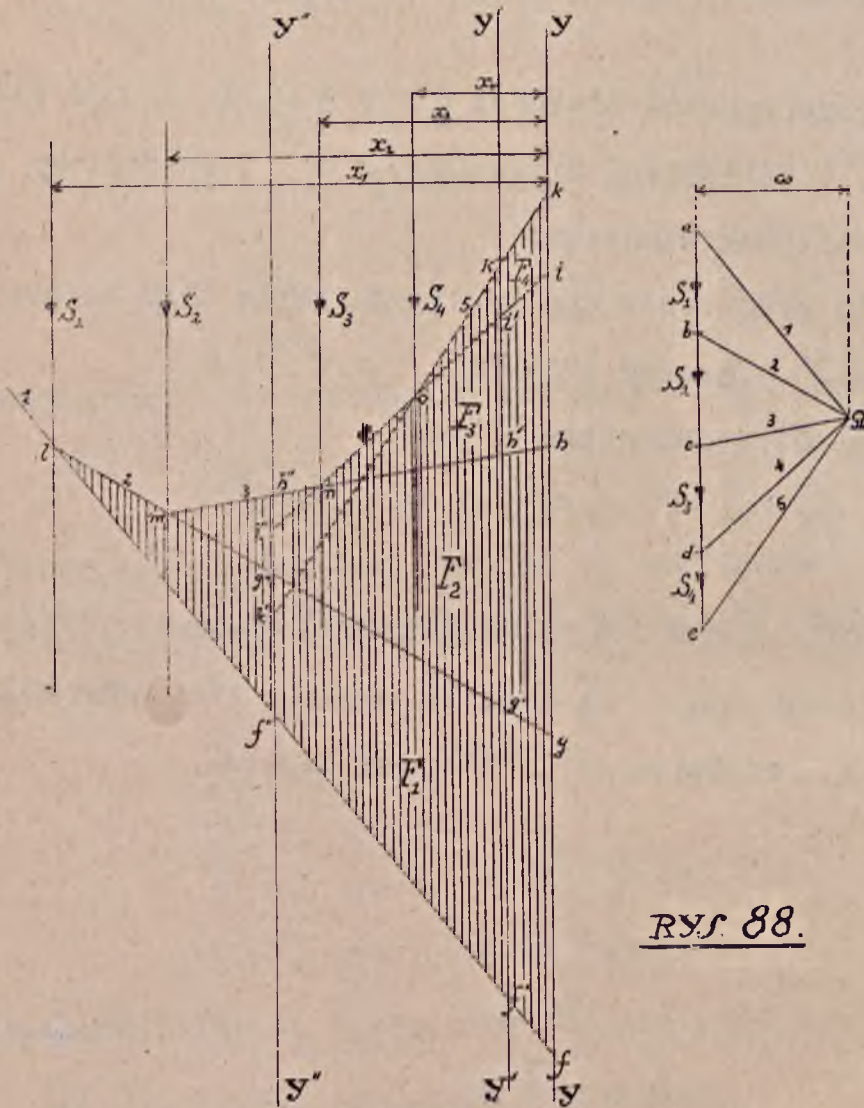
$$S_4 x_4 = \bar{i}k \cdot \omega$$

Podstawiamy to w //1/:

$$J_y = \omega (\bar{f}g \cdot x_1 + \bar{g}h \cdot x_2 + \bar{h}i \cdot x_3 + \bar{i}k \cdot x_4)$$

Iloczyny $\bar{f}g \cdot x_1, \bar{g}h \cdot x_2, \bar{h}i \cdot x_3, \bar{i}k \cdot x_4$ są odpowiednio równe pod-

wójnym polom trójkątów flg , gmb , hni , ioh . Oznaczmy te



RYC 88.

pole przez F_1, F_2, F_3, F_4 . Wówczas będzie:

$$J_y = \omega(2F_1 + 2F_2 + 2F_3 + 2F_4) = 2 \cdot \omega(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

Jeżeli przez F oznaczymy pole wieloboku $flmnoh$

wówczas

$$\underline{J_y = 2 \omega \cdot F}$$

Tak więc SZUKANY MOMENT BEZWŁADNOŚCI JEST RÓWNY PODWÓJNEMU ILOCZYNOWI Z ODLEGŁOŚCI BIEGUNOWEJ ω PRZEZ POLE FIGURY, ZAWARTEJ MIĘDZY OSIĄ YY , WIELOBOKIEM SZNUROWYM I SKRAJNEMI JEGO BOKAMI.

Pole to jest na rys.88 zakreskowane.

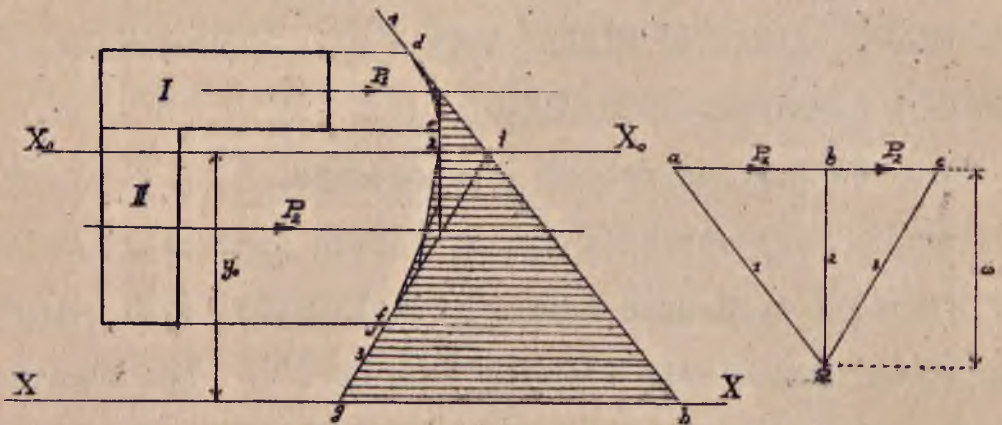
Przy pomocy wykreślonego wieloboku sznurowego możemy z łatwością wyznaczać momenty bezwładności tych samych się względem innych osi, równoległych do YY . Np. moment bezwładności zadanych się względem osi $Y'Y'$ jest równy podwójnemu iloczynowi z odległości biegunowej przez pole figury f^{lmnok} , a moment względem osi $Y''Y''$ wynosi

$$2\omega \times \text{pole figury } f^{lmnok}.$$

Rozpatrując wartości pól F przy różnych położeniach osi dojdziemy do wniosku, że MOMENT BEZWŁADNOŚCI JEST NAJMNIEJSZY, GDY OŚ PRZECHODZI PRZEZ ŚRODEK SIŁ $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$

100. MOMENT BEZWŁADNOŚCI POLA. Znajdziemy dla przykładu moment bezwładności pól przekroju kątownika /rys.89/ względem osi XX , stosując sposób Mohra.

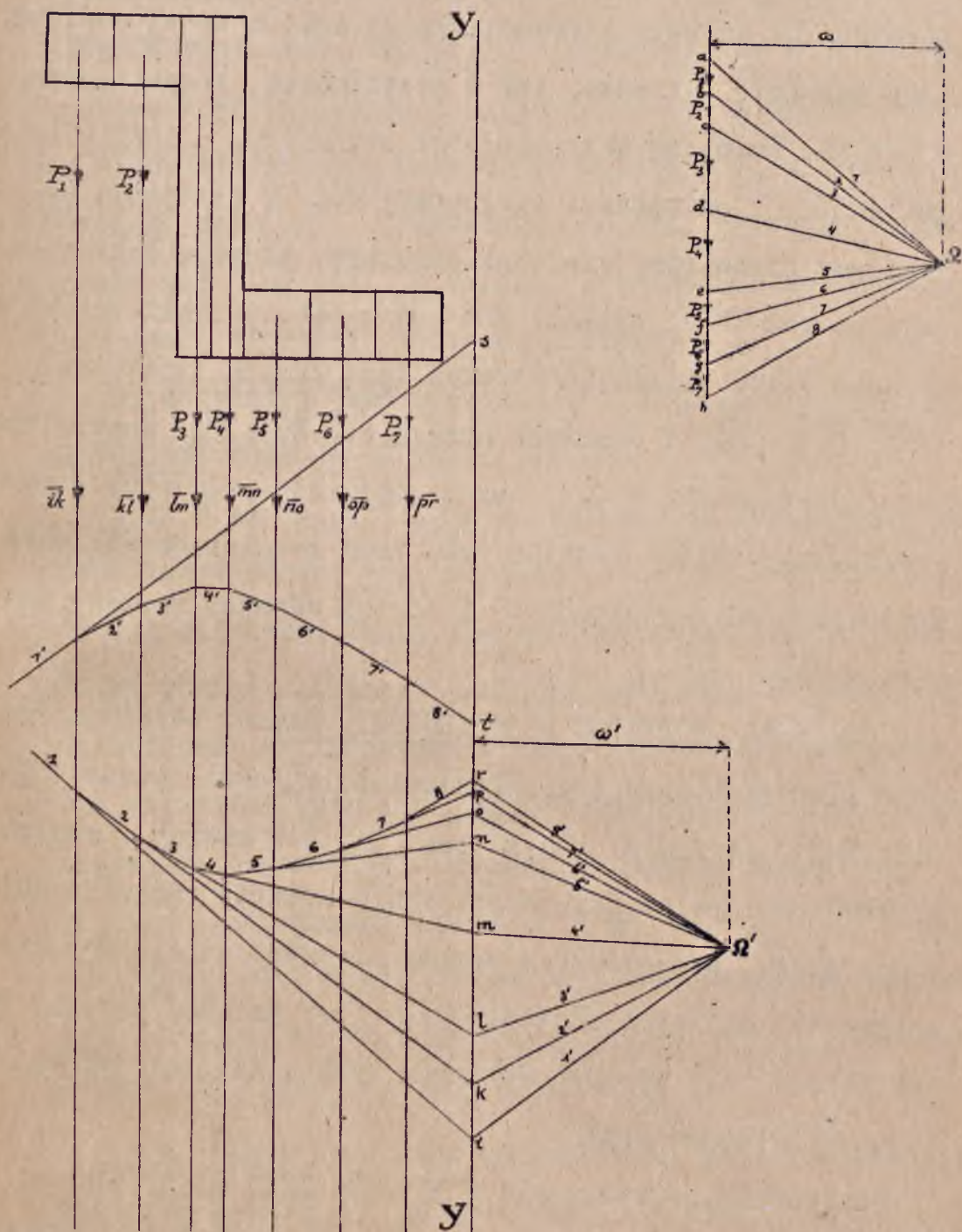
W tym celu dzielimy pole kątownika prostą, RÓWNOLEGLĄ DO OSI XX na dwa prostokąty /I i II/; przyjmujemy, że do środka ciężkości każdego z nich jest przyłożona siła proporcjonalna do odpowiedniego pola i równoległa do osi XX . Dla sił tych budujemy wielobok z odległością biegunową równą ω oraz wielobok sznurowy. W wieloboku tym



RYC. 89.

naależy zbudować parabole pomiędzy punktami d, e i e, f , albowiem mamy w danym razie do czynienia właściwie nie z siłami skupionymi, lecz ciągłymi. Pole, zawarte pomiędzy osią XX a figurą $bdefg$, pomnożone przez 2ω jest równe szukanemu momentowi. Najmniejszy moment bezwładności, oczywiście, jest dla osi X_0X_0 , przechodzącej przez środek ciężkości pola /par. 99/.

101. Na rys. 90 jest wyznaczony moment bezwładności zetonnika względem osi YY sposobem Culmanna. Pole zetonnika należy podzielić w tym razie na pewną liczbę części prostymi równoległymi do osi, przyczem dokładność obliczenia jest tem większa, im liczba części podziału jest większa.



RYS. 90.

W środku ciężkości każdego pola przykładamy siłę, proporcjonalną do pola i równoległą do osi, a dalej postępujemy zupełnie tak samo, jak w przykładzie, rozpatrzonym w par. 98. Budujemy więc wielobok sił P_1, P_2, \dots, P_7 o biegunie S i odległości biegunowej ω , następnie wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy, którego boki odcinają na osi YY odcinki $\overline{zk}, \overline{k\bar{l}}, \dots, \overline{p\bar{r}}$. Odcinki te uważamy jako siły, działające wzdłuż tych samych linii, co

P_1, P_2, \dots, P_7 i dla tych nowych sił budujemy nowy wielobok /odleg. bieg. = ω' / oraz odpowiedni wielobok sznurowy /wtórny/. Niech skrajne boki tego ostatniego wieloboku przecinają oś w punktach s i t ; wówczas szukany moment wynosi $J_y = \omega \cdot \omega' \cdot \overline{st}$.

102. SKALA MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI. Moment bezwładności, jako iloczyn z siły przez kwadrat odległości, posiada wymiar kgm^2 / $\text{kg} \cdot \text{cm}^2$ / albo m^4 / cm^4 /, jeśli mówimy o momencie bezwładności pola. Przy wyznaczaniu momentu sposobem Culmanna skale, przy których pomocy mierzymy odległości biegunowe ω, ω' oraz odcinek \overline{mq} /por. par. 98/ powinny być tak obrane, aby iloczyn wymiarów tych wielkości dał kg m^2 / kg cm^2 / albo m^4 / cm^4 /.

Oczywiście, w tym razie KONIECZNE JEST MIERZENIE DWUCH KTÓRYCHKOLWIEK ODCINKÓW W SKALI DŁUGOŚCI I JEDNEGO W SKALI SIŁ /pól/.

Stosując sposób Mohra, otrzymujemy moment bezwładności, jako iloczyn $2\omega F'$. Tu mamy do wyboru: albo $1/\omega$ mierzyć w skali sił /lub pól/, a poszczególne odcinki pola F' — w skali długości, albo $2/\omega$ — w skali długości, a wtedy wymiar pola będzie $\text{kgm. /albo m}^3/$; w tym razie odcinki pola F' , równoległe do sił, należy mierzyć w skali sił /lub pól/, a odcinki prostopadłe do tamtych — w skali długości, albo też odwrotnie.

Najdogodniej jest mierzyć ω W SKALI SIŁ /LUB PÓL/, A ODCINKI POLA F' W SKALI DŁUGOŚCI.

103. W końcu par. 100 powiedziano, że najmniejszy moment bezwładności jest wówczas, kiedy oś przechodzi przez środek ciężkości danej figury. Opierając się na rys. 89, łatwo poznać zależność pomiędzy momentami bezwładności, obliczonymi względem osi $X_0 X_0$, przechodzącej przez środek ciężkości pola i względem dowolnej osi XX , równoległej do poprzedniej. Oznaczmy pierwszy moment \mathcal{J}_0 , drugi \mathcal{J}_x . Z poprzedniego wiemy, że $\mathcal{J}_x = 2 \cdot \omega \cdot F$, gdzie

F jest pole figury $defghd$. Pole to możemy uważać jako sumę dwóch pól: $defid = F_0$ i $gih = F_1$. Wówczas $\mathcal{J}_x = 2\omega(F_0 + F_1) = 2\omega F_0 + 2\omega F_1$.

$2\omega F_0$ jest to moment bezwładności pola zadanej figury względem osi $X_0 X_0$, zatem $= \mathcal{J}_0$, a więc

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_0 + 2\omega \cdot F_1.$$

Z trójkątów $a\Omega c$ i gbi znajdziemy:

$$\frac{P_1+P_2}{\omega} = \frac{\bar{g}b}{y_0} ; \quad \text{stąd} \quad \omega = \frac{(P_1+P_2)y_0}{\bar{g}b} ;$$

następnie $F_1 = \frac{1}{2} \bar{g}b \cdot y_0$, zatem

$$J_x = J_0 + 2 \cdot \frac{P_1+P_2}{\bar{g}b} \cdot y_0 \cdot \frac{1}{2} \bar{g}b \cdot y_0 = J_0 + (P_1+P_2) \cdot y_0^2.$$

Ponieważ $P_1+P_2 = P$ całemu polu zadanej figury, więc

$$J_x = J_0 + P \cdot y_0^2.$$

Stąd otrzymujemy twierdzenie: MOMENT BEZWŁADNOŚCI POLA WZGLĘDEM DOWOLNEJ OSI XX JEST RÓWNY MOMENTOWI BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI, PRZECHODZĄCEJ PRZEZ ŚRODEK CIĘŻKOŚCI DANEGO POLA, RÓWNOLEGŁE DO OSI XX , WIĘCEJ ILOCZYN POLA PRZEZ KWADRAT ODLEGŁOŚCI ŚRODKA CIĘŻKOŚCI TEGO POLA OD OSI XX .

104. UWAGI. Przytoczmy tu kilka uwag, o których należy zawsze pamiętać przy wyznaczaniu momentów bezwładności pól:

PRZY STOSOWANIU SPOSOBU MOHRA MOŻNA DZIELIĆ POLA JEDY-
NIE PROSTEMI, RÓWNOLEGŁEMI DO OSI TAK, ABY W KIERUNKU OSI
POLA CZĄSTKOWE NIE ZAKRYWAŁY SIĘ JEDNO DRUGIEM; w przeciwnym
razie przy obliczeniu pól napotkamy trudności, nie łatwe do
przezwyciężenia. Warunek powyższy nie jest konieczny w sposobie
Culmanna, ponieważ tu pól nie obliczamy.

STOSUJĄC SPOSÓB MOHRA, MOŻEMY PRZY TYM SAMYM WIELOBOKU SIĘ

I WIELOBOKU SZNUROWYM WYZNACZAĆ MOMENTY WZGLĘDEM RÓŻNYCH OSI RÓWNOLEGŁYCH DO SIEBIE - wypada tylko każdorazowo obliczyć pole, które jest przytem zmienne.

NIE POZWALA NA TO SPOSÓB CULMANNA. Wymaga on nowego wieleboku sił i wieleboku sznurowego /wtórnych/ dla każdego położenia osi.

Co się tyczy dokładności, to pozornie wyznaczenie momentu sposobem Culmanna jest prostsze, gdyż do otrzymania odpowiedzi nie trzeba obliczać pól. Jednakże na niedokładność wpływa tu zawilsza, niż u Mohra, budowa wykresu oraz dokładność, która powstaje przy znaczniejszej liczbie części podziału zadanego pola.

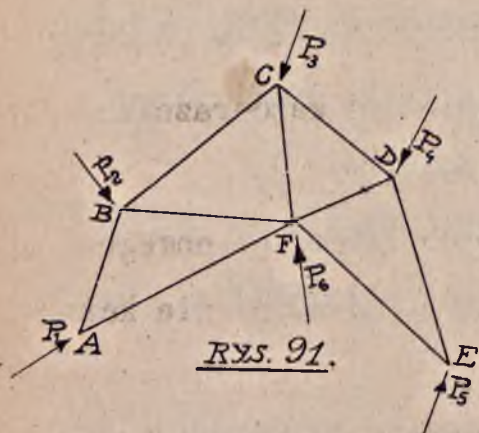
W sposobie Mohra dokładność odpowiedzi zależy z jednej strony od dokładności, z jaką możemy wykreślić odpowiednie krzywe sznurowe, i z drugiej strony od ścisłości, z jaką umiemy obliczać pola, ograniczone częściowo linjami krzywymi.

ROZDZIAŁ VII.

KRATOWNICE.

105. OKREŚLENIA. KRATOWNICĄ NAZYWAMY SZTYWNY UKŁAD PRĘTÓW PROSTYCH, POŁĄCZONYCH ZE SOBĄ PRZEGUBAMI /rys.91/.

Punkty, w których zbiegają się pręty, nazywamy WĘZŁAMI.



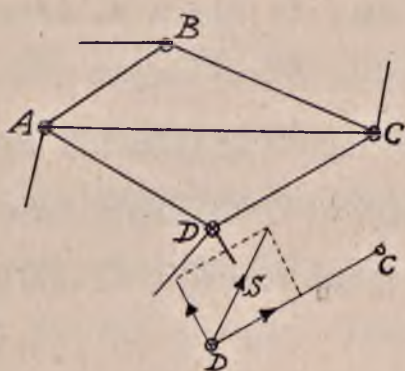
Jeśli wszystkie pręty, tworzące kratownicę, leżą w jednej płaszczyźnie, to kratownicę taką nazywamy PŁASKĄ; w przeciwnym razie mamy do czynienia z kratownicą PRZESTRZENNĄ. W dalszym ciągu będziemy rozpatrywali wyłącznie kratownice płaskie.

W rozdziale niniejszym będzie nam chodziło o wyznaczenie sił, które powstają w prętach, gdy na kratownicę działają pewne siły zewnętrzne. Będziemy uważali przytem, że siły zewnętrzne działają w płaszczyźnie kratownicy i że są przyłożone wyłącznie do węzłów. W par. 117 podany sposób obliczenia tych sił, tymczasem będziemy uważali, że są one zadane.

Kratownice można podzielić na: STATYCZNIE WYZNACZALNE I STATYCZNIE NIWYZNACZALNE. Do grupy pierwszej należą te kratownice, dla których siły w prętach dają się wyznaczyć wyłącznie zapomocą twierdzeń statyki, bez uciekania się do innych nauk. Gdy zaś to nie daje się uczynić, to kratownica jest statycznie niewyznaczalną.

106. DLACZEGO POŁĄCZENIA PRĘTÓW MAJĄ BYĆ PRZEGUBOWE?

Przypuśmy, że ... $ABCD$ /rys.92/ jest częścią kratownicy, na którą działają siły zewnętrzne, przyłożone w węzłach. Kratownica ta, przypuśmy, jest w równowadze;



RYJ. 92

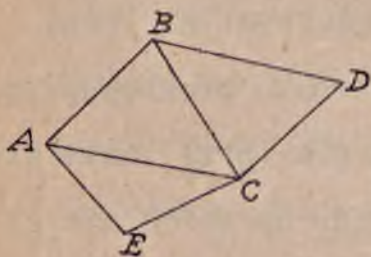
w równowadze będzie też każdy jej pręt, a więc i pręt CD. Przypuśćmy, że przy węźle D odcinamy wszystkie pręty, za wyjątkiem CD; aby ten pręt był teraz w równowadze trzeba do punktu D przyłożyć pewną siłę, z jaką odcięte pręty na ten węzeł działały. Niech to będzie siła S , tworząca pewien kąt z osią pręta CD.

Siłę tę możemy rozłożyć na dwie składowe: na jedną w kierunku osi pręta i na drugą w kierunku prostopadłym. Pierwsza z nich wywołuje ściskanie pręta /przy innym kierunku siły S - rozciąganie/, druga dąży do obrócenia go około C; ta ostatnia siła mogłaby wówczas pręt giąć, gdyby on był w węźle C sztywno umocowany. Jeśli zaś węzeł C będzie przegubowym, wówczas składowa normalna do osi pręta istnieć nie może, boć niema ruchu tego pręta; zatem na dany pręt może wtedy działać tylko siła skierowana wzdłuż jego osi, czyli że pręt może być tylko ścispany lub rozciągany. Przy połączeniu sztywnem w pręcie powstałyby mogły naprężenia zginające. Ponieważ obliczenie sił, zginających pręty, jest bardzo złożone i nie może być wykonane przy pomocy zasad statyki, natomiast siły, działające wzdłuż osi pręta dają się łatwo znaleźć, przeto

dla uproszczenia zadania przyjmujemy, że węzły są przegubowe.

Tak więc POŁĄCZENIA PRZEGUBOWE PRĘTÓW KRATOWNICY MAJĄ NA CELU USUNIĘCIE NAPRĘŻEŃ ZGINAJĄCYCH W PRĘTACH; natomiast zapewniają powstawanie w prętach JEDYNIĘ SIĘ ROZCIĄGAJĄCYCH LUB ŚCISKAJĄCYCH.

107. WARUNEK STATECZNOŚCI KRATOWNICY. Zobaczymy, wiele trzeba najmniej prętów przy danej liczbie węzłów, aby kratownica była sztywna.



RYŚ. 93.

Przypuśćmy naprzód, że mamy kratownicę ABC /rys.93/, złożoną z 3-ch węzłów; oczywiście, że do tego, aby kratownica była sztywna, niezbędne są 3 pręty.

Jeżeli następnie będziemy chcieli połączyć z kratownicą ABC czwarty węzeł D, trzeba będzie do tego już tylko dwóch prętów AD i CD; to samo dotyczy każdego następnego węzła. Zatem, gdy liczba węzłów wynosi n , to pierwsze 3 węzły wymagają 3 prętów, pozostałe $(n-3)$ węzły wymagają każdy po 2 pręty, zatem ogółem potrzeba prętów $(n-3) \cdot 2$. Widzimy więc, żeby przy n węzłach budowla była sztywna wymagana jest liczba prętów

$$m = 3 + (n-3) \cdot 2$$

albo

$$m = 2n - 3 \dots \dots \dots /1/$$

108. WARUNEK. ABY KRATOWNICA BYŁA STATYCZNIE WYZNACZALNA. Zbadajmy teraz, wiele może być prętów przy n węzłach, aby kratownica była statycznie wyznaczalna, t.j. aby można było znaleźć siły, działające w poszczególnych prętach przy pomocy statyki. Szukaną liczbę prętów oznaczmy przez m . Ponieważ kratownica jest w równowadze, zatem każdy węzeł jest w równowadze; dla jednego więc węzła możemy napisać 2 równania równowagi, trzecie równanie momentów nie ma wartości, zatem równań tych będzie ogółem $2n$. Lecz siły zewnętrzne, działające na kratownicę, nie mogą być dowolnie obrane, powinny czynić zadość trzem warunkom równowagi; zatem dla wyznaczenia sił w prętach będziemy mieli nie $2n$ równań, lecz o 3 mniej, czyli $(2n-3)$ równań; tyleż możemy znaleźć niewiadomych sił w prętach; zatem może być tylko $(2n-3)$ prętów. Gdyby liczba prętów była większa niż $(2n-3)$, to kratownica byłaby statycznie niewyznaczalna. Zatem musi być spełnione równanie:

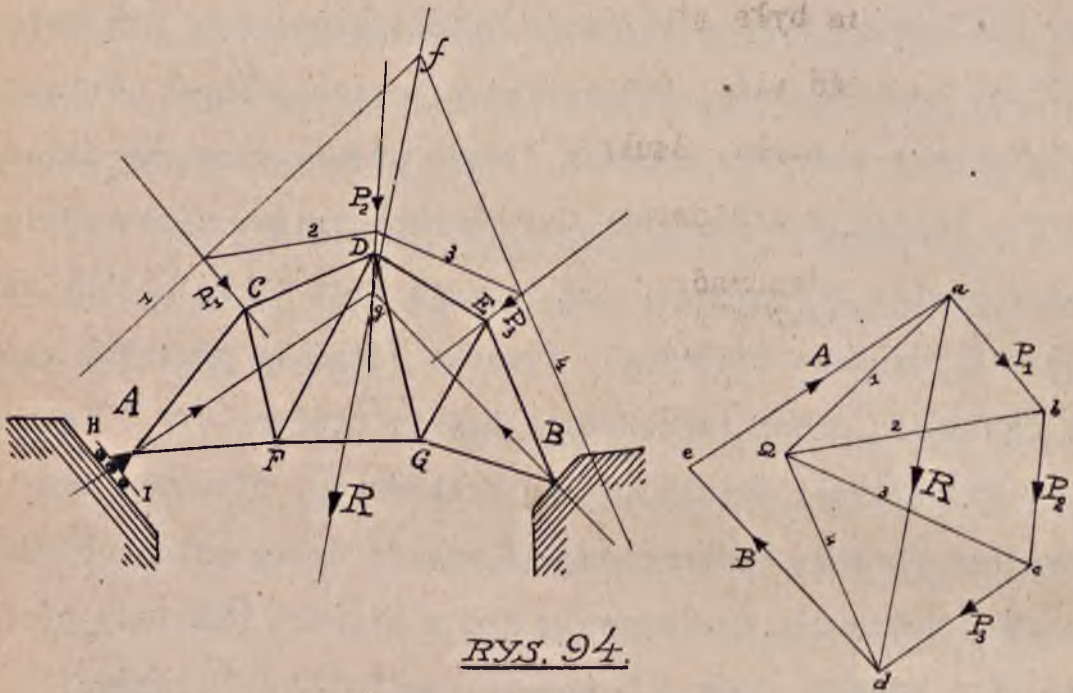
$$m = 2n - 3.$$

Z powyższego wynika, że KRATOWNICA O NAJMNIJSZEJ LICZBIE PRĘTÓW, KTÓRA WYSTARCZA DO SZTYWNOŚCI, JEST JEDNO-CZEŚNIE KRATOWNICĄ STATYCZNIE WYZNACZALNĄ.

109. WYZNACZANIE ODPORÓW. Rozpatrzmy kratownicę

/rys.94/, obciążoną siłami P_1, P_2, P_3 przyłożonemi do

węzłów C,D,E i opartą o mur w punktach A i B. Mamy wyznaczyć oddziaływania /odpory/ muru w tych punktach.



Co się tyczy charakteru podpór, to założymy, że A jest podporą I-go rodzaju /por.par.68/ i może wywierać jedynie oddziaływanie normalne do płaszczyzny podparcia, zaś B - jest podporą II-go rodzaju.

Aby znaleźć odpory A i B wyznaczamy naprzód wypadkową R sił P_1, P_2, P_3 . Budujemy więc dla sił tych wielobok $abcd$ oraz wielobok sznurowy. Szukana wypadkowa pod względem wartości, kierunku i lotu jest przedstawiona odcinkiem ad ; jej linja działania przechodzi przez

punkt f , w którym przecinają się boki skrajne 1 i 4 wieloboku sznurowego.

Wypadkowa R równoważy się odporami: A i B , zatem powinna przeciąć się z nimi w jednym punkcie. Kierunek odporu A jest wiadomy, prostopadły do płaszczyzny podparcia HJ , jeśli więc punkt przecięcia się tego odporu z wypadkową R połączymy z punktem B , to otrzymamy kierunek drugiego odporu. Wartości i loty sił A i B wyznaczymy łatwo, uzupełniając wielobok sił. Otrzymamy, że $A = \overline{ea}$, $B = \overline{de}$.

110. WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH. Zobaczymy teraz, jak wyznacza się siły, które powstają w prętach kratownicy statycznie wyznaczalnej, pod działaniem sił zewnętrznych.

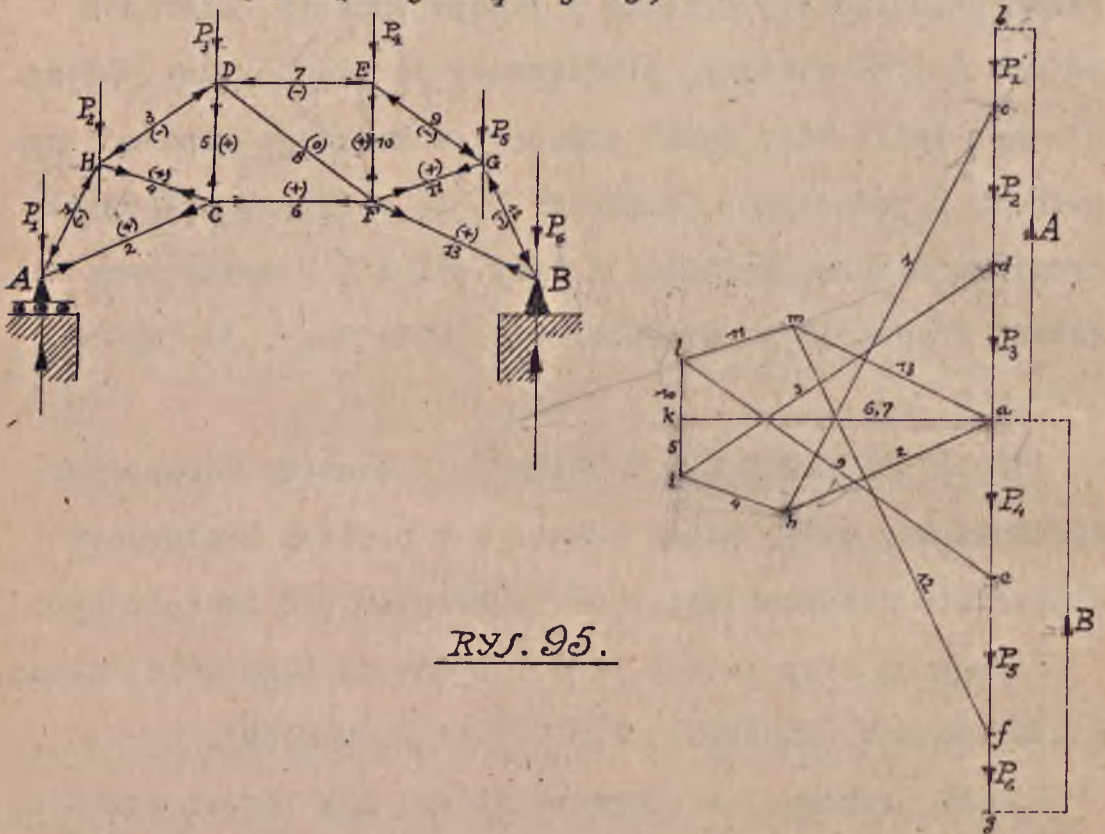
Podamy tu trzy metody, zmierzające do tego celu, mianowicie: sposób L. CREMONY, A. RITTERA i C. CULMANNA.

Sposób Cremony jest dogodny wtedy, gdy chodzi o znalezienie sił we wszystkich prętach kratownicy; dwa pozostałe zaś sposoby - gdy chcemy wyznaczyć siłę, działającą tylko w jednym lub w niektórych prętach.

111. WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH SPOSOBEM CREMONY. Rozpatrzmy kratownicę, przedstawioną na rys. 95, obciążoną siłami PIONOWYMI $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$, przyłożonemi do węzłów A, H, D, E, G, B i podpartą w punktach A i B . Jeśli obciążenie kratownicy jest symetryczne względem środkowej osi,

jeśli następnie jedna z podpór jest na wałkach, toczących się po płaszczyźnie poziomej, wówczas odpory A i B są pionowe, a każdy z nich wynosi:

$$\frac{1}{2}(P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6).$$



RYS. 95.

Budując więc wielobok sił, otrzymamy, że $\vec{ab} = A$ i $\vec{ga} = B$. Wyznaczywszy odpory, przejdziemy do rozpatrzenia sił w prętach; i bierzemy naprzód pod uwagę węzeł A. Ponieważ kratownica jest w równowadze, przeto każdy z węzłów, oddzielnie rozpatrywany, jest w równowadze. Przetnijmy pręty, zbiegające się w węźle A. Dla równowagi tego węzła poza siłą A i P_1 należy jeszcze przyjąć siły,

działające według prętów 1 i 2. Te cztery siły A , P_2 i siły w prętach 1 i 2 są w równowadze. Zatem wielobok, utworzony z tych sił musi być zamknięty. Siły A i P_2 są już w wieloboku sił wykreślone, należy tylko z końca c siły P_2 poprowadzić równoległą do pręta 1, a z początku a siły A - równoległą do pręta 2. Oznaczając punkt przecięcia się tych równoległych przez b , otrzymamy, że \overline{cb} /z lotem od c do b / określa siłę w pręcie 1, a \overline{ba} /z lotem od b do a / - siłę w pręcie 2. Otrzymane loty oznaczamy na rysunku kratownicy, notując je na prętach w pobliżu węzła A .

Widzimy, że w pręcie 1 na węzeł A działa siła, zwrócona do niego; pręt ten jest zatem ściskany; oznaczamy to, stawiając przy pręcie znak "minus" $/- /$.

W pręcie 2 siła jest skierowana od węzła A ; to oznacza, że pręt 2 jest rozciągany; zaznaczamy to znakiem "plus" $/+ /$, postawionym przy pręcie.

Przejdziemy teraz do innego węzła. W węźle C spotykają się cztery pręty, mianowicie: 2, 4, 5, 6. Pręt 2 jest rozciągany, zatem działa od węzła C ; siła ta jest określona poprzednio i jest równa co do wartości i kierunku wyznaczonej poprzednio sile $2 = \overline{ab}$, lot zaś posiada przeciwny, niż to było w stosunku do węzła A .

Nieznane są zatem tylko siły w prętach 4, 5, 6, równoważące się z siłą \overline{ab} /siły zewnętrzne na węzeł C nie działają/. Dane te nie wystarczają do znalezienia tych sił, bo na odcinku, przedstawiającym siłę \overline{ab} , możemy zbudować nieskończenie wiele wieloboków, o bokach równoległych do prętów 4, 5, 6. Z tego wynika, że narazie węzła C rozpatrywać nie możemy, i że należy przejść do takiego węzła, w którym mamy tylko dwie siły niewiadome.

Takim jest węzeł H . Zbiegają się w nim pręty 1,3,4 i działa nań siła zewnętrzna P_2 . Siła w pręcie 1 jest = \overline{bc} ; ponieważ ten pręt jest ściskany, zatem na węzeł H działa ku niemu; /zaznaczamy to na osi pręta strzałką zwróconą ku H /. Pozostają więc do wyznaczenia siły w prętach 3 i 4. Wykonywamy to, korzystając z poprzednio rozpoczętego wieloboku sił: Siła w pręcie 1 /siła \overline{bc} / wraz z siłą P_2 tworzą część wieloboku bcd ; z końca d siły P_2 prowadzimy równoległą do pręta 3, a z początku b siły \overline{bc} - równoległą do pręta 4. Jeżeli punkt przecięcia się tych prostych oznaczymy przez i , to odcinki \overline{di} i \overline{ib} wyznaczają nam odpowiednio siły w prętach 3 i 4. Dla węzła H otrzymaliśmy więc wielobok zamknięty z obiegiem $cdibc$. Znacząc na rysunku krótkownicy loty sił 3 i 4 zobaczymy, że pręt 3 jest ściskany, zaś pręt 4 - rozciągany, w pierwszym bowiem

pręcie siła działa ku węzłowi, w drugim od węzła.

Zauważmy, że otrzymalibyśmy bardziej złożony wykres sił, gdybyśmy poprowadzili przez punkt d /a nie przez b / równoległą do pręta 4, a przez b /a nie przez d / równoległą do pręta 3. W następstwie bylibyśmy zmuszeni do powtórzenia tych samych odcinków po parę razy.

Unikając podobnej niedogodności pozwoli nam uwaga, że rysunek kratownicy i wielobok sił są figurami wzajemnymi, które mają tę własność /por.par.28/, że LINJE PRZECINAJĄCE SIĘ NA RYSUNKU KRATOWNICY W JEDNYM PUNKCIE MUSZĄ TWORZYĆ W WYKRESIE POMOOCNICZYM WIELOBOK ZAMKNIĘTY I ODFROT-NIE. Tak więc np. pręty 1,2,4 tworzą trójkąt, a zatem linje równoległe do nich w wieloboku sił przecinać się muszą w jednym punkcie. Na rysunku kratownicy siły P_2, P_3 i pręt 3 tworzą trójkąt /o wierzchołku ∞ dalekim/, przeto w wykresie sił - siła P_2, P_3 i siła w pręcie 3 wychodzą z jednego punktu d . I tak dalej.

Możemy teraz przejść do węzła C , w którym obecnie mamy już tylko 2 niewiadome: siły w prętach 5 i 6. Pozostaje bowiem 2 siły mianowicie 2 i 4 zostały już wyznaczone.

Przedewszystkiem dodajemy znane siły w pręcie 2-gim i 4-ym; suma wyraża się odcinkami abi . Pręty 3, 4, 5 tworzą trójkąt, zatem w myśl uwagi poprzedzającej, równoległe do nich siły w wieloboku sił przecinają się w jednym

punkcie. Należy zatem przez punkt \dot{z} , w którym przecina-
ją się równoległe do prętów 3 i 4 poprowadzić równoległą
do pręta 5, a przez punkt a /początek siły w pręcie 2/
równoległą do pręta 6. Otrzymany stąd, że siłę w pręcie 5
wyznaczy odcinek $\overline{z\bar{k}}$, a w pręcie 6 odcinek $\overline{k\bar{a}}$; obydwie
pręty są rozciągane. Dla węzła C mamy wielobok zamknię-
ty z obiegiem *abika*.

Przechodzimy teraz do węzła D , na który działają
siły w prętach 3, 5, 8, 7 oraz siła zewnętrzna P_3 . Nie-
wiadome są tylko dwie, mianowicie siły 8 i 7. Naprzód do-
dajemy znane dla tego węzła siły przy pomocy wieloboku
kida. W celu wyznaczenia sił 7 i 8 prowadzimy, podob-
nie jak poprzednio, przez punkt k równoległą do pręta
8, a przez a - równoległą do 7. Wypadnie stąd, że siła
w pręcie 8 jest równa zeru, a siła w pręcie 7 jest co do
wartości równa sile w pręcie 6, przyczem znajdujemy, że
pręt 7 jest ściskany.

Dla węzła D mamy zatem wielobok sił z obiegiem
kidak.

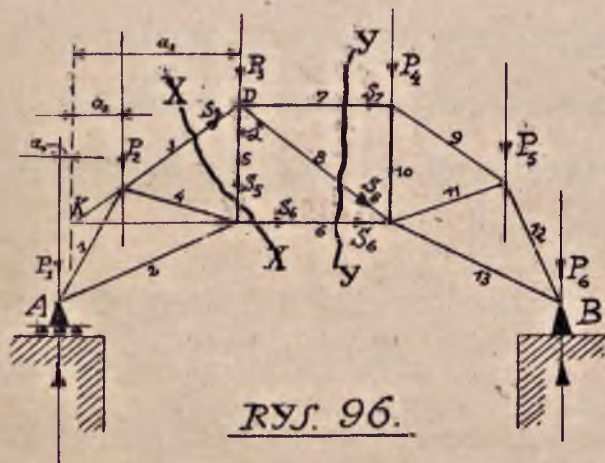
Zupełnie podobnie rozważać będziemy kolejno węzły
 E, F, G . W każdym z nich spotkamy tylko dwie niewiado-
me, będziemy więc mogli je wyznaczać. Kiedy, wreszcie,
przyjdziemy do węzła B , znajdziemy tu, że siły w prę-
tach 12, 13, poprzednio wyznaczone, oraz siły P_6 i B
powinny być w równowadze. W rzeczy samej wielobok utworzo-

ny dla tych sił *amfga* jest zamknięty.

Tym sposobem otrzymamy ostatecznie wielobok sił, zwany WYKRESEM CREMONY. Możemy z niego znaleźć z łatwością wartość siły w którymkolwiek pręcie kratownicy; o tym zaś, czy ten pręt jest ściskany, czy rozciągany, powie nam lot siły, wskazany na rysunku kratownicy.

Zauważmy, że jeśli przy budowie wykresu Cremony stosować się będziemy ściśle do wyłożonych zasad kolejności postępowania, to żadna linja w wykresie tym nie będzie się powtarzała dwa razy, lecz każda, raz wykreślona, będzie użyta dwukrotnie z przeciwnymi lotami. Z tego względu na wykresie Cremony lotów nie zaznaczamy.

112. WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH SPOSOBEM RITTERA.



Mówiliśmy wyżej, że sposobem Rittera posługujemy się wtedy, gdy chodzi o siłę, działającą w pewnym pręcie kratownicy, a nie o siły we wszystkich prętach.

Sposób ten polega na zastosowaniu jednego z 3-ch warunków równowagi

sił, rozważanej w statyce, mianowicie twierdzenia o sumie momentów statycznych układu sił, znajdujących się w równowadze. Aby wyjaśnić sposób Rittera przypuśćmy, że mamy znaleźć siłę w pręcie 5 tej samej, co poprzednio kratownicy /rys.96/. W tym celu wyobrażamy sobie, że kratownica została rozcięta tak, aby przecięciu uległy tylko TRZY pręty, wśród których znajduje się pręt 5. Przypuśćmy, że przecięcie to zostało wykonane po linii XX i że prawa część kratownicy została odrzucona.

Aby mimo przecięcia pozostała część /lewa/ nie wyszła z równowagi, należy do prętów w miejscach przecięcia ich przyłożyć siły ZEWNĘTRZNE, równe tym, które działały w prętach przed przecięciem jako WEWNĘTRZNE. Siły te powinny działać w kierunku osi prętów przeciętych.

Oznaczmy te siły odpowiednio do numerów prętów przez S_3 , S_5 , S_6 i przypuśćmy, że są one zwrócone NA-ZEWNĄTRZ względem rozpatrywanej części kratownicy. Jeśli przypuszczenie to nie jest słuszne, to błąd wyjdzie na jaw później.

Tak więc na lewą część kratownicy działają siły zewnętrzne A , P_1 , P_2 , S_3 , S_5 , S_6 ; siły te są w równowadze. Z tego wynika, że suma ich momentów statycznych względem dowolnego punktu płaszczyzny kratownicy jest równa zeru.

Wźmy momenty względem punktu K , w którym przecinają się przedłużenia prętów 3 i 6. Oznaczając odległości sił A, P_1, P_2, S_5 od tego punktu przez a_1, a_1, a_2, a_3 , otrzymamy

$$A a_1 - P_1 a_1 + P_2 a_2 - S_5 a_3 = 0;$$

momenty sił S_3 i S_6 względem punktu K są równe zeru. Zwróćmy tu uwagę na to, że, pragnąc znaleźć siłę S_5 , obraliśmy punkt K na przecięciu się pozostałych dwóch sił nieznanych S_3 i S_6 . Skutkiem czego momenty tych sił zginęły; wobec tego w równaniu otrzymanem mamy tylko jedną niewiadomą S_5 .

Z poprzedniego równania znajdujemy:

$$S_5 = \frac{A a_1 - P_1 a_1 + P_2 a_2}{a_3}$$

albo, ponieważ $A = \frac{1}{2} (P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6)$

$$S_5 = \frac{(P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 - P_1) a_1 + 2 P_2 a_2}{2 a_3},$$

ze względu na symetrię sił: $P_1 = P_6, P_2 = P_5, P_3 = P_4$, więc

$$S_5 = \frac{a_1 (P_2 + P_3) + a_2 P_2}{a_3}$$

Tema jest więc równa szukana siła w pręcie 5.

Gdyby chodziło o siłę w jakimś innym pręcie, np. 6, to należałoby wziąć momenty względem punktu przecięcia się przedłużeń prętów 3 i 5, t.j. względem węzła D .

Z otrzymanej odpowiedzi wynika: ponieważ $S_5 > 0$ lot siły S_5 obraliśmy trafnie - pręt jest więc ściskany. Gdyby lot był założony mylnie, to ujawniłoby się to tem, że w odpowiedzi dla S_5 wypadłaby wartość ujemna.

113. Sposób Rittera nieraz musi być zastosowany w postaci odmiennej od poprzedniej. Naprz. niech będzie wymagane znalezienie siły w pręcie 8 poprzedniej kratownicy /rys.96/.

W tym celu przecinamy kratownicę wzdłuż linii YY tak, aby przeciętych prętów było najwyżej trzy i aby między nimi był pręt 8. Gdybyśmy chcieli pójść tą samą drogą, co w paragrafie poprzednim, należałoby znaleźć sumę momentów statycznych wszystkich sił, działających na lewą część kratownicy /siły te są: $A, P_1, P_2, P_3, S_6, S_7, S_8$ / względem punktu, znajdującego się w przecięciu się prętów 6 i 7. Ponieważ w danym przypadku pręty 6 i 7 są równoległe, przeto punktu przecięcia się nie znajdziemy i o momentach statycznych nie będziemy mogli mówić. Wobec tego zastosujemy inne twierdzenie ze statyki, głoszące, że jeśli układ sił jest w równowadze, suma rzutów wszystkich sił na jakąkolwiek oś jest równa zeru.

W danym przypadku obieramy oś pionową, skierowaną dajmy na to, na dół.

Suma rzutów wspomnianych sił będzie:

$$-A + P_1 + P_2 + P_3 + S_8 \cdot \cos \alpha = 0.$$

Rzuty sił S_6 i S_7 są, oczywiście, równe 0; wobec tego siły S_6 i S_7 w równanie nie wejdą; dlatego też, nawiasem mówiąc, taki kierunek osi /pionowy/ obraliśmy.

Z ostatniego równania znajdujemy:

$$S_8 = \frac{1}{\cos \alpha} (A - P_1 - P_2 - P_3);$$

Ponieważ $A = \frac{1}{2} (P_2 + P_2 + \dots + P_6)$,

więc

$$S_8 = \frac{1}{2 \cos \alpha} (-P_1 - P_2 - P_3 + P_4 + P_5 + P_6).$$

Ze względu na założoną symetrię sił $P_1 = P_6$; $P_2 = P_5$; $P_3 = P_4$

więc

$$S_8 = \frac{1}{2 \cos \alpha} \cdot 0 = 0$$

Oczywiście wynik, że $S_8 = 0$, jest tylko szczególnym przypadkiem.

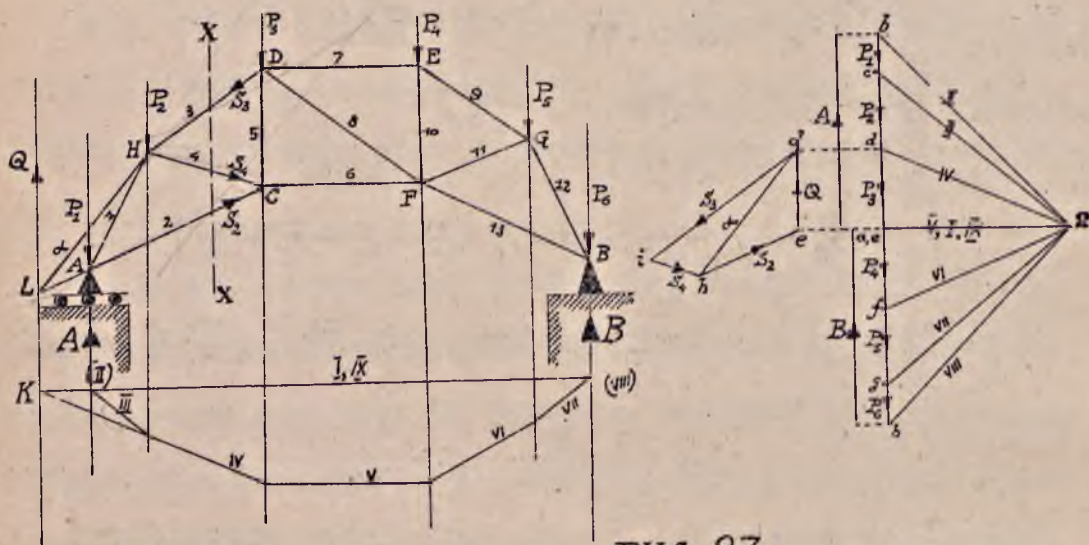
Wogóle otrzymalibyśmy pewną wartość na S_8 .

Gdyby otrzymana wielkość była dodatnią, lot siły S_8 założony na początku zadania, byłby skuszny, czyli pręt byłby rozciągany; gdyby zaś z ostatniego równania otrzymana wielkość była ujemną, byłoby to wskazówką, że lot siły jest odwrotny do założonego, czyli, że pręt byłby ściskany.

114. WYZNACZANIE SIŁ W PRĘTACH SPOSOBEM CULMANNA.

Sposób Culmanna również pozwala obliczać siłę, działającą w dowolnym pręcie kratownicy, bez wyznaczania sił, w poprzedzających prętach. Różni się ten sposób od sposobu

Rittera tem, że posługujemy się w nim rozkładem siły na trzy składowe wykreślnie, a nie metodą momentów stycznych lub rzutów sił - rachunkowo, jak w sposobie Rittera.



RYS. 97.

Na rys.97 wskazane jest zastosowanie sposobu Culmanna do wyznaczenia siły w pręcie 4. Przedewszystkiem znajdujemy odpory A i B . Dalej, jak w metodzie Rittera, wyobrażamy sobie przecięcie XX tak, aby zostały przecięte tylko 3 pręty /3,4,2/ i między nimi pręt 4. Znajdujemy następnie wypadkową Q sił zewnętrznych A, P_1, P_2 działających na lewą część kratownicy; wreszcie wypadkową Q zrównowazamy z trzema siłami w kierunkach prętów 2, 3 i 4.

Wypadkową Q znajdujemy wykreślnie zapomocą wieloboku sił i wieloboku sznurowego.

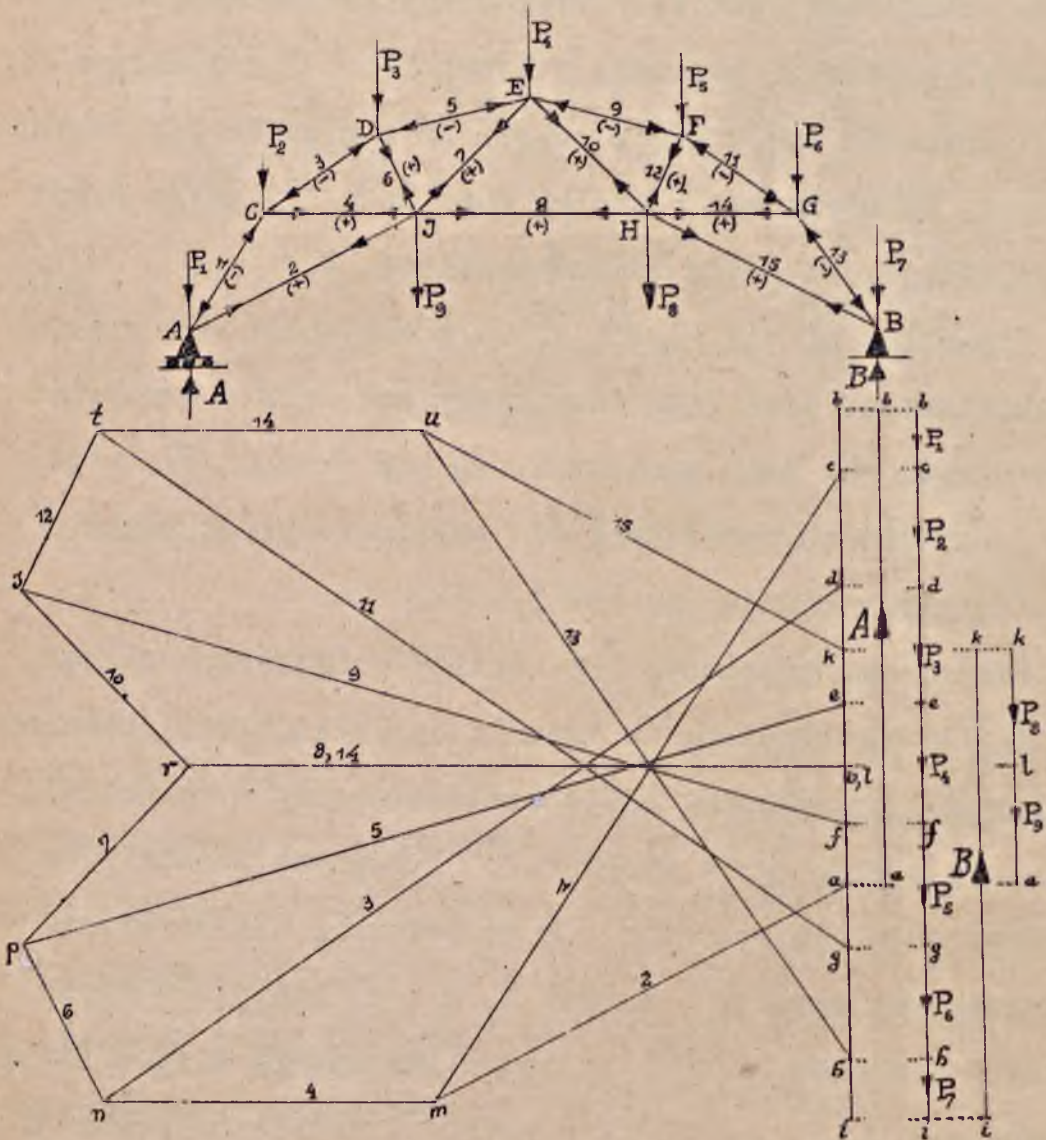
Postępujemy tu w sposób, objaśniony w paragrafach 25, 29. Wobec symetrii kratownicy i sił, do niej przyłożonych, otrzymujemy niektóre osobliwości w wykresie wieloboku sznurowego: bok II i VIII giną, zamieniając się w punkty, w których przecina się bok III z linią odporu A , względnie bok VII z linią odporu B ; pozatem bok zamykający I, IX ułoży się równolegle do boku V i wobec tego promienie I, IX pójda wzdłuż promienia V.

Wypadkowa Q sił A, P_1, P_2 — w wieloboku sił $abcd$ przedstawiona jest jako zamykający bok ad . Ponieważ przed siłą Q mamy promień I, za nią promień IV, więc linia działania wypadkowej Q przejdzie przez punkt K , w którym przecinają się bok I i IV.

Znalezioną wypadkową Q należy zrównoważyć siłami 2, 3 i 4. Postępujemy tu zgodnie ze wskazówkami, podanymi w par.23: przedłużamy linię działania siły 2 do przecięcia się z siłą Q w punkcie L i łączymy punkty H z L prostą α . Na wykresie — w sąsiedztwie wieloboku sił — równoważymy siłę Q siłami 2, 3 i 4, budując w znany sposób wielobok $edib'$; z niego znajdujemy siłę 4 równą odcinkowi $\overline{ib'}$. Siła ta w pręcie 4 działa na prawo od rozpatrywanej części lewej, czyli że pręt 4 jest z taką siłą rozciągany. Wreszcie jednocześnie znajdujemy siły

w prętach 2 i 3, przyczem wnioskujemy, że pręt 2 jest rozciągany, pręt 3 - ściskany.

115. JAK WYKONAĆ WYKRES CREMONY, KIEDY WSZYSTKIE WĘZŁY KRATOWNICY SĄ OBCIĄŻONE ? Jeśli siły zewnętrzne



Rys. 98.

działając jednocześnie na węzły górnego i dolnego pasa kratownicy, wyznaczamy naprzód odpory; następnie wykreślamy wielobok wszystkich sił, działających na kratownicę, zważając, aby ustawić je w takim porządku, w jakim je napotykamy, obchodząc dokoła zewnętrznego obrysu kratownicy. W przykładzie więc, przedstawionym na rys. 98, siły te powinny być złożone w sposób następujący: $A, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, B, P_8, P_9$; wielobok powyższych sił, który musi być zamknięty biegnie od a przez $b, c, d, e, f, g, h, i, k, l$ do a^x . Następnie budujemy właściwy wykres Cremony, zaczynając od węzła A . Siły zewnętrzne, działające na ten węzeł są to A i P_7 , wypadkowa ich jest równa odcinkowi \overline{ac} , a więc, kreśląc z końców jego równoległe do prętów 1 i 2, otrzymamy, że szukane siły w tych prętach wynoszą \overline{cm} i \overline{ma} .

Dalej przechodzimy do węzłów C, D, J, F, G, H, B , postępując według prawideł, wyłożonych w par. 111 bez żadnych trudności. Łatwo przekonać się, że gdybyśmy siły ułożyli w wieloboku sił w innym, niż wskazany porządku, otrzymalibyśmy wykres sił bardzo zawiły i nieprzejrzysty, przytem trzeba byłoby na wykresie powtarzać niektóre siły.

116. KRATOWNICA POLONCEAU. Sposób Cremony może być zastosowany do każdej kratownicy, statycznie wyznaczalnej,

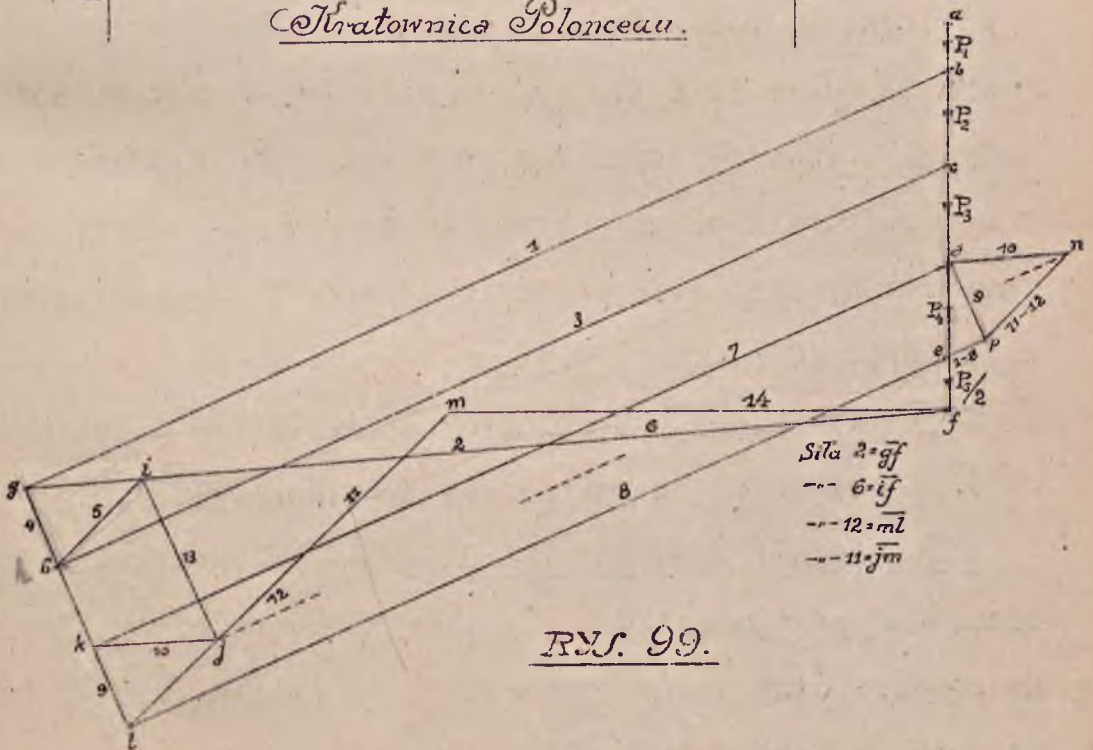
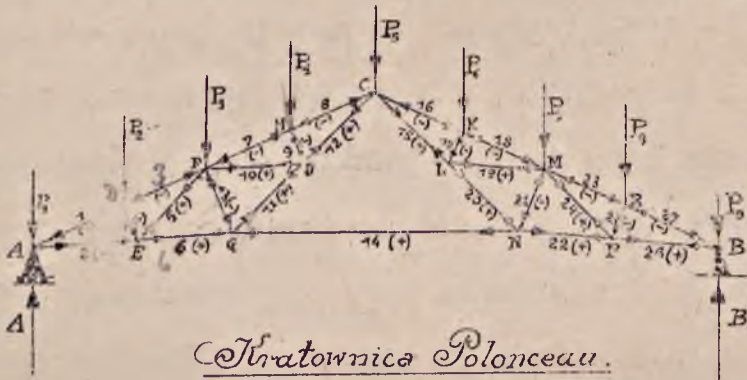
x/Dla większej jasności wielobok ten, który właściwie stanowi jedną prostą, schematycznie rozłożony jest na kilka części tak, aby siły, biegnące w różnych kierunkach, nie przykrywały się wzajemnie.

naogół bez trudności. Zdarzają się jednak pewne zadania, które szablonowo rozwiązać się nie dają. Do tych, właśnie, należy kratownica dachowa syst. Polonceau, trzykrotnie podpięta /kratownica Polonceau raz podpięta żadnych trudności nie nastręcza/. Kratownicę Polonceau trzykrotnie podpiętą mamy przedstawioną na rys.99. Wykres sił w prętach wykonywamy w taki sposób: rozpoczynamy budowę wykresu Cremony, jak zwykle, od węzła A , przechodzimy następnie do D , dalej do E , a stąd należałoby przejść do G lub do F . Lecz w G mamy trzy nieznanne siły 11, 13, 14; w F - również trzy - 7, 10, 13. Wobec tego nie możemy prowadzić dalej wykresu i trzeba by uciec się do wykresu pomocniczego.

Rozpatrujemy, mianowicie, węzeł H . Działa nań siła zewnętrzna P_4 oraz siły w prętach 7,8,9. Równoważymy ową siłę P_4 trzema siłami, z których dwie mają wspólną linię działania, równoległą do prętów 7 /lub 8/, trzecia jest równoległa do pręta 9. Działanie to mamy wykonane na rozpoczętym poprzednio wykresie po lewej stronie wieloboku sił. Odcinek \overline{ep} przedstawia oczywiście RÓŻNICĘ sił w prętach 7 i 8, a \overline{dp} jest to siła, działająca w pręcie 9. Siła 9 ma lot od p do d , czyli że pręt 9 jest ściśkany.

Dalej rozpatrujemy węzeł J . Działają nań cztery siły w prętach 9, 10, 11, 12. Z tych pierwsza siła jest już

znana. Zrównoważmy siłę 9 siłami 10, 11, 12, z których dwie: 11 i 12 mają wspólną linię działania. Otrzymamy w trójkącie dpn : siłę pn równą RÓŻNICY sił w prętach 11 i 12, a nd - siłę w pręcie 10. Lot siły 10 jest od n do d , czyli że pręt 10 jest rozciągany.



Tak więc znaleźliśmy już siłę 10; możemy teraz wrócić do węzła F' , w którym pozostają obecnie dwie niewiadome 7 i 13, dające się wyznaczyć zwykłą drogą. Należy tylko wskazać, jak się wstawia znaleziony odcinek \overline{nd} [= siłę 10/ do rozpoczętego wykresu. Siły 3, 5, P_3 razem z siłami 10, 7 i 13 mają tworzyć wielobok zamknięty; zatem przez punkt i prowadzimy równoległą do pręta 13, a przez d - równoległą do 7; należy teraz wstawić między siły 7 i 13 siłę 10, którą już poprzednio znaleźliśmy; to się nam uda, jeśli z punktu n poprowadzimy prostą równoległą do siły 7, aż do przecięcia się z siłą 13 w punkcie j i następnie z j poprowadzimy prostą równoległą do siły 10 do punktu k . Wówczas dostrzeżemy, że \overline{kj} = siłę 10, \overline{ji} = siłę 13, a \overline{dk} = siłę 7. Loty sił, równoważących się przy węźle F' , biegną więc w wieloboku sił od c przez d, k, j, i, b do c . Znaleźliśmy więc siłę w pręcie 5 /pręt jest rozciągany/, w 13 /pręt ściskany/ i t.d.

W dalszym ciągu przechodzimy do węzła G , potem do J, H, C , i t.d., trzymając się prawideł ogólnych.

117. WIĄZARY DACHOWE. SIŁY PIONOWE. W paragrafach poprzednich przyjmowaliśmy, że siły zewnętrzne, działające na poszczególne węzły kratownicy, są zadane. Należy teraz wskazać, w jaki sposób obliczamy te siły.

Przedewszystkiem rozróżniamy dwa rodzaje sił zewnętrz-

nych /poza odporami/: siły PIONOWE i UKOŚNE. Pierwsze siły są uwarunkowane działaniem ciężarów, ukośne zaś działaniem wiatru.

W paragrafie tym pomówimy o siłach pionowych, przyłożonych do żelaznych kratownic dachowych, zwanych inaczej WIĄZARAMI dachowymi.

Wiązar każdy, złożony z prętów, wykonanych z żelaza o różnych przekrojach, ma pewien ciężar. Przystępując do zaprojektowania wiązaru dachowego, nie znamy ani wymiarów, ani zatem ciężarów pręta, z których kratownica ma być wykonana. Korzystamy więc z danych, opartych na istniejących już wiązarach.

W "Techniku" lub w innych podręcznikach znajdziemy ciężary własne wiązarów. Ciężar wiązara żelaznego można przyjąć $p_w = 15 \sim 30 \text{ kg/m}^2$ rzutu poziomego strzechy. Większa wartość odpowiada większym rozpiętościom i odwrotnie. Ciężar powyższy jest też zależny od odstępów między wiązarami /odstępów stosujemy zwykle $3 \sim 4 \text{ m.}$, nieraz większe/.

Wiązary dachowe służą do podtrzymania pokrycia dachowego /kryćby/; prócz tego, czasami, do zawieszenia stropu.

Kryćbę układamy na deskach, przybitych do płatwi, które są umocowane do wiązarów, najczęściej w węzłach górne-

go pasa. W podobny sposób - do węzłów dolnych wiązara zawieszają się, o ile zachodzi potrzeba, strop.

Ciążar kryłoby wraz z płatwiami, deskami zależy od rodzaju pokrycia /dachówką, blachą, łupkiem, szkłem i t.p./.

Naprz. ciężar pokrycia

pojedynczego dachówką	wynosi 90 kg. na 1 m ²	pochyłej po-	łaci.
podwójnego	" " 120 " " "	" "	" "
blachą żelazną ocynkowaną			
lub blachą cynkową	40 " " "	" "	" "
łupkiem	85 " " "	" "	" "
szkłem	20 ~ 30 " " "	" "	" "
tekturą smołowcową	35 " " "	" "	" "
"holcementowego"	130 " " "	" "	" "

W podobny sposób mamy dany CIĘŻAR 1 m² STROPU zależnie od wykonania od 200 do 350 kg/m².

Prócz poprzednich ciężarów, stale działających na wiązara, należy jeszcze uwzględnić CIĘŻAR ŚNIEGU. Dla naszych warunków przyjmujemy 75 kg na 1 m² rzutu POZICMEGO.

Nadmienić należy, że na dachach, których połacie tworzą z poziomem kąt większy niż 45°, śnieg utrzymuje się z trudnością; dla takich dachów ciężaru śniegu uwzględniać nie potrzeba.

Również podczas wiatru śnieg nie utrzymuje się na

dachu z tej strony, z której wiatr dmie; w tym też przypadku można nie brać pod uwagę ciężaru śniegu.

Kiedy ustaliliśmy ciężary zarówno więzaru, jak kryćby, stropu i śniegu, można będzie łatwo obliczyć ciężar, przypadający na którykolwiek więzar.

Niech rozpiętość więzaru = l ; odstęp między sąsiednimi więzarami = b , następnie oznaczymy ciężar własny więzaru /na 1 m^2 rzutu poziomego/ przez ρ_w ; ciężar kryćby /na 1 m^2 powierzchni pochyłej/ przez ρ_k ; stropu /na 1 m^2 rzutu poziomego/ przez ρ_s ; śniegu /na 1 m^2 rzutu poziomego/ — ρ_s , wreszcie długość obrysu górnego kryćby przez l_0 .

Przy powyższych oznaczeniach znajdziemy ciężary, przypadające na którykolwiek z więzarów:

a/ od własnego ciężaru więzara i kryćby:

$$Q_1 = b(l\rho_w + l_0\rho_k),$$

b/ od ciężaru stropu:

$$Q_2 = bl\rho_s$$

c/ od ciężaru śniegu pokrywającego tylko części dachu, naprz. połowę:

$$Q_3 = \frac{1}{2} bl\rho_s' .$$

Każdą z sił Q_1, Q_2, Q_3 należy rozrzucić na poszczególne węzły więzara. Jakkolwiek na każdy z węzłów przypadać może inny ciężar, to zwykle jednak:

a/ Siłę Q_1 rozkładamy na górne węzły, przytem na

wszystkie, z wyjątkiem dwóch skrajnych, przyjmujemy jednako-
kowe siły; na skrajne węzły po połowie tej siły; jeśli,
dajmy na to, górnych węzłów będzie n_1 , wtedy a każdy
pośredni węzeł przyjmujemy siłę $P_1 = \frac{Q_1}{n_1-1}$, zaś na każdy
skrajny siłę $= \frac{P_1}{2} = \frac{Q_1}{2(n_1-1)}$. Gdyby nam chodziło o za-
łożenie bliższe do prawdy, można ciężar wiażaru rozrzucić
na wszystkie węzły górne i dolne - więcej naprz. $\frac{2}{3}$ całej-
go ciężaru na górne, mniej /naprz. $\frac{1}{3}$ całego ciężaru/na
dolne; zaś ciężar kryćby - tylko na górne węzły.

b/ Siłę Q_2 - rozkładamy na dolne węzły; jeśli węzłów
dolnych mamy n_2 , wówczas na każdy pośredni węzeł przy-
mujemy siłę $P_2 = \frac{Q_2}{n_2-1}$, zaś na każdy skrajny siłę =
 $= \frac{P_2}{2} = \frac{Q_2}{2(n_2-1)}$.

c/ Siłę Q_3 rozkładamy na górne węzły tej części wią-
zaru, nad którą przyjmujemy śnieg. Na skrajne węzły tej
części przyjmujemy $\frac{1}{2}$ siły, przypadającej na każdy z po-
zostałych węzłów.

Dla uproszczenia roboty bardzo często przyjmujemy, że
śnieg działa na całą powierzchnię kryćby i wówczas siłę

$Q_3 = bl\rho_s$ łączymy z siłą $Q_1 = b(\gamma_w + l_0\rho_k)$; sumę
tych sił $Q_1 + Q_3$ rozkładamy na górne węzły wiażaru tak, jak
to było powiedziane w p.a/.

Przy tem założeniu pręty wiażara znajdują się wogóle w
gorszych warunkach, niż gdyby założyć rozkład sił bliższy
rzeczywistości; skutkiem tego wymiary prętów otrzymują się

większe, bezpieczniejsze.

118. Na przykładzie więzara dachowego, przedstawionego na rys.100, obliczone zostały siły, wywołane w prętach więzara ciężarem własnym i śniegu.

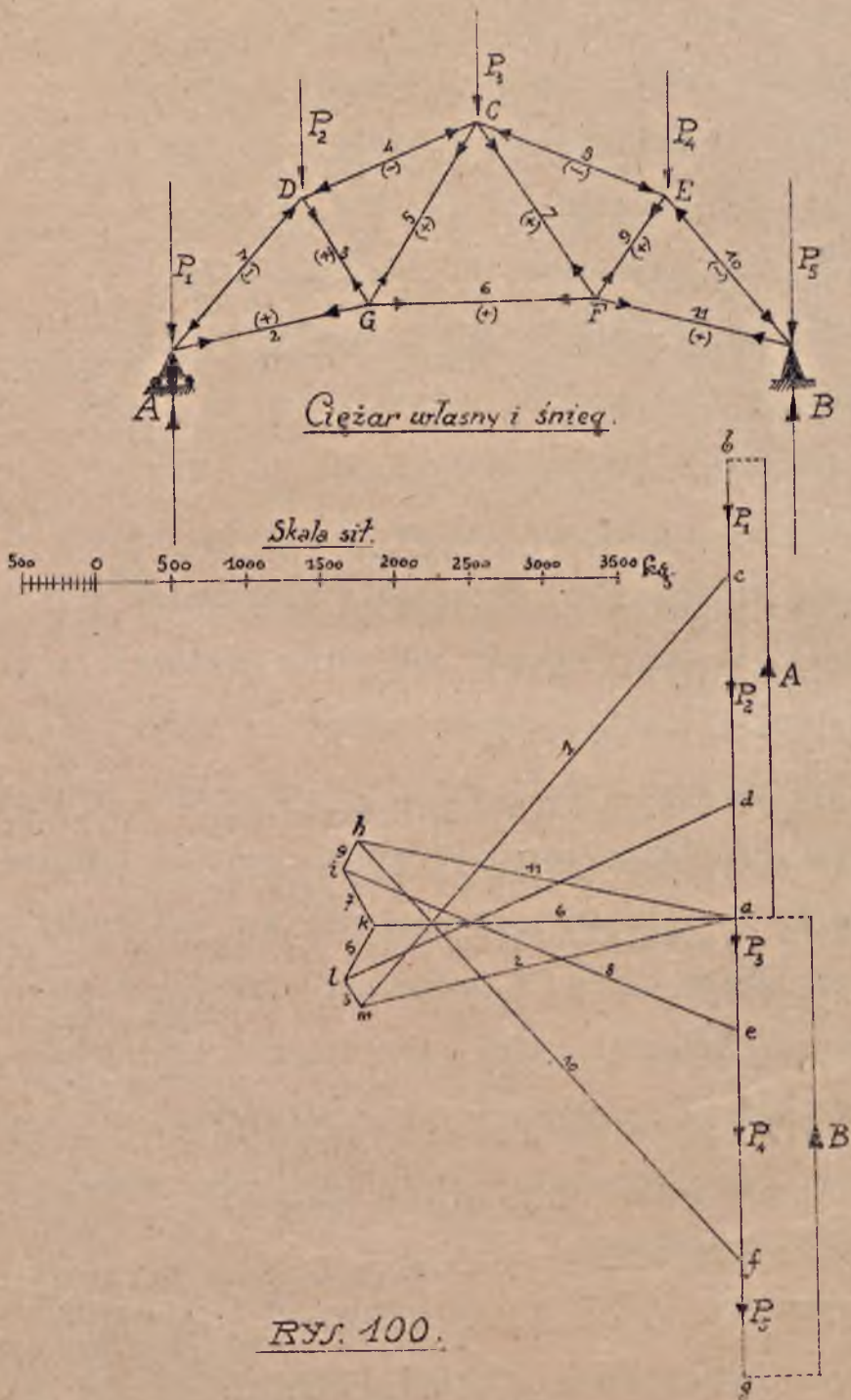
Siły te obliczone z wykresu, zebrane zostały w tabelce, pomieszczonej w par.123. W tabelce tej podane są jeszcze inne dane, o czym mowa niżej.

119. SIŁY UKOŚNE. PARCIE WIATRU NA WIAZARY DACHOWE.

Oprócz sił pionowych, powstających od ciężaru własnego materiału, z którego wytworzona jest krycha oraz ciężaru śniegu, na więzary dachowe działają jeszcze siły ukośne wiatru. Przy obliczeniu kratownicy siły te uwzględnia się w sposób cokolwiek odmienny, niż siły pionowe, i dlatego wypada sprawę tę omówić oddzielnie.

Kierunek wiatru tworzy z poziomem kąt, wynoszący około 10° . Chcąc uprościć sobie rachunek będziemy przyjmowali, że siła ta jest pozioma; nie popełnimy przez to znacznego błędu, a natomiast ułatwimy sobie wykonanie wykresu. Zresztą, żadnej zasadniczej trudności, prócz niedogodności o charakterze kreślarskim, nie napotkaliśmy, gdybyśmy chcieli uwzględnić owo pochylenie wiatru do poziomu.

Wyobraźmy sobie płaszczyznę AB /rys.101/ o polu F , ograniczoną dowolną krzywą zamkniętą; przypuśćmy, że płaszczyzna ta jest pionowa, a więc prostopadła



RYJ. 100.

do przyjętego kierunku wiatru. Doświadczenie wskazuje, że siła, z jaką wiatr działa na tę płaszczyznę, wynosi

$$P = \rho \cdot F$$

gdzie ρ oznacza t.zw. CIŚNIENIE JEDNOSTKOWE, t.j. siłę parcia wiatru na jednostkę pola. Dalej z doświadczenia otrzymujemy, że

$$\rho = \varphi \cdot v^2 \dots \dots (1)$$

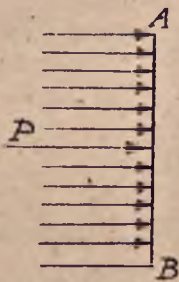
gdzie v oznacza prędkość wiatru

w m/sek., zaś φ jest to pewien stały współczynnik, który fizycznie wyraża ciśnienie na jednostkę pola przy prędkości wiatru = 1 m/sek. Siła P , jako wypadkowa parcia wiatru, RÓWNOMIERNIE rozłożonego, przechodzi przez środek ciężkości pola F .

Różni badacze otrzymali dla φ rozmaite wartości, wahające się w nieznacznych granicach. Przyjmijemy średnio $\varphi = 0,13$.

Prędkość wiatru może być różna: od 0 do 50 m/sek. Gdy $v = 50$ m/sek., to z /1/ otrzymamy $\rho = 0,13 \cdot 2500 = 325$ kg/m². W naszych warunkach silny wiatr ma prędkość 30 - 35 m/sek. najwyżej. Stąd otrzymujemy $\rho = 120 - 160$ kg/m². Zazwyczaj przyjmujemy $\rho = 125 \sim 150$ kg/m².

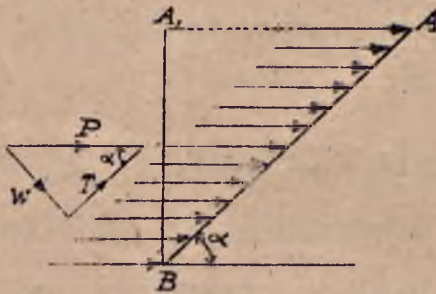
120. PARCIE WIATRU NA PŁASZCZYZNI POCHYLEJ. Jeśli



Rys. 101.

płaszczyzna F nie jest prostopadła do kierunku wiatru, a tworzy z poziomem kąt α /rys.102/, to całkowite parcie wiatru na tę płaszczyznę, zgodnie z doświadczeniem, jest takie, jak gdyby wiatr działał na pole, będące rzutem danej płaszczyzny na płaszczyznę pionową.

Tak więc
$$P = \rho \cdot \overline{A_1 B} = \rho \cdot AB \cdot \sin \alpha$$



RYŚ. 102.

albo, oznaczając pole AB przez F otrzymamy:

$$P = \rho F \sin \alpha .$$

Całkowite parcie P rozłożymy na dwie składowe: styczną

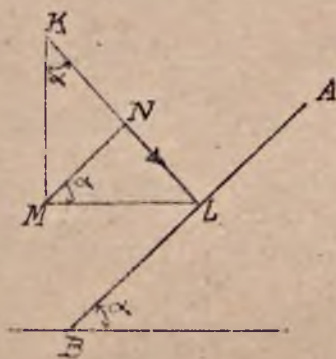
$/ T /$ do płaszczyzny i normalną $/ W /$ do niej. Pierwsza składowa powoduje tylko ślizganie się cząstek powietrza po danej płaszczyźnie i niema dla kratownicy żadnego znaczenia. Ważne jest jedynie działanie składowej NORMALNEJ, która wynosi $W = P \sin \alpha$, albo

$$W = \rho F \sin^2 \alpha \dots \dots \dots /2/$$

Wzór ten można łatwo zbudować wykreślnie /rys.103/ w ten sposób: odmierzamy na prostopadłej do danej płaszczyzny AB odcinek KL , równy iloczynowi $\rho \cdot F$. Przez punkt L prowadzimy poziomą, przez K - pionową, a przez ich punkt przecięcia się M - prostopadłą

do KL ; otrzymamy punkt N . $ML = \rho \cdot F \sin \alpha$, a $NL = ML \sin \alpha$
 $= \rho \cdot F \sin^2 \alpha = W$. Z tego wynika, że odcinek NL jest

równy szukanej normalnej sile
 parcia wiatru W .



rys. 103.

121. OBLICZANIE WIAZARA
PODDANEGO DZIAŁANIU WIATRU.

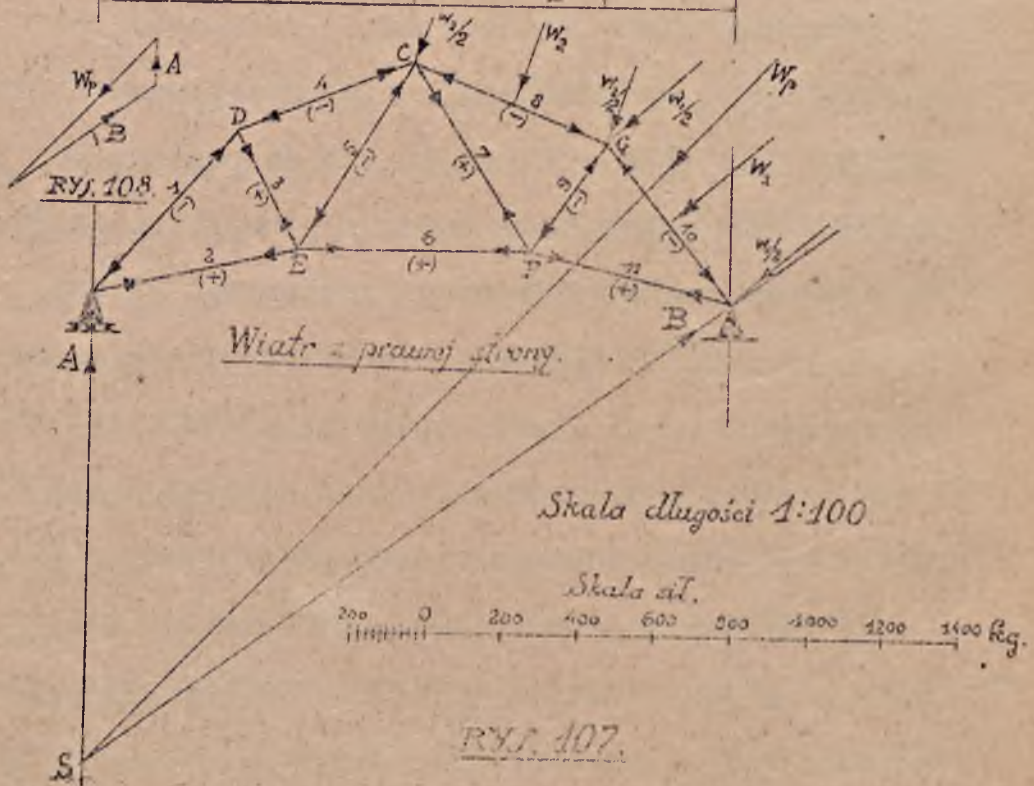
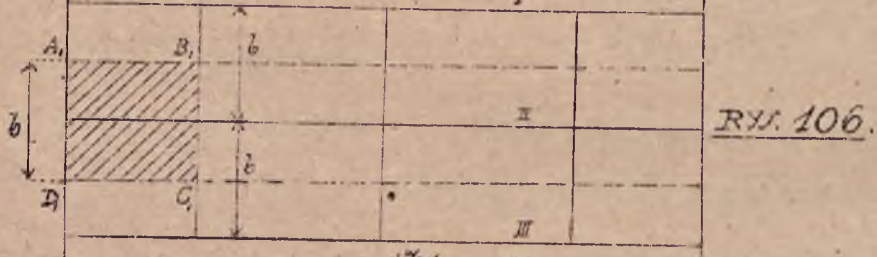
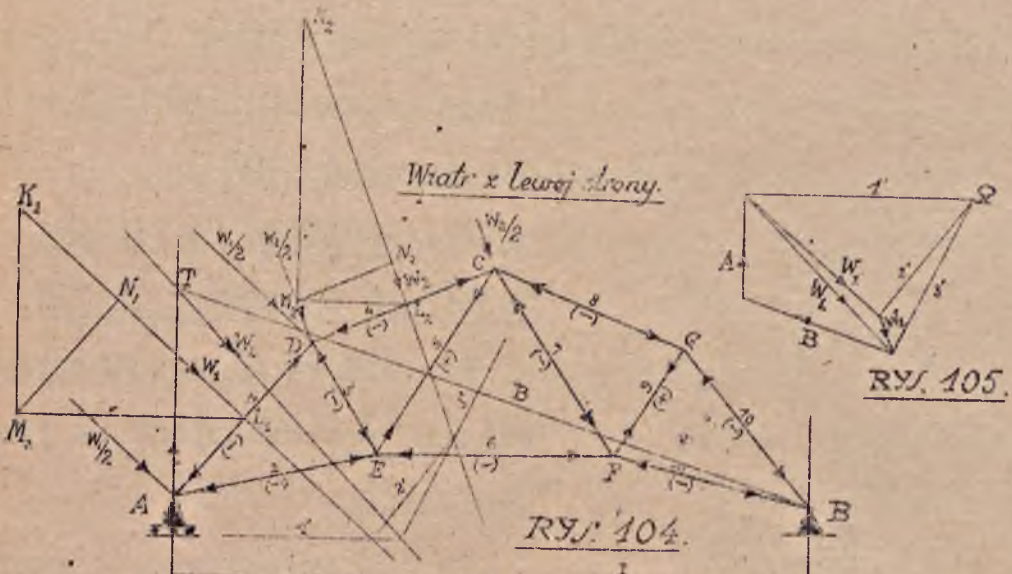
Dla przykładu rozpatrzmy
 wiażar, przedstawiony na rys.
 104 - 110.

Kryćba opiera się na szere-
 gu wiażarów /I, II, III/, usta-

wionych równolegle jeden do drugiego, zwykle w jednako-
 wych odstępach /rys.106/.

Pokrycie tworzy powierzchnię, składającą się z 4-ch
 płaszczyzn, przedstawionych w rzucie pionowym prostymi
 AD, DC, CG, GB , pochylonych do poziomu pod różnemi
 kątami. Wiatr działa na każdą z nich z inną siłą, wypa-
 da więc do każdej oddzielnie zastosować budowę, wskaza-
 ną na rys.103. Przypuśćmy, że wiatr działa z lewej stro-
 ny wiażara, zatem działa tylko na płaszczyzny AD i DC
 - na pozostałe płaszczyzny wiatr działania nie wywiera.
 Obliczmy, jakie jest parcie na płaszczyzny AD i DC .

Na każdy wiażar przypada połowa parcia wiatru, wywie-
 ranego na płaszczyznę, zawartą pomiędzy dwoma przyległe-
 mi wiażarami /rys.105/. Na skrajne wiażary przypada



mniejsze obciążenie, niż na wewnętrzne, dlatego też dla bezpieczeństwa należy rozpatrzyć ten ostatni.

Jeśli odstęp między wiązarami są $= \hat{b}$, siła wiatru, która działa na płaszczyznę AD , należąca do jednego wiązara, wynosi $\rho \hat{b} AD$. Odcinek, równy temu iloczynowi trzeba odmierzyć na prostopadłej do rozpatrywanej płaszczyzny w jej środku L_1 , a dalej należy postąpić, zgodnie z par.115. Stosując się do wyłożonego tam prawidła, otrzymamy, że siła, którą istotnie wywiera wiatr na AD , jest równa $W_1 = N_1 L_1$.

Podobnie dla płaszczyzny DC otrzymamy siłę $W_2 = N_2 L_2$. Parcie całkowite wiatru dmącego z lewej strony znajdziemy jako wypadkową sił W_1 i W_2 . Wypadkową W_2 wyznaczamy łatwo za pomocą wieloboku sił i wieloboku sznurowego, co jest wykonane na rys.104 i 105.

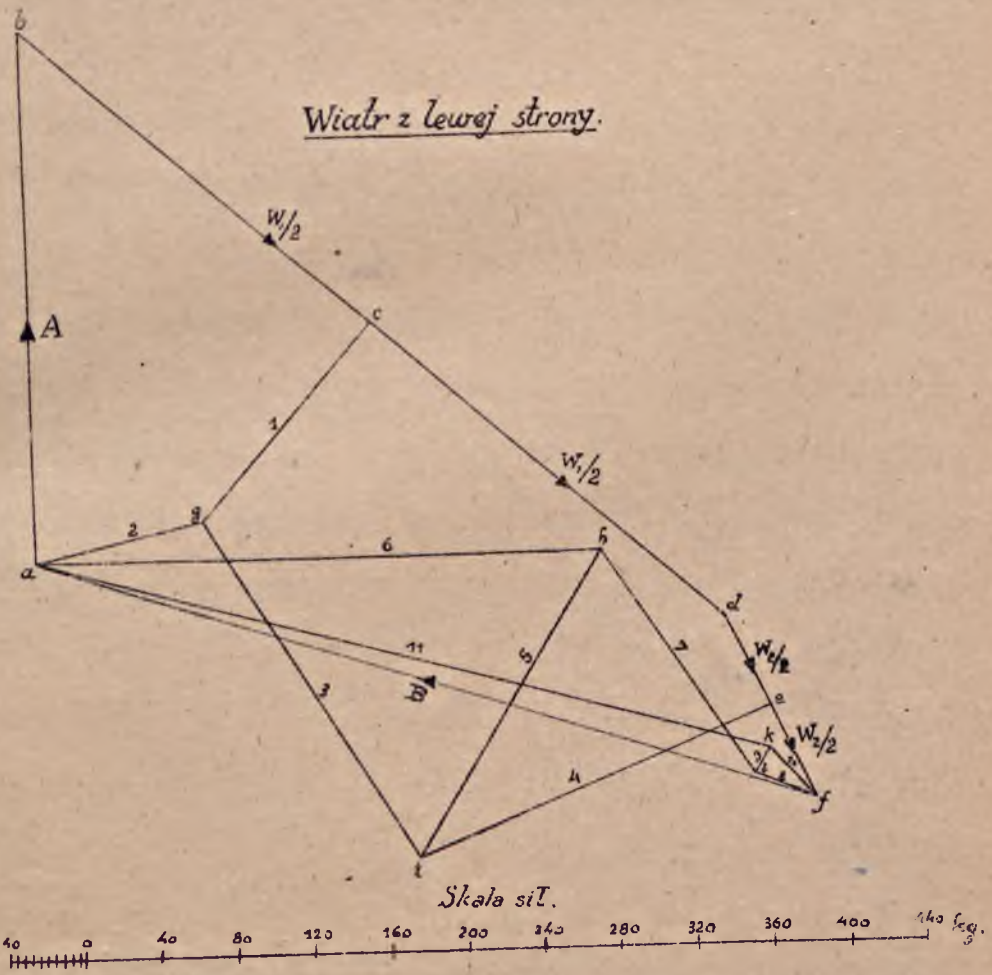
Jeśli przyjmiemy, że na wiązar działa jedynie siła wiatru, to siła ta musi się równoważyć z oporami A i B .

Pierwszy z nich jest pionowy /podpora na wałkach/; kierunek drugiego oporu otrzymamy, łącząc punkt T przecięcia się W_1 z A - z punktem B . Mając kierunki oporów A i B , wyznaczymy je co do wartości za pomocą wieloboku sił /rys.105/.

Gdy wiatr działa z prawej strony /rys.107/, wówczas działanie jego jest jedynie na płaszczyzny CQ i GB .

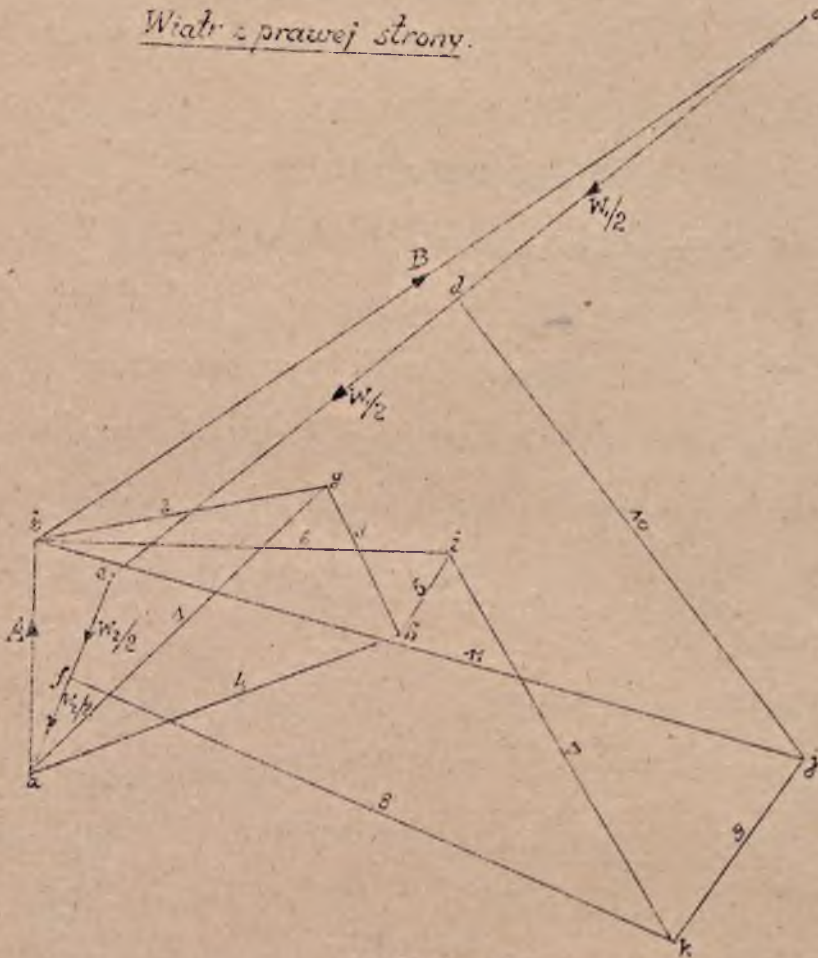
Oczywiście, działanie na pierwszą z nich wynosi W_2 /gdyż jest ona symetryczna względem DC /, a na drugą W_1 . Wypadkowa W_p /tych sił W_1 i W_2 / będzie symetrycznie skierowana względem W_L . Odpory A i B znajdziemy z tego warunku, że odpór A jest pionowy i przecina się z siłą W_p w punkcie S ; kierunek drugiego odporu B znajdziemy, połączymy punkt B z S . Mając obydwa kierunki odporów A i B , wyznaczmy wartości tych odporów, jak na rys.108. Widać jest, że odpory A i B , a wskutek tego również siły, powstające w prętach więzara, są w tym razie inne, niż poprzednio. Wobec tego należy rozpatrywać działanie wiatru z prawej strony oddzielnie, z lewej strony oddzielnie.

Wróćmy do przypadku, gdy wiatr dmie z lewej strony. W tym razie na węzeł A działa odpór A oraz połowa siły W_1 . Na węzeł D działa druga połowa W_1 i połowa W_2 , na C - druga połowa W_2 ; na G , E i F nie działa żadna siła; na B - jedynie odpór B , znaleziony na wykresie rys.105. Kiedy mamy wyznaczone siły, działające na poszczególne węzły, możemy przystąpić do wykresu Cremony, co jest wykonane na rys.109. Zaczynamy, zgodnie z prawidłem od węzła A , i idziemy przez węzły D, E, C, G, F do B . Nawiasem dodamy, że dla wyprostności na rys.109 skala sił obraną została

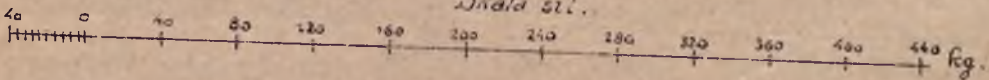


RYS. 109.

Wiatr z prawej strony.



Skala sił.



RY. 110.

znacznie większą, niż na rys. 104 i 105.

Zupełnie tak samo postępujemy w tym przypadku, gdy wiatr działa z prawej strony /rys. 107/. W tym razie na węzeł A działa jedynie odpór A , na D, E, F nie działają żadne siły, na $C - \frac{W_2}{2}$, na $G - \frac{W_2}{2}$ i $\frac{W_1}{2}$; wreszcie na B - odpór B i $\frac{W_1}{2}$.

Odpowiedni wykres Cremony mamy na rys. 110.

122. ZESTAWIENIE WYNIKÓW OBLICZENIA WIĄZARA. W paragrafie 118 była mowa o określeniu sił w prętach pod działaniem ciężaru własnego i śniegu; siły znaleźliśmy przy pomocy wykresu, podanego na rys. 100. W par. 122 wskazane było, jak należy szukać sił w prętach pod działaniem wiatru, dmącego z prawej lub lewej strony; siły te obliczyliśmy przy pomocy wykresów na rys. 109 i 110.

TABELKA.

№ pręta.	Siły wywołane			Siły do obliczenia pręta	Długość pręta	Wynia- ny pręta.
	ciężarem własnym i śniegu.	wiatrem z lewej stro- ny.	wiatrem z prawej strony.			
1	-3750	-135	-215	-3965	2.65	
2	+2600	-90	+155	+2755	2.70	
3	+250	-200	+85	+335	1.65	
4	-2850	-200	-210	-3060	2.50	
5	+425	+185	-50	+610	2.70	
6	+2425	-295	+220	+2645	3.00	
7	+425	-140	+230	+655	2.70	
8	-2850	-30	-345	-3195	2.50	
9	+250	+15	-120	+265	1.65	
10	-3750	-30	-300	-4050	2.6	
11	+2600	-395	+420	+3020	2.7	

Wyniki,
otrzymane
z tych
obliczeń
zestawiamy
w tabelce
poniższej:

Tabelka zawiera siedem kolumn: w pierwszych czterech zapisujemy wartości sił w prętach, a to z wykresów rys. 100, 109 i 110. W szóstej kolumnie notujemy z rys. wiązara /rys. 100, 104, 107/ długości prętów; w piątej piszemy największe siły, jakie się mogą okazać w prętach przy jednoczesnem działaniu ciężaru własnego oraz śniegu i wiatru. Np. dla pręta I wszystkie siły są ściskające. Gdy działa prócz ciężaru właściwego i śniegu wiatr z lewej strony, to siła ściskająca pręta I jest równa $3750 + 135 = 3885$ kg.; przy działaniu wiatru z prawej strony siła ściskająca wynosi $3750 + 215 = 3965$ kg. Widzimy, że ta wartość siły, jako większa, jest miarodajna do obliczenia wymiarów pręta, to też tę siłę zapisujemy w rubryce piątej. Nie raz należy pisać tam dwie wartości, mianowicie siłę ściskającą i rozciągającą, gdyż niewiadomo z góry, która z nich da większe wymiary pręta.

W ostatniej rubryce pisze się wreszcie, wymiary pręta po obliczeniu ich na podstawie teorii wytrzymałości materiałów. Zagadnienie to nie należy już do naszego wykładu.

123. OBCIĄŻENIE DŹWIGARÓW MOSTOWYCH STAŁEMI SIŁAMI PIONOWYMI. Kratownicę, podtrzymującą pokład, po którym odbywa się ruch ludzi, wozów, pociągów i t.p., nazywamy DŹWIGAREM MOSTOWYM. Do obliczenia poszczególnych części dźwigara mostowego należy przede wszystkim określić

siły, które w prętach dźwigara działają; w tym celu musimy mieć dane siły zewnętrzne, przyłożone do węzłów dźwigara. Rozróżniemy zewnętrzne siły pionowe, wywołane ciężarem własnym wiązara i przedmiotów poruszających się po nim, oraz siły poziome, wywołane działaniem wiatru.

Siły pionowe rozumiemy jako obciążenie STAŁE i obciążenie RUCHOME.

Obciążenie stałe jest uwarunkowane ciężarem własnym dźwigara, pokładu z pomostownikami lub z bali, z tłucznią lub bruku, torów kolejowych i t.p.

Obciążenie stałe dźwigarów obliczamy z wzorów praktycznych, które znajdujemy w "Techniku", w kalendarzach technicznych lub w specjalnych dziełach.

Naprz. dla mostu ulicznego o rozpiętości L m, wykonanego pod jezdnię z tłucznią, znajdujemy ciężar własny:

$$q = 170 + 3,2 L + 0,028 L^2 \text{ (kg/m}^2\text{)};$$

L powinno być dane w m, i wtedy q otrzymamy w kg/m^2 .

Uwzględnić, dalej, należy ciężar pomostowników i tłucznią, wynoszący $480 + 80 = 560 \text{ kg/m}^2$.

Dla innego rodzaju mostów - stosowane są odmienne wzory.

Jeżeli mamy daną rozpiętość L mostu i szerokość B , wówczas ciężar całego mostu obliczymy z wzoru:

$$Q = L \cdot B \cdot (q + 560).$$

Niech cały most wspiera się na m / $m > 2$ / dźwigarach; wtedy na każdy dźwigar /prócz skrajnych/ przypada ciężar $Q_0 = \frac{Q}{m-1}$; jeśli $m=2$, wtedy $Q_0 = \frac{Q}{2}$.

Ciężar Q_0 rozrzucamy na węzły górne - kiedy $m > 2$, lub górne albo dolne, kiedy $m=2$. Rozkład sił wykonywamy w ten sam sposób, jak to mówiliśmy o wiązarach dachowych w par.117.

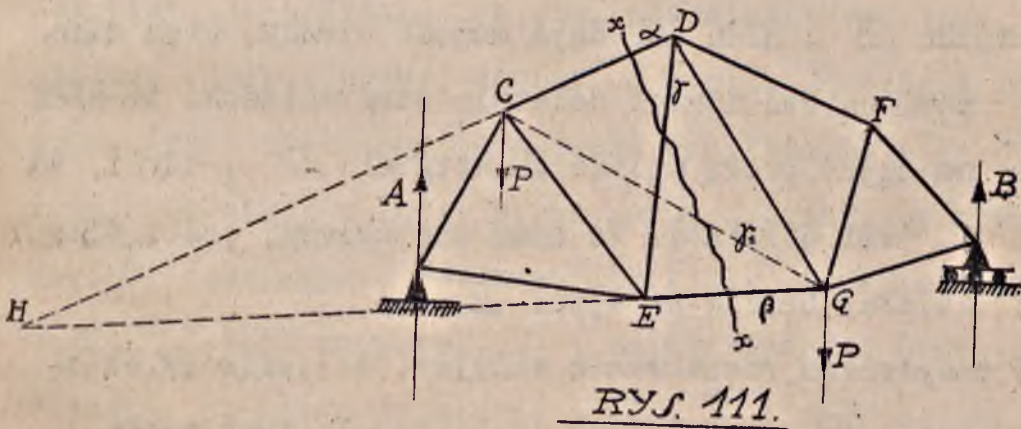
124. OBCIĄŻENIE RUCHOME DŹWIGARÓW. Obciążenie to uwarunkowane jest takim czy innym położeniem na moście tłumu ludzi, wozów, walców szosowych, parowozów z tendrami i t.p. Dane o tem obciążeniu można znaleźć w odpowiednich podręcznikach. Naprz. znajdziemy tam, że tłum ludzi wywiera obciążenie, wynoszące 400 kg/m^2 ; konny walec szosowy - 6000 kg ., parowy walec szosowy: 10 t . na przednie koło i 13 t . na obydwie tylne /rozstęp - $2,75 \text{ m}$. / i t.d.

Przy obciążeniu ruchomem ważna jest wiadomość, jaki układ tego obciążenia może być najbardziej niekorzystny dla tego czy innego pręta.

Zbadanie tej zależności będzie treścią następnych paragrafów.

125. OBCIĄŻENIE RUCHOME NIEKORZYSTNE DLA PRĘTÓW GÓRNEGO PASA DŹWIGARA. W każdym dźwigarze możemy różnić: pręty, tworzące pas górny, pręty, tworzące pas

dolny i pręty wewnętrzne. Załóżmy, że układ prętów jest taki, iż, przecinając dźwigar na dwie części, przecinamy po jednym pręcie z pasa górnego i z pasa dolnego i jeden pręt wewnętrzny. Załóżmy dalej, że: dźwigar jest podparty w dwóch krańcowych punktach i że jeden z odporów ma kierunek pionowy; obciążenie ruchome również jest pionowe. Przy takich założeniach zbadajmy sposobem Rittera, jakie będzie działanie siły P , przyłożonej do jakiegokolwiek węzła dźwigara, na dowolny pręt α górnego pasa /rys. 111/.



Roztnijmy dźwigar po linii xx na dwie części. Przy-
puśćmy, że siła P działa na jakikolwiek węzeł, znajdujący
się z prawej strony xx , naprz. w G . Rozpatrując lewą
część dźwigara, widzimy, że na nią działają siły: odpór A ,
oraz siły S_α , S_β , S_γ w prętach α , β , γ . Aby zna-

leżąc siłę S_α napiszemy równanie momentów tych sił względem węzła E . Ponieważ siła A względem E daje moment dodatni, więc siła S_α powinna dać moment ujemny; stąd wniosek, że siła S_α na część lewą działa KU węzłowi C , zatem, że pręt α jest ŚCISKANY. Ten sam rodzaj siły S_α otrzymamy, kiedy siła P przyłożona będzie do węzła D lub F . Co będzie z prętem α , kiedy siłę przyłożymy do jakiegokolwiek węzła z lewej strony przekroju xx , naprz. do węzła C ? W tym razie rozpatrzmy prawą część kratownicy, na którą działają siły: odpór B i siły w prętach $S_\alpha, S_\beta, S_\gamma$. Znajdźmy siłę S_α ; w tym celu napiszemy równanie momentów dla tych sił względem węzła E . Siła B daje moment ujemny, więc siła S_α powinna dać moment dodatni; stąd wniosek, że siła S_α na część prawą działa KU węzłowi D , czyli, że pręt α jest ŚCISKANY. To samo znajdziemy, jeśli siła P działać będzie na węzeł F .

Z powyższego rozumowania widzimy, że jakakolwiek siła pionowa P , przyłożona do któregośkolwiek węzła dźwigara, wywołuje w dowolnym przecie pasa GÓRNEGO siłę ŚCISKAJĄCĄ ten pręt; ta sama uwaga dotyczy obciążenia ciągłego.

Stąd wnioski:

a/ Wszystkie pręty pasa górnego będą ściskane.

b/ Aby otrzymać jaknajwiększą siłę ŚCISKAJĄCĄ który-

kolwiek pręt PASA GÓRNEGO, należy obciążenie ruchome przyłożyć do WSZYSTKICH węzłów dźwigara, na które obciążenie to może działać.

126. W podobny do powyższego sposób rozważymy los prętów DOLNEGO PASA, na przykład pręta β /rys.111/. Niech siła P działa na węzeł G . Rozpatrując lewą część kratownicy w celu znalezienia siły S_{β} , napiszmy równanie momentów względem D : Siła A da moment dodatni, zatem siła S_{β} powinna dać moment ujemny, stąd widzimy, że siła S_{β} na lewą część dźwigara działa OD węzła E , czyli, że pręt β jest ROZCIĄGANY. Charakter siły S_{β} zostanie ten sam, niezależnie od tego, do jakiego węzła z prawej strony $x x$ siła P będzie przyłożona. Jeśli obierzemy jako punkt przyłożenia siły P którykolwiek węzeł z lewej strony $x x$, otrzymamy również pręt β rozciągany, co łatwo dostrzedz, zakładając, że siła P działa na węzeł C ; badamy wówczas prawą część wiązara, na którą działają: odpór B i siły S_{α} , S_{β} , S_{γ} . Równanie momentów tych sił względem D wskazuje nam: ponieważ moment odporu B jest ujemny, więc moment siły S_{β} powinien być dodatni, czyli, że siła S_{β} działa OD węzła G ; zatem, pręt będzie ROZCIĄGANY. Z powyższego rozumowania wynika, że jakakolwiek siła pionowa P , przyłożona do któregośkolwiek węzła dźwigara, w każdym pręcie pasa DOLNEGO, wywołuje siłę, ROZCIĄGAJĄCĄ ten

pręt.

Stąd wnioski: a/ Wszystkie pręty pasa dolnego są rozciągane. b/ Aby otrzymać jaknajwiększą siłę, ROZCIĄGAJĄCĄ którykolwiek pręt PASA DOLNEGO, należy obciążenie ruchome przyłożyć do WSZYSTKICH węzłów dźwigara, na które to obciążenie może działać.

127. DZIAŁANIE OBCIĄŻENIA RUCHOMEGO NA PRĘTY WEWNĘTRZNE. Zbadajmy wpływ siły ruchomej P , przyłożonej do węzła, wziętego z prawej strony przekroju xx , na siłę w pręcie γ /rys.111/.

Niech siła P będzie przyłożona do węzła G . Na lewą część dźwigara działają siły A, S_x, S_p, S_γ ; aby znaleźć siłę S_γ , ułożymy równanie momentów względem punktu H /przecięcie się prętów α i β /, który, zwróćmy na to uwagę, znajduje się POZA linjami działania odporów A i B . Moment odporu A względem punktu H jest ujemny, zatem moment siły S_γ powinien być dodatni, to jest siła S_γ jest skierowana KU E , czyli że pręt γ jest ŚCISKANY. Jeżeliby siła P działała z LEWEJ strony przekroju xx , np. na węzeł C , wówczas, rozpatrując równowagę prawej części dźwigara, na którą działają siły B, S_x, S_p, S_γ , napiszmy równanie momentów względem poprzedniego punktu H . Wtedy znajdziemy: moment odporu B względem H jest ujemny, zatem moment siły S_γ powinien być

dodatni, to jest siła S_2 jest skierowana OD węzła D , zatem pręt γ jest ROZCIĄGANY.

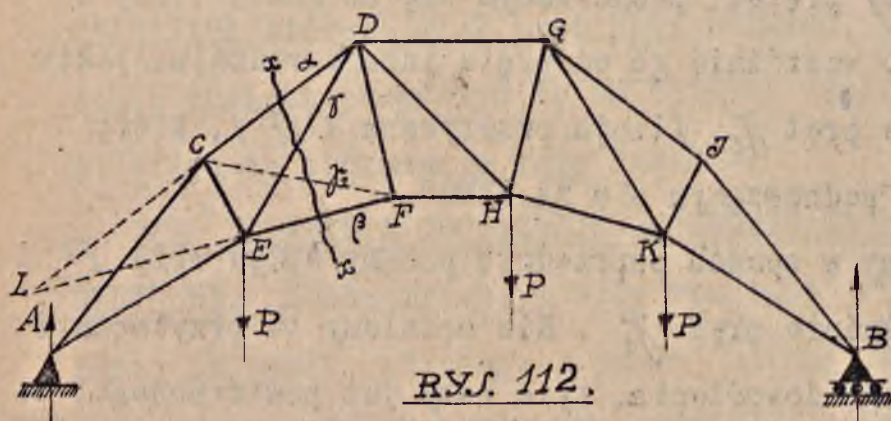
Poprzednio rozpatrywaliśmy pręt wewnętrzny γ , który nazwiemy prętem "podnoszącym się NA PRAWO", aby w ten sposób rozróżnić go od pręta innego rodzaju, jakim np. będzie pręt γ_2 /linja przerywana CQ /, który nazwiemy "podnoszącym się NA LEWO".

Zbadajmy w sposób poprzednio podany wpływ siły P na taki właśnie pręt γ_2 . Nie będziemy tu przytaczali poprzedniego dowodzenia, tyle razy już powtórnego, lecz wskażemy odrazu na wynik: jeśli siła P działa z PRAWEJ strony xx , wówczas pręt γ_2 będzie ROZCIĄGANY; kiedy przeniesiemy siłę na LEWĄ stronę xx , wówczas pręt γ_2 jest ŚCISKANY. Zestawiając powyższe wyniki, wypowiemy: pręt wewnętrzny, "podnoszący się na prawo" pod działaniem siły P , przyłożonej z na lewo PRAWEJ strony od xx jest ściskany. zaś pod działaniem siły P , przyłożonej z LEWEJ strony od xx , pręt ten jest rozciągany.

128. Powyższe wyniki /z par. 126 i 127/ dotyczą przypadku, kiedy "punkt momentów" /skrócone: punkt, względem którego obliczamy momenty sił/ wypadł POZA linjami działania odporów.

Rozważmy teraz przypadek dźwigara, kiedy "punkt momentów" znajdzie się MIĘDZY linjami odporów. Niech

to będzie dźwigar, przedstawiony na rys.112:



RYS. 112.

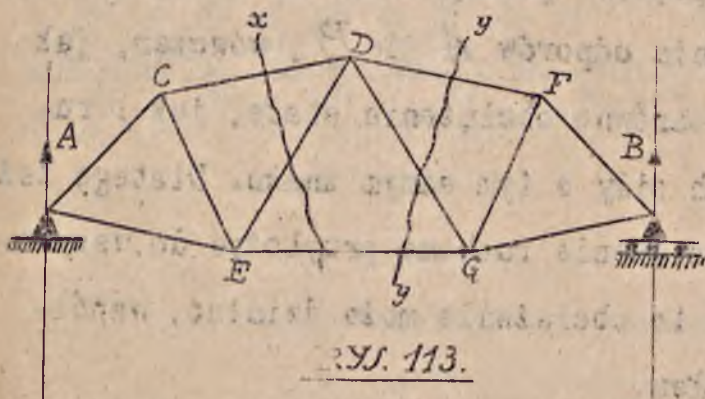
Zbadajmy pręt γ "podnoszący się NA PRAWO", lub też, w innej konstrukcji, pręt ζ_2 "podnoszący się NA LEWO". Punkt L będzie w obydwuch przypadkach "punktem momentów".

Przyłożmy siłę P raz naprawo od xx , drugi raz na lewo od tego przekroju; wówczas przekonamy się łatwo, że pręt podnoszący się $\frac{\text{na prawo}}{\text{na lewo}}$, pod działaniem siły P , przyłożonej do któregośkolwiek węzła bądź z PRAWYJ bądź z LEWEJ strony od xx , jest $\frac{\text{rozcigany}}{\text{ściskany}}$. Z poprzedniego też widzimy, że, gdyby w szczególnym przypadku zagadnienie odbiegało od poprzednich, łatwo wątpliwość rozwiązać, prowadząc rozumowanie w sposób powyższy.

129. Rozkład obciążenia ruchomego w celu otrzymania

największych sił w prętach wewnętrznych.

Niech będzie dany dźwigar, jaki jest wskazany na rys. 113.



Wiemy, że ciężar własny dźwigara z pomostem i brukiem wywoła w jednych prętach siły rozciągające, w innych ścisające. Niech dajmy na to,

pręt DG od własnego ciężaru dźwigara będzie ŚCISKANY.

Wówczas obciążenie ruchome, któreby wywołało w tym przecie również siłę ŚCISKAJĄCĄ, należy, zgodnie z paragrafem 127, przyłożyć do wszystkich węzłów, znajdujących się tylko z LEWEJ strony przekroju yy . Gdyby ten sam pręt DG pod działaniem sił stałych był ROZCIĄGANY,

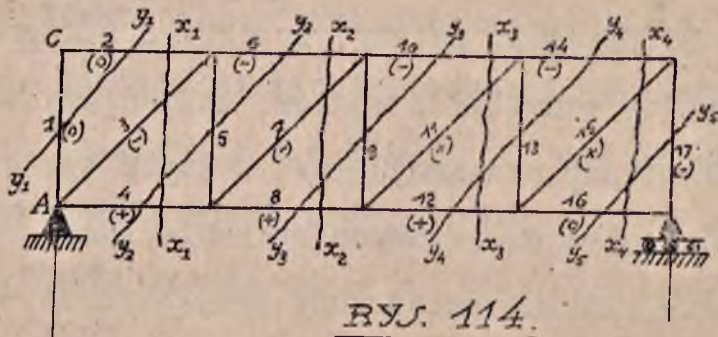
wówczas obciążenie ruchome należałoby przyłożyć do węzłów, znajdujących się z PRAWIEJ strony yy .

Podobnie, gdybyśmy chcieli znaleźć najniekorzystniejszego obciążenie ruchome w stosunku do pręta DE , należałoby się przekonać, czy od obciążenia stałego pręt ten

jest rozciągany, czy też ściskany. W pierwszym razie należałoby obciążenie ruchome przyłożyć do węzłów z LEWEJ strony przekroju xx , w drugim razie - do węzłów z PRAWEJ strony tegoż przekroju.

Jeśli będzie dany dźwigar, przedstawiony na rys.112, gdzie dla niektórych prętów "punkty momentów" znajdują się MIĘDZY linjami działania odporów A i B , wówczas, jak to wynika z par.128, zarówno obciążenie stałe, jak i ruchome wywoła w prętach siły o tym samym znaku. Dlatego też w tym razie należy obciążenie ruchome przyłożyć do wszystkich węzłów, na które to obciążenie może działać, wspólnie z obciążeniem stałym.

130. PRZYKŁAD. DŹWIGAR O PASACH RÓWNOLEGŁYCH. Niech będzie dane obciążenie stałe i ruchome dźwigara, przedstawione na rys.114.



OBciążenie STALÉ.

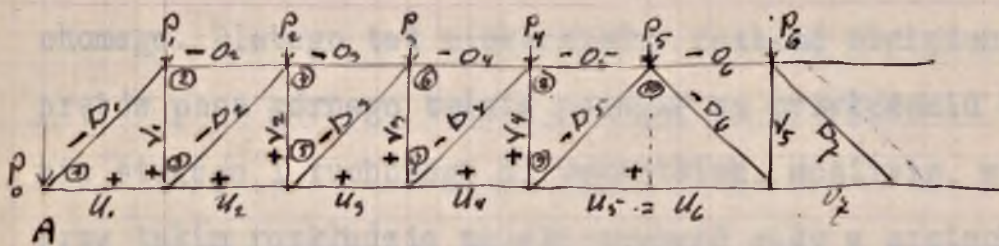
Krótceonocnyj porach cownolatyj i
30 obizrenij pironowem

4/1/1926 r.

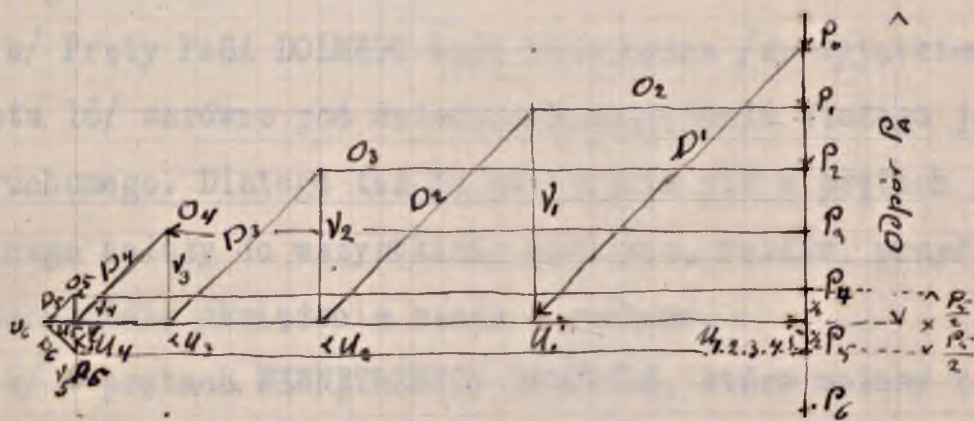
Čelč

Domu Karu Šum
Miqnowskij
nad Swidowem.

Raspredelenij uęęę w kolejnosci 1. 2. 3 i t. d.



- siła
+ uęęę



Węęę 1. $P_0 \cdot D_1 \cdot U_1 \cdot P_0$

2. $D_1 \cdot P_1 \cdot O_2 \cdot V_1$

3. $U_1 \cdot V_1 \cdot D_2 \cdot U_2 = U_1 \cdot V_1 \cdot D_2 \cdot U_2$

4. $D_2 \cdot O_2 \cdot P_2 \cdot O_3 \cdot V_2$

5. $U_2 \cdot V_2 \cdot D_3 \cdot U_3$

6. $D_3 \cdot O_3 \cdot P_3 \cdot O_4 \cdot V_3$

7. $U_3 \cdot V_3 \cdot D_4 \cdot U_4$

8. $D_4 \cdot O_4 \cdot P_4 \cdot O_5 \cdot V_4$

9. $U_4 \cdot V_4 \cdot D_5 \cdot U_5$

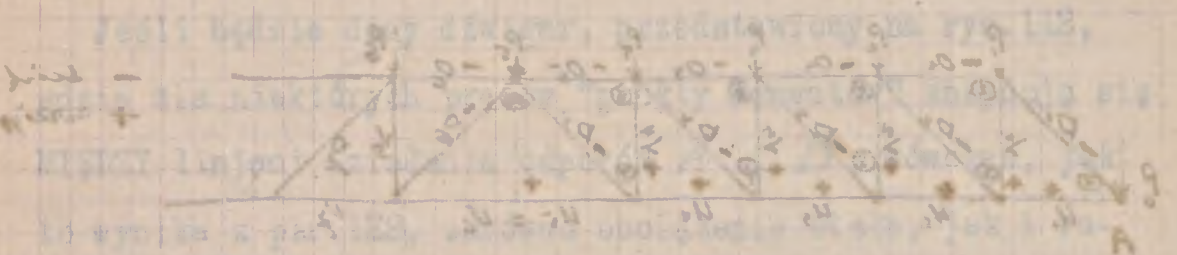
10. $D_5 \cdot O_5 \cdot P_5 \cdot O_6 \cdot D_6$

Kolejnosć krešlenia zif w wykrešle.

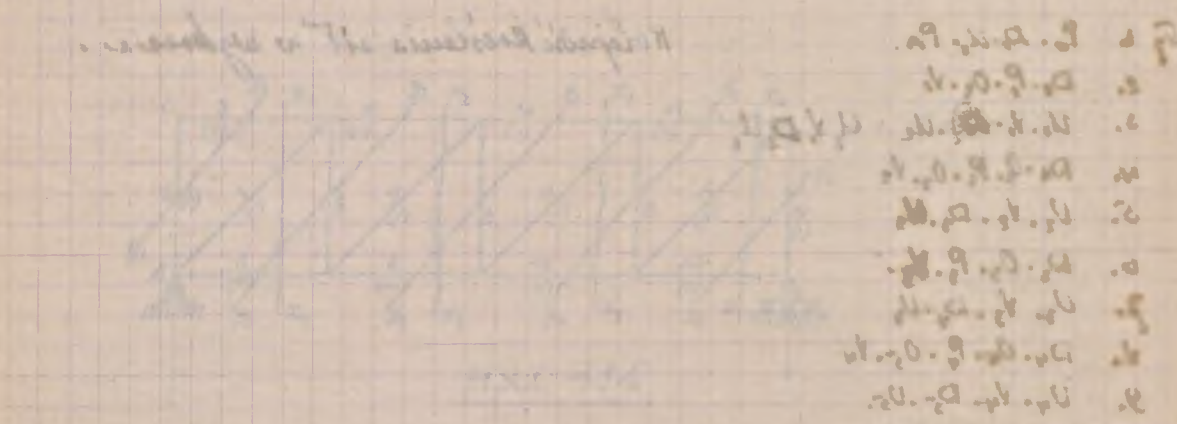
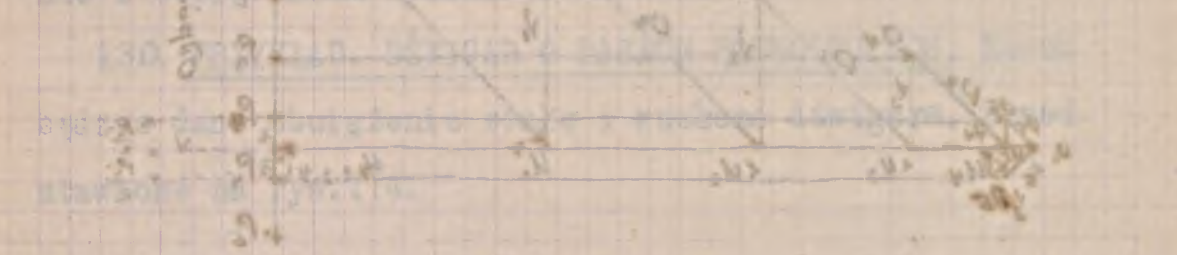
nb. $O_5 = O_6$ i $U_5 = U_6$

Handwritten notes in the top left corner, including the number '46' and some illegible text.

Handwritten notes at the top right, including the phrase 'L'ÉVOLUTION DE LA VIE' and other illegible text.



Handwritten text below the first diagram, including the number '130' and other illegible text.



Handwritten text at the bottom of the page, including the number '130' and other illegible text.

Znaleźć rozkład obciążenia niekorzystny dla tych
czy innych prętów.

a/ Pręty PASA GÓRNEGO będą ściskane /za wyjątkiem pręta
2/, czy to pod działaniem obciążenia stałego, czy też ru-
chomego. Dlatego też niekorzystny rozkład obciążenia dla
prętów pasa górnego będzie polegał na przyłożeniu obciąże-
nia stałego i ruchomego do wszystkich, możliwie, węzłów;
przy takim rozkładzie należy znaleźć siły w prętach pasa
górnego.

b/ Pręty PASA DOLNEGO będą rozciągane /za wyjątkiem
pręta 16/ zarówno pod działaniem obciążenia stałego jak
i ruchomego. Dlatego też do obliczenia sił w prętach pasa
dolnego należy do wszystkich, możliwie, węzłów, przyłożyć
jednocześnie obciążenie stałe i ruchome.

c/ W prętach WEWNĘTRZNYCH UKOŚNYCH, które możemy roz-
patrywać jako pręty "podnoszące się NA PRAWO", będą po-
wstawały od obciążenia STAŁEGO w jednych prętach siły
ściskające, w innych rozciągające. Np. pręty 3 i 7 będą
ściskane, zaś 11 i 15 będą rozciągane.

Jeżeli teraz mamy uwzględnić obciążenie ruchome, po-
winniśmy je przyłożyć do takich węzłów dźwigara, aby w
odpowiednich prętach powstały dodatkowe siły TEGO SAMEGO
znaku, co siły, wywołane obciążeniem stałym.

A więc, aby otrzymać niekorzystne położenie obciążenia
ruchomego dla prętów $\frac{3}{7}$ należy obciążenie to, zgodnie

z paragrafem 129, przyłożyć do węzłów, znajdujących się NA PRAWO od przekrojów $\frac{x_1 x_2}{x_2 x_2}$; dla prętów $\frac{11}{15}$ należy obciążenie ruchome przyłożyć do węzłów, znajdujących się NA LEWO od przekrojów $\frac{x_3 x_3}{x_4 x_4}$.

Tutaj nastręcza się UWAGA następująca: Jeślibyśmy przyłożyli obciążenie ruchome do węzłów, leżących NA PRAWO od $x_3 x_3$, to w pręcie 11 powstałaby siła ściskająca, która przy pewnych warunkach mogłaby się otrzymać większą, niż siła rozciągająca ten pręt pod działaniem obciążenia stałego. W rezultacie otrzymalibyśmy, że pręt 11 przy takim obciążeniu ruchomem mógłby być ściskany.

Teoria "wytrzymałości materiałów" wskazuje nam, że pręt, obliczony na rozciąganie, wogóle nie może być uważany za dostatecznie wytrzymały względem sił ściskających, choćby nawet mniejszych od poprzednich, szczególnie kiedy stosunek długości pręta do jego mniejszego wymiaru poprzecznego jest znaczny. Dlatego też konieczne jest zbadać takie pręty rozciągane i na ściskanie, jeśli mogą być one przy pewnych okolicznościach ściskane.

d/ Zbadajmy pręty wewnętrzne PIONOWE /skupki/; pręty te rozpatrywać możemy, jako "podnoszące się NA LEWO" /w stosunku do przekrojów yy /. Jedne z tych prętów, pod działaniem obciążenia stałego są ściskane, inne rozciągane. Do tych prętów dadzą się zastosować te same uwagi, co do prętów ukośnych. Zatem:

Pręty 1,5 są rozciągane, zaś 9,13,17 są ściskane od działania obciążenia stałego.

Aby więc otrzymać niekorzystne położenie obciążenia ruchomego należy

dla prętów $\frac{1}{5}$, zgodnie z par.128, obciążenie ruchome przyłożyć do węzłów, znajdujących się NA LEWO od przekrojów $\frac{y_1 y_1}{y_2 y_2}$

zaś dla prętów 9, 13, 17 należy obciążenie ruchome przyłożyć do węzłów, znajdujących się na prawo od przekrojów $y_3 y_3, y_4 y_4, y_5 y_5$.

Co się tyczy niekorzystnego rozkładu obciążenia ruchomego dla słupków, które pod działaniem obciążenia stałego są rozciągane, a pod działaniem obciążenia ruchomego mogłyby być ściskane, to należałoby dosłownie to samo powtórzyć, co było mówione o rozciąganych - ściskanych prętach ukośnych.

131. KRA TOWNICE TRÓJPRZEGUBOWE. Do konstrukcji statycznie wyznaczalnych należą ustroje trójprzegubowe: na taki ustrój składają się dwa stałe ciała płaskie, połączone ze sobą przegubem /przegub zwornikowy/ i opierające się na podporach przegubowych /przeguby węzłowe/.

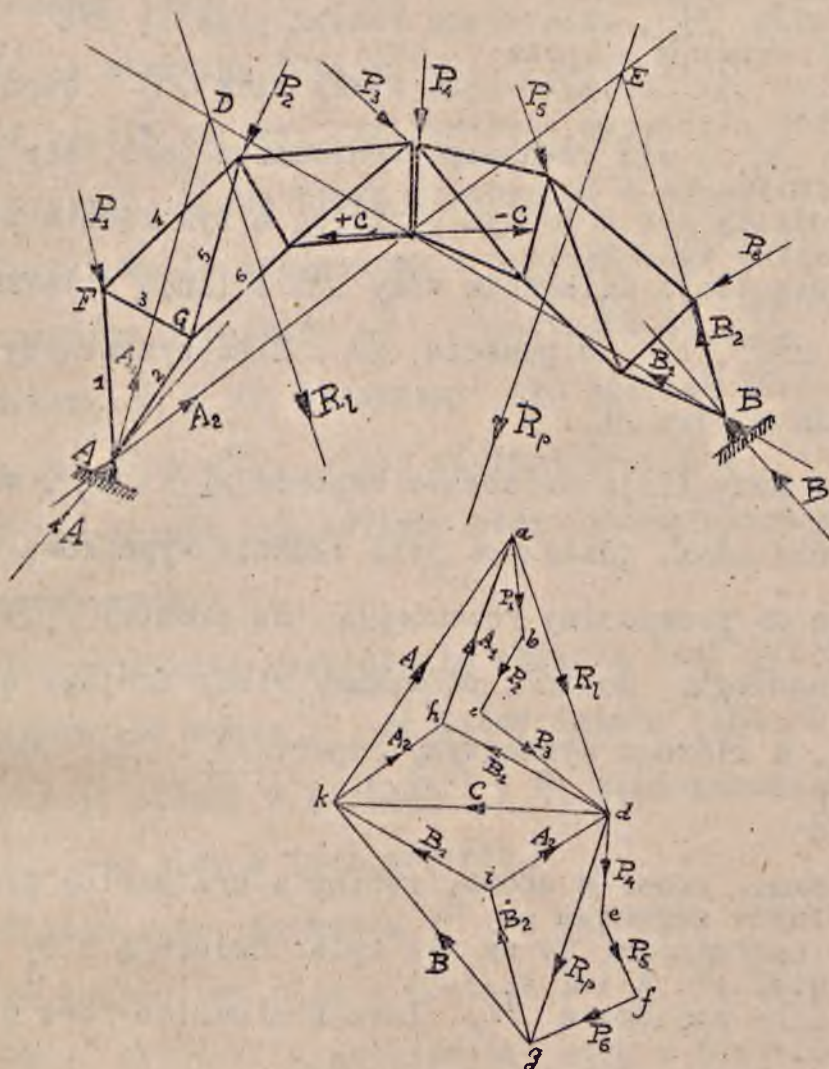
Przyjmujemy, że siły, które na taki ustrój działają, znajdują się w płaszczyźnie przegubów.

Każde z dwóch ciał płaskich może być zastąpione kra-

townicą i wtedy otrzymamy kratownicę trójprzegubową, inaczej nazywaną trójprzegubowym łukiem kratowianym. Konstrukcje takie są stosowane zarówno do mostów, jak i do przekrojów dachowych o dużych rozpiętościach i wzniosach, naprz. dla dworców kolejowych /przekrycie nad torami/.

Obliczenie kratownicy trójprzegubowej nie nastrocza trudności: byleby znaleźć oddziaływanie przegubów węzłowych; dalsze odnajdywanie sił w prętach odbywa się w sposób, pokazany w poprzednich przykładach. Zajmijmy się tu sprawą znalezienia odporów przegubów węzłowych.

Przypuśćmy, że na kratownicę trójprzegubową ACB /rys. 115/ działają siły P_1, P_2, \dots, P_6 , przyłożone do poszczególnych węzłów. Siły te obliczamy tak samo, jak w poprzednich przykładach, korzystając z wzorów lub danych praktycznych. W naszym zadaniu, w celu uogólnienia rozumowania, przyjęliśmy dowolne kierunki sił P_1, P_2, \dots, P_6 . Dajmy na to, że znanymi nam sposobami dodaliśmy siły P_1, P_2, P_3 , przyłożone do lewej części kratownicy, i że znaleźliśmy wypadkową R_L ; toż samo zrobiliśmy z siłami P_4, P_5, P_6 , przyłożonemi do prawej części kratownicy i otrzymaliśmy wypadkową R_p /Wieloboki sznurowe, biegun i promienie nie są pokazane, aby rysunku nie gmatwać/.



RYS. 115.

Przypuśćmy teraz, że siły działają tylko na LEWA część kratownicy AC , prawa zaś niech będzie wolna od sił. Wówczas równowaga całości (ACB) pod działaniem sił P_1, P_2, P_3 , albo, co na jedno wyniesie, pod działaniem wypadkowej R_2 , powstanie w ten sposób, że przegub B działa na kratownicę AC przy pomocy

kratownicy BC , jak gdyby przy pomocy pręta prostego BC z siłą B_1 , skierowaną wzdłuż prostej BC . Na kratownicę AC działać będą wtedy siły R_2 , odpór A i odpór B_1 ; dla równowagi koniecznym jest, aby siły te przecinały się w jednym punkcie, a tym będzie przecięcie się linii działania siły R_2 z linią działania odporu B_1 , t.j. w punkcie D . Stąd wyznaczymy linię działania odporu A_1 .

Kiedy mamy linię działania odporów A_1 i B_1 , w wieloboku sił $abcd$, gdzie ad jest właśnie wypadkową R_2 , z punktu a prowadzimy równoległą do prostej AD , zaś z d równoległą do BD ; otrzymamy wtedy trójkąt sił adh , z którego wyznaczymy odpory A_1 i B_1 ; $A_1 = \overline{ha}$, $B_1 = \overline{dh}$.

Toż samo, słowo w słowo, robimy z kratownicą prawą BC , zakładając, że na nią tylko działają siły P_4, P_5, P_6 , albo wypadkowa R_p . Lewa kratownica /bez sił/ działa na prawą wzdłuż prostej AC .

Prosta AC i linia działania wypadkowej R_p przecinają się w E ; przez ten punkt E przejdzie linia odporu B_2 . Znaleźliśmy zatem linię działania odporów A_2 i B_2 . W wieloboku sił $defg$ bok dg przedstawia wypadkową R_p . Jeśli z punktu d przeprowadzimy prostą równoległą do AE , zaś z g równoległą do BE , otrzymamy trójkąt dgi ; stąd $A_2 = \overline{id}$, $B_2 = \overline{gi}$.

Założmy teraz, że siły R_7 i R_p działają jednocześnie każda na właściwą kratownicę; wówczas przegub A oddziaływać będzie na lewą kratownicę z wypadkową sił A_1 i A_2 ; zaś przegub B na prawą kratownicę z wypadkową B_1 i B_2 .

Wypadkowe te znajdziemy z poprzedniego wieloboku sił: poprowadźmy z punktów $\frac{h}{i}$ równoległe do $\frac{id}{dh}$; wówczas wypadkową A_1 i A_2 otrzymamy jako odcinek $ka = A$ a wypadkową zaś B_1 i B_2 , jako odcinek $gk = B$.

W ten sposób znaleźliśmy oddziaływania przegubów węzłowych.

Dalsza sprawa rozwiązania zadania jest już prosta: zaczynamy od węzła A , na który działa siła A ; równoważymy ją siłami w prętach 1 i 2; stąd metodą Cremony znajdujemy siły w tych prętach.

Przechodzimy do węzła F' ; z warunków równowagi tego węzła znajdujemy siły w prętach 3 i 4. Następnie przechodzimy do węzła G' ; odnajdujemy siły w prętach 5 i 6 i t.d. aż do węzła B .

Zwróćmy tu uwagę, że przy wykonywaniu wykresu Cremony w celu wyznaczenia sił w prętach poszczególnych należy starać się korzystać z wykreślonego już wieloboku sił

abcdefg.

132. Dodać tu musimy, że rozpocząć wykres Cremony można nie tylko od przegubu A , lecz też od przegubu B ,

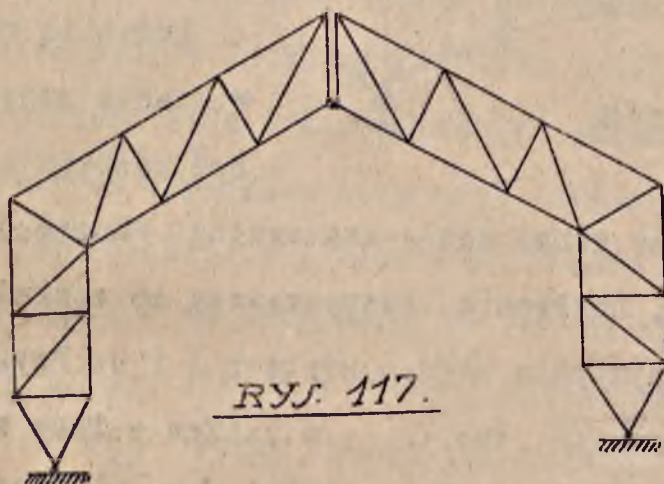
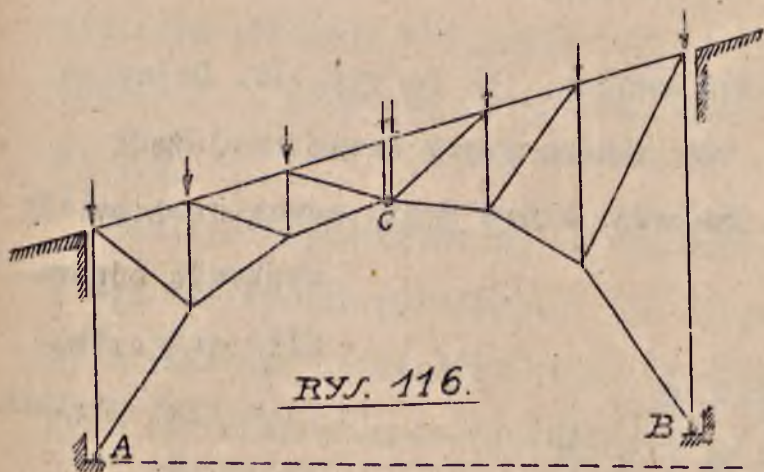
a nawet od przegubu C .

Parę słów co do tego ostatniego przypadku: Jeżeli mamy zamiar wyznaczyć siły w prętach lewej kratownicy wówczas rozumiemy tak: na kratownicę AC działa odpór A /wypadkowa dwóch sił A_1 i A_2 /, siła R_L oraz działanie kratownicy prawej BC w przegubie C . To działanie wyraża się siłą B_1 , powstającą wtedy, kiedy na AC działa siła R_L , zaś na BC niema żadnych sił P , oraz siłą $(-A_2)$, kiedy na AC nie działają żadne siły, zaś na BC działa siła R_P .

Zatem przegub C działa na część lewą AC z wypadkową sił: B i $(-A_2)$. Wypadkową tę znajdziemy z wieloboku sił, łącząc punkt d z k : odcinek dk jest wypadkową siły $B_1 = ik$ oraz siły $(-A_2) = di$. Znalazwszy wypadkową można rozpocząć wykres Cremony dla części AC od węzła C .

Jeśli byśmy chcieli wykres Cremony dla części BC rozpocząć od węzła C , należałoby pierwszej wyznaczyć oddziaływanie lewej części kratownicy AC na prawą BC ; będzie niem wypadkowa sił A_2 i $(-B_1)$. Będzie to więc co do wartości i linii działania taka sama wypadkowa jak w poprzednim przypadku tylko z lotem przeciwnym.

133. Na rys. 116 i 117 pokazane są dwie kratownice trójprzegubowe, z których pierwsza może mieć zastosowanie do mostu, druga do przykrycia dachowego.

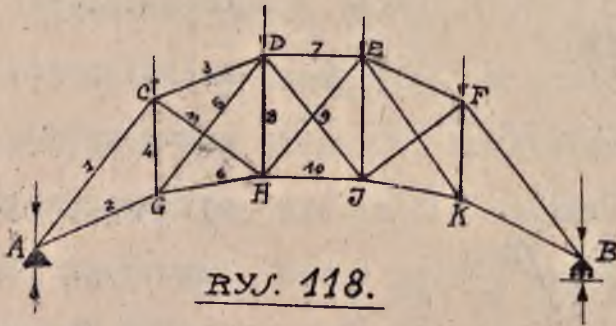


Przy wyznaczeniu sił w prętach w przypadku obciążenia ruchomego /dla mostów/ należy postępować metodą wyłożoną w paragrafach 124 - 129. Dodać tu jednak trzeba, że w przykładach, jak na rys. 116 i 117, odpory nie będą

pienowe, jak to było poprzednio, skutkiem tego niekorzystny rozkład obciążenia ruchomego może wypaść odmienny od tego, jaki znaleźliśmy we wspomnianych paragrafach.

Ustalenie w danym razie niekorzystnego rozkładu obciążenia ruchomego trudności nie powinno nastroczać, jakkolwiek jest SPRAWĄ ZAWILSZĄ, niż w przypadku odporów pionowych.

Niech będzie dana kratownica, jak na rys. 118. Dajmy na to, wymagane jest, aby ukośne pręty wewnętrzne były tylko ROZCIĄGANE. Znaleźć, które pręty wewnętrzne należy



zostawić i określić siły, które w tych prętach działają.

Przebieg rozwiązania może być następujący:

Niech będą obciążone górne węzły kratownicy; odnajdujemy, jak zwykle, odpory; następnie, rozpoczynając od węzła A , metodą Cremony, znajdujemy siły w prętach 1 i 2. Później przechodzimy do węzła C lub G ; w każdym z tych węzłów znajdujemy po 3 pręty o nieznanych siłach. Łatwo dostrzeżemy, że z prętów wewnętrznych CH lub DG , jeden tylko może być rozciągany. Przypuśćmy, że pręt CH będzie rozciągany; w takim razie możemy nie uwzględniać pręta DG . Przy takim założeniu przystępujemy do węzła G , w którym mamy teraz dwa pręty /4 i 6/ o nieznanych siłach. Z wykresu Cremony znajdujemy te siły i przechodzimy do węzła C , w którym schodzą się 4 pręty /1, 4, 3, 5/. Nieznane są siły w prętach 3 i 5; z wykresu Cremony odnajdujemy te siły. Wówczas dostrzeżemy, że pręt 5(CH) będzie ściskany, czyli, że założenie poprzednie

jest nieskuteczne. Musimy zatem przejść pierw do węzła C , w którym zbiegają się pręty 1,3,4, dopiero później do węzła Q , przy czem znajdziemy siłę, rozciągającą pręt 5 (QD).

Następnie przechodzimy do dalszych węzłów D lub H w ten sam sposób postępując, jak to poprzednie zrobiliśmy w stosunku do węzłów C i Q i t.d. Przy siłach ukośnych /od wiatru/ może nieraz wypaść, że pręt np. $[5(QD)]$ rys. 118, który przy siłach pionowych był rozciągany, tym razem będzie ściskany; wówczas należy zwrócić uwagę na wypadkową siłę w danym pręcie, obliczoną według par. 122. Jeśli ta wypadkowa dany pręt /naprz. $[5(QD)]$ / przy pewnej kombinacji sił będzie ściskała, przy innej rozciągała, będzie to wskazówką, że należy wstawić w konstrukcję krzyżujący się pręt $[5(CH)]$, któryby zluzował pręt $[5(QD)]$ wtedy, kiedy ten ostatni miałby być ściskany. Czyli, że w kratownicy należałoby utrzymywać obydwie krzyżujące się pręty.

Podobny stosunek częste się przytrafia w DŹWIGARACH MOSTOWYCH: przy pewnym układzie obciążenia ruchomego - - pomimo obciążenia stałego - będziemy mieli jednym razem siły rozciągające, innym razem, siły ściskające ten sam ukośny pręt wewnętrzny. Wówczas, rozumie się, należy w dźwigarze utrzymać obydwie pręty krzyżujące się.

ROZDZIAŁ VIII.ŚCIANY OPOROWE.

135. PRZEDMIOT ROZDZIAŁU. Każdy materiał sypki, pozostawiony sam sobie, przybiera kształt pewnej, właściwej sobie powierzchni, która nie może tworzyć z poziomem kąta, większego od t.zw. KĄTA ZESYPU φ . Kąt ten jest różny dla rozmaitych materiałów.

Dla przykładu przytoczymy kilka wartości kąta zesypu, podając również ciężar właściwy odpowiedniego materiału.

MATERJAŁ.	Kąt zesypu φ	tg. φ	Cięż. właściwy w kg/m ³
Glina sucha	40° - 46°	0,84-1,04	1500
Glina mokra	20° - 25°	0,36-0,47	1900
Ziemia nasypowa	30° - 37°	0,58-0,75	1650
Zwir mokry	25°	0,47	1860
Tłuczeń /szaber/ mokry	35° - 40°	0,7 -0,84	1600

Gdy chcemy którykolwiek z tych materiałów utrzymać w równowadze przy pochyłości, większej od kąta zesypu, to trzeba podeprzeć go t.zw. ŚCIANĄ OPOROWĄ.

Zadaniem danego rozdziału będzie rozpatrzenie równowagi /stateczności i wytrzymałości/ tych ścian.

Rozróżniać będziemy dwa przypadki ściany oporowej:

a/ kiedy ziemia /lub inny sypki materiał/ prze na mur, dążąc do obalenia go; będziemy wtedy mówili o NAPÓRZE ziemi;

b/ kiedy mur opiera się o ziemię, dążąc do wyciśnięcia jej z za siebie; wówczas ziemia jakby odpiera mur; będziemy wtedy mówili o ODPORZE ziemi.

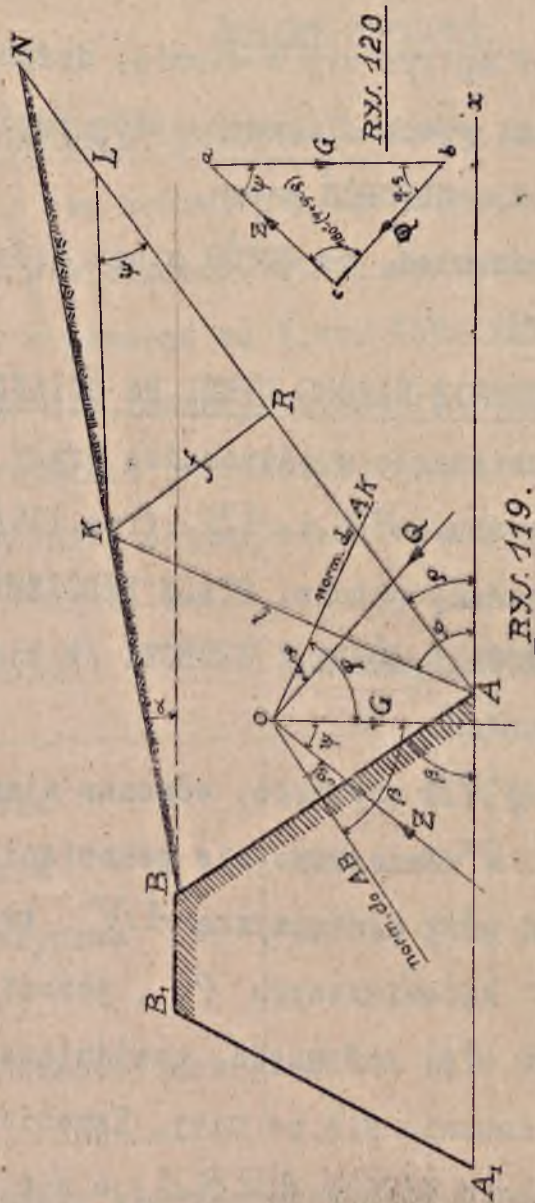
Łatwo to zrozumieć, że ODPÓR ziemi będzie zawsze większy niż NAPÓR.

136. WYZNACZANIE NAPÓRU ZIEMI NA ŚCIANĘ. Przypuśćmy, że chodzi o utrzymanie w równowadze bryły ziemi, ograniczonej płaszczyznami BN i AB /rys. 119/. Długość ściany, na którą badamy parcie, STAŁE BĘDZIEMY w dalszym wykładzie PRZYJMOWALI RÓWNĄ 1 METROWI /w kierunku prostopadłym do rysunku/.

Gdyby ściana AB nie było, wówczas ziemia, pozostawiona sama sobie, w równowadze nie pozostanie; część ziemi, ograniczona od góry płaszczyzną AN , tworzącą z poziomem kąt $\alpha AN =$ kątowi zesypu ϱ , pozostanie w równowadze sama przez się, zaś część, znajdująca się ponad płaszczyzną AN , zsunie się po niej. Zapobiedz temu zesunięciu ma za zadanie ściana ABB_2A_1 ; o nią właśnie opiera się ruchoma bryła ziemi.

Oddziaływanie ściany (Z) na ziemię powinno być takie, aby mogło zrównoważyć dwie inne siły, działające na ruchomą bryłę, mianowicie: ciężar własny (G) oraz oddziaływa-

nie(Q) ziemi nieruchomej. Doświadczenie wskazuje, że,



gdyby ścianę AB cokolwiek odsunąć, to z bryły ziemi $xABN$ odetnie się część jej, ograniczona płaszczyzną AK , tworzącą z poziomem kąt φ , inny niż φ . /Kąt φ nazywamy kątem OSUWU /odłamu/, a płaszczyznę AK płaszczyzną OSUWOWĄ /odłamu/. Reszta bryły pozostanie na-

razie bez ruchu.

Stąd widać, że na ścianę oporową wywiera napór bryła ziemi ABK , dążąca do osunięcia się. Wobec tego należy rozważyć równowagę takich sił: ciężaru G bryły ABK , oddziaływania muru Z na tę bryłę oraz oddziaływania Q pozostającej w spoczynku ziemi poniżej płaszczyzny AK .

Gdyby powierzchnie ziemi i ściany były zupełnie gładkie, to siły Z i Q byłyby normalne, odpowiednio do AB i AK . Ponieważ, jednak, powierzchnie te są chropowate, więc oddziaływania Z i Q tworzą z normalnymi do tych płaszczyzn kąty tarcia, które oznaczymy przez φ' i φ ; drugi z nich /kąt φ / jest, oczywiście, równy kątowi zesypu.

Tak więc na bryłę ABK działają trzy siły Z , G i Q ; pod działaniem ich bryła ta jest w równowadze; stąd wynika, że trójkąt sił abc /rys. 120/ musi być zamknięty. Mając więc wartość G oraz kierunki sił Z i Q łatwo wyznaczymy oddziaływania tych sił Z i Q . Powyżej przyjmowaliśmy kąt φ jako dany; nie możemy jednak ani obliczyć ani też doświadczalnie znaleźć kąta φ , a od niego zależy wartość Z . Dlatego też przyjmujemy, ze względu na bezpieczeństwo ściany oporowej, iż kąt φ (Hamm) otrzymuje taką wartość, przy której siła Z przybiera wartość NAJWIĘKSZĄ. Tę wartość siły Z będziemy uważali za miarodajną przy obliczaniu ściany oporowej.

137. ^{одтиму.} KĄT OSUWU φ , ODPOWIADAJĄCY MAXIMUM SIŁY Z .

Wprowadzając oznaczenia z rys. 120, napiszemy z trójkąta sił abc :

$$\frac{Z}{Q} = \frac{\sin(\varphi - \rho)}{\sin(\psi + \varphi - \rho)} \dots \dots \dots /1/$$

gdyż $\sphericalangle(Q, Q) = \varphi - \rho$, a $\sphericalangle(Q, Z) = 180^\circ - (\psi + \varphi - \rho)$.

Z /1/ mamy, dalej:

$$Z = \frac{Q \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\psi + \varphi - \rho)} \dots \dots \dots /2/$$

Aby znaleźć, przy jakiej wartości φ , Z osiąga maximum, trzeba znaleźć pochodną $\frac{dZ}{d\varphi}$ i przyrównać ją do zera. Należy przytem zauważyć, że jedynie Q i Z są funkcjami kąta φ , natomiast kąt ψ wcale nie zależy od φ .

Będzie więc

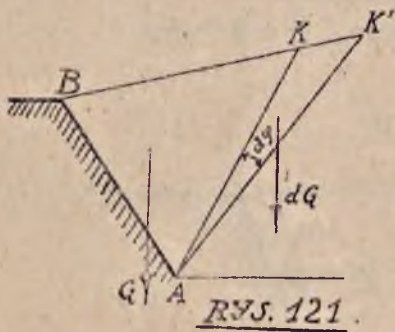
$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{dQ}{d\varphi} \frac{\sin(\varphi - \rho)}{\sin(\psi + \varphi - \rho)} + Q \frac{\sin(\psi + \varphi - \rho)\cos(\varphi - \rho) - \sin(\varphi - \rho)\cos(\psi + \varphi - \rho)}{\sin^2(\psi + \varphi - \rho)} = 0,$$

albo, sprowadzając otrzymane wyrażenie do wspólnego mianownika, znajdziemy:

$$\frac{\frac{dQ}{d\varphi} \sin(\varphi - \rho)\sin(\psi + \varphi - \rho) + Q[\sin(\psi + \varphi - \rho)\cos(\varphi - \rho) - \sin(\varphi - \rho)\cos(\psi + \varphi - \rho)]}{\sin^2(\psi + \varphi - \rho)} = 0$$

Ponieważ mianownik nie może być $= \infty$, więc licznik $= 0$. Jeśli ponadto zauważymy, że wyrażenie, ujęte w nawias kwadratowy, jest to sinus różnicy kątów $(\psi + \varphi - \rho)$ i $(\varphi - \rho)$, to otrzymamy:

$$\frac{dQ}{d\varphi} \sin(\varphi - \rho) \sin(\psi + \varphi - \rho) + Q \sin \psi = 0 \dots \dots \dots /3/$$



Z rys. 121 wynika, że przyrost ciężaru Q jest równy przyrostowi pola ABK , pomnożonemu przez ciężar właściwy ziemi $= q$. A więc

$$dQ = - \frac{AK \cdot AK \cdot d\varphi}{2} q,$$

gdyż pole elementarne AKK' można w przybliżeniu uważać za pole wycinka koła, o kącie środkowym $= d\varphi$ i promieniu $= AK$. Znak $-$ wynika stąd, że ze wzrostem Q kąt φ maleje; kiedy więc dQ jest dodatnie, $d\varphi$ jest ujemne.

Oznaczając jeszcze AK przez l , otrzymamy stąd:

$$dQ = - \frac{l^2 \cdot d\varphi}{2} q,$$

albo

$$\frac{dQ}{d\varphi} = - \frac{l^2}{2} \cdot q.$$

Podstawiając tę wartość w /3/, otrzymamy:

$$- \frac{l^2}{2} q \sin(\varphi - \rho) \sin(\psi + \varphi - \rho) + Q \sin \psi = 0$$

albo

$$- \frac{q}{2} l \sin(\varphi - \rho) \cdot l \sin(\psi + \varphi - \rho) + Q \sin \psi = 0 \dots \dots /4/$$

Z trójkąta AKR /rys. 119/ widzimy, że $l \cdot \sin(\varphi - \rho)$ jest to rzut AK na KR , prostopadką do AN ; oznaczmy ten rzut przez f i poprowadźmy dalej prostą KL pod kątem ψ do AN i oznaczmy jeszcze AL przez b ,

wtedy z trójkąta AKL znajdziemy:

$$\frac{l}{b} = \frac{\sin \psi}{\sin [180 - (\psi + \varphi - \rho)]} = \frac{\sin \psi}{\sin (\psi + \varphi - \rho)}$$

Stąd

$$l \sin (\psi + \varphi - \rho) = b \sin \psi$$

Podstawiając to w /4/, znajdziemy:

$$-\frac{q}{2} f b \sin \psi + Q \sin \psi = 0$$

a po skróceniu przez $\sin \psi \neq 0$:

$$-\frac{q}{2} f b + Q = 0$$

i ostatecznie

$$Q = q \cdot f \cdot \frac{b}{2} = \text{pole } \triangle AKL \cdot q$$

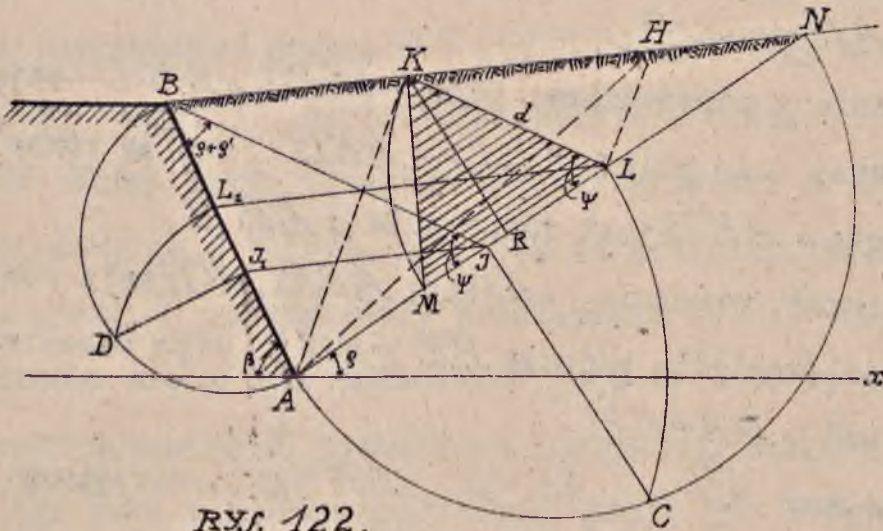
Z drugiej strony ciężar Q jest równy iloczynowi z pola $\triangle ABK$, pomnożonego przez q , czyli $Q = \text{pole } \triangle ABK \cdot q$, zatem $\text{pole } \triangle ABK = \text{pole } \triangle AKL$.

Tak więc widzimy, że SIŁA Z OSIĄGA MAXIMUM PRZY TAKIM KĄCIE φ , PRZY KTÓRYM PROSTA AK POŁOWI POLE $ABKLA$.

Postarajmy się teraz wyznaczyć punkt L : praktycznie /rys. 122/.

W tym celu poprowadźmy dwie proste pomocnicze: jedną przez punkt B pod kątem ψ do AN ; nazwiemy ją prostą „kierunkową”, oraz drugą przez punkt L , równoległą

^{x/} Prosta „kierunkową” dogodniej jest wykreślić, odkładając kąt $ABJ = \rho + \rho'$. Że tak jest, wynika to stąd: Niech ściana AB tworzy kąt β z poziomem /rys. 122/; wów-



RYS. 122.

 czas kąt $BAJ = 180 - \beta - \varrho$, a że kąt $AJB = \psi$
 więc kąt $ABJ = 180 - \psi - (180 - \beta - \varrho) = \varrho + \beta - \psi$.

Na rys. 119 mamy: kąt zawarty między normalną do AB i si-
 łą $C = \beta$, zatem z tegoż rysunku znajdujemy, że

$\beta - \psi = \varrho'$, a więc kąt ABJ /rys.122/ = $\varrho + \beta - \psi =$
 $= \varrho + \varrho'$ c.b.d.d. Zazwyczaj przyjmuje się, że

$\varrho = \varrho'$, wówczas wykreślimy "kierunkową" odkładając
 kąt $ABJ = 2\varrho$.

do AK . Punkt przecięcia się tej ostatniej z naziemem BN oznaczmy przez H , a punkt przecięcia się kierującej z AM -przez J .

Zgodnie z poprzednim: pola $\triangle AKB$ i $\triangle AKL$ mają być równe, a że pola $\triangle AKL$ i $\triangle AKH$ też są równe^{x/}, więc pole $\triangle AKB$ jest równe polu $\triangle AKH$.

Ponieważ, wreszcie, trójkąty ABK i AKH mają równe wysokości (względem podstaw BK i KH), więc wobec równości pól, $BK=KH$.

Oznaczmy $\overline{AJ}=\alpha$, $\overline{AL}=\beta$, $\overline{AN}=c$, otrzymamy z trójkątów podobnych BJN i MLN :

$$\frac{BK}{KN} = \frac{JL}{LN} = \frac{b-\alpha}{c-\beta} \dots\dots\dots /5/$$

Zaś z trójkątów podobnych AKN i LHN mamy:

$$\frac{KH}{HN} = \frac{AL}{LN} = \frac{\beta}{c-\beta};$$

stad

$$\frac{KH+HN}{KH} = \frac{b+(c-\beta)}{\beta},$$

stad, ponieważ $BK=KH$:

$$\frac{KN}{BK} = \frac{c}{\beta}$$

Porównując to z /5/ otrzymamy:

$$\frac{b-\alpha}{c-\beta} = \frac{\beta}{c},$$

albo po uproszczeniu $b = \sqrt{ac}$.

^{x/}

Podstawa AK jest wspólna, a wierzchołki L i H leżą na równoległej do tej podstawy.

We wzorze tym znane są wielkości a i c ; możemy więc wyznaczyć zeń δ , a stąd i punkt L ; następnie będziemy mogli poprowadzić prostą LK i AK ; znajdziemy w ten sposób, kąt osuwu φ , przy którym będzie Z max.

138. Można łatwo zbudować znaleziony wzór: $b = \sqrt{ac}$

Zatoczmy na AN /rys. 122/, jak na średnicy, półkole; przez punkt J poprowadźmy prostopadłą do AN , aż do przecięcia się z owym półkolem w punkcie C , i, wreszcie, zatoczmy z punktu A promieniem równym AC łuk. Przecięcie się tego łuku z AN da nam szukany punkt L . Wynika to z twierdzenia, że cięciwa AC jest średnią geometryczną średnicy koła i przyległego odcinka AJ .

Mając punkt L prowadzimy przezeń równoległą do kierunku BJ . Przecięcie się jej z BN daje punkt K ; jeśli poprowadzimy prostą KA , będziemy mieli położenie płaszczyzny osuwowej, przy której siła Z otrzyma wartość największą.

139. WYZNACZENIE ODDZIAŁYWANIA ŚCIANY OPOROWEJ NA ZIEMIĘ I ODWROTNIE: NAPORU ZIEMI NA ŚCIANĘ.

Uskuteczniwszy to drogą wykreślną.

W par. 137 mieliśmy wzór /2/:

$$Z = G \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\sin(\psi + \varphi - \delta)}$$

gdzie G oznacza ciężar bryły AKB , który jest równy polu trójkąta AKL , pomnożonemu przez ciężar właściwy ziemi

q . Z rysunku 122 mamy:

$$\frac{KL}{AL} = \frac{\sin(\varphi - \varrho)}{\sin(\psi + \varphi - \varrho)},$$

więc

$$Z = \text{pole } \triangle AKL \cdot q \cdot \frac{KL}{AL}.$$

Lecz pole trójkąta $AKL = \frac{1}{2} \overline{AL} \cdot \overline{KR}$, zatem

$$Z = \frac{1}{2} \overline{AL} \cdot \overline{KR} \cdot q \cdot \frac{KL}{AL} = \frac{1}{2} \overline{KR} \cdot KL \cdot q.$$

Oznaczając, wreszcie, wysokość \overline{KR} przez f , a KL przez d , otrzymamy:

$$Z = \frac{1}{2} f \cdot d \cdot q.$$

Iloczyn $\frac{1}{2} f d$ wyraża pole trójkąta o podstawie d i wysokości f . Trójkąt ten możemy łatwo zbudować, zataczając łuk z punktu L promieniem $= KL$ do przecięcia się z AN w punkcie M ; widoczne jest, że pole trójkąta $KLM = \frac{1}{2} f d$; zatem oddziaływanie ściany na ziemię, a więc napór ziemi na ścianę Z jest równe polu trójkąta KLM pomnożonemu przez q .

Trójkąt „ KLM ” nazywać będziemy TRÓJKĄTEM NAPORU.

Zauważmy, że w zastosowaniu praktycznym powyższego wykresu nie potrzeba prowadzić wcale linii LH , AH i AK .

140. INNA BUDOWA. Gdy odcinek AN nie mieści się w granicach rysunku, to sposób określenia największego naporu ziemi, wskazany w par. poprzedzającym, jest niewykonalny. Wówczas należy postąpić inaczej /rys. 122/, mianowicie, po przeprowadzeniu kierującej BJ , trzeba zatoczyć półkole na AB , jak na średnicy, przez J poprowadzić równoległą do naziomu BN aż do punktu J_1 przecięcia się JJ_1 z AB ;

z J_1 wyprowadzić prostopadłą do AB , a wreszcie zatoczyć łuk koła o promieniu $= AD$ ze środka A ; przecięcie się AB z łukiem tym niech będzie punkt L_1 ; równoległa do BN , przeprowadzona przez L_1 , wyznaczy w przecięciu się z AN punkt L , ten sam, który znaleźliśmy w poprzednim paragrafie. Że tak jest istotnie, wynika wprost z uwagi, że trójkąty AJJ_1 , ALL_1 , ANB są podobne, a zatem pomiędzy odcinkami AJ_1 , AL_1 , AB zachodzą te same stosunki, co pomiędzy AJ , AL , AN .

141. ROZKŁAD CIŚNIENIA ZIEMI NA ŚCIANĘ OPOROWĄ. Z rys. 119 i 120 i wyjaśnienie w par. 137 wynika bezpośrednio, że napór Z ziemi na ścianę zależy od ciężaru G tej bryły ziemi, która może mieć dążność do osuwania się; ciężar ten zaś jest, jak wiemy, proporcjonalny do pola trójkąta ABK , w którym AK oznacza płaszczyznę osuwową; zatem i napór ziemi Z jest proporcjonalny do pola trójkąta ABK .

Rozważmy teraz rys. 123. Napór Z na ścianę AB jest, jak mówiliśmy, proporcjonalny do pola trójkąta ABK , gdzie AK oznacza płaszczyznę osuwową.

Jeśli byśmy obliczyli napór ziemi na część ściany, naprz. $A_y B$, otrzymalibyśmy, że napór ten Z_y będzie proporcjonalny do pola trójkąta $A_y B K_y$. Ten ostatni trójkąt jest podobny do trójkąta ABK .

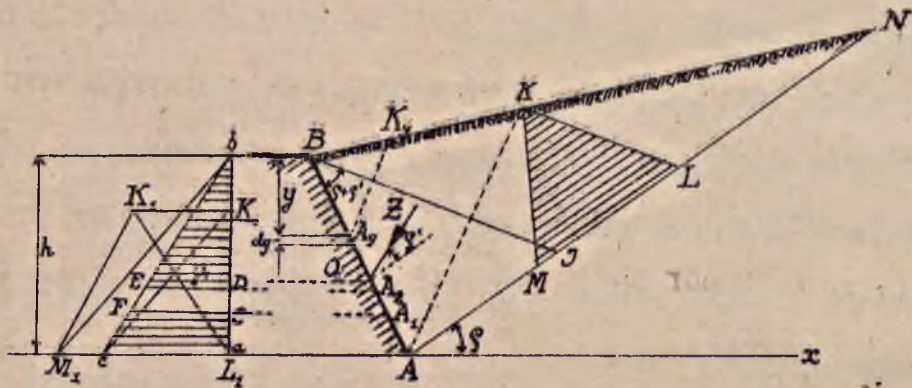
Ponieważ pola trójkątów podobnych mają się do siebie jak kwadraty odpowiednich boków lub wysokości, możemy więc powiedzieć, że

$$\frac{Z}{Z_y} = \frac{\overline{AB}^2}{A_y B_y^2}, \quad \text{lub} = \frac{h^2}{y^2} \quad \text{gdzie } h \text{ i } y$$

są to wysokości trójkątów ABK i $A_y B K_y$.

Oznaczając spółczynnik proporcjonalności przez ξ , napiszemy więc

$$Z = \xi \cdot h^2 \quad \text{w podobny sposób}$$



$$Z_y = \xi \cdot y^2$$

wówczas dla części ściany, odpowiadającej wysokości $y+dy$, napiszemy:

$$Z_{y+dy} = \xi (y+dy)^2$$

Z tego wynika, że na element ściany na wysokości dy przypada napór:

$$Z_{dy} = Z_{y+dy} - Z_y = \xi(y+dy)^2 - \xi y^2 = \xi(dy^2 + 2y dy).$$

Odrzucając dy^2 , jako nieskończenie małą drugiego rzędu, otrzymamy:

$$Z_{dy} = 2 \xi y dy$$

albo:

$$\frac{Z_{dy}}{dy} = 2 \xi y.$$

Stosunek $\frac{Z_{dy}}{dy}$ jest to JEDNOSTKOWY NAPÓR ziemi w danem miejscu ściany, oznaczonej wysokością y . Nazywać będziemy taki jednostkowy napór CIŚNIENIEM.

Tak więc ciśnienie w dowolnem miejscu ściany jest proporcjonalne do odległości tego miejsca od powierzchni ziemi. Powiemy, że CIŚNIENIE ZIEMI NA ŚCIANĘ ROZKŁADA SIĘ LINJOWO i poczynając od zera - w punkcie najwyższym B - wzrasta do największej wartości w punkcie A .

Całkowity napór ziemi Z jest proporcjonalny do pola trójkąta KLM . Aby otrzymać ciśnienie w dowolnym punkcie ściany, trzeba trójkąt KLM przekształcić na równoważny mu trójkąt, o wysokości h .

Można to wykonać łatwo w sposób następujący:

Przenosimy trójkąt KLM tak, aby nowa podstawa jego $L_1 M_1$ przypadła na prostą poziomą x . Przez punkt L_1 /albo a / prowadzimy prostą pionową ab , punkt b łączymy z M_1 i przez punkt K_0 przecięcia się prostej $K_0 K_1$ /równoległej do x / z ab prowadzimy równoległą do $M_1 b$

W przecięciu się z prostą x znajdziemy punkt c , który, gdy połączymy z b , otrzymamy trójkąt abc . Trójkąt ten daje szukany rozkład ciśnienia na ścianę AB wzdłuż jej wysokości. Trójkąt abc będziemy nazywali "trójkątem rozkładu ciśnień", lub wprost "trójkątem ciśnień". Z wykresu tego możemy korzystać przy wyznaczaniu działania ziemi na poszczególne części ściany; np. napór ziemi na część ściany A, A_2 jest proporcjonalny do pola trapezu, wyciętego z trójkąta ciśnień abc przez dwie równoległe do x , poprowadzone przez punkty A_1 i A_2 . Napór ten więc równa się polu $CDFE$ pomnożonemu przez q .
 $/q =$ ciężar właściwy ziemi/.

142. PUNKT PRZYŁOŻENIA NAPORU ZIEMI NA ŚCIANĘ. Kiedy poznaliśmy rozkład ciśnień na ścianę, łatwo odpowiemy, gdzie jest przyłożony napór na tę czy inną część ściany.

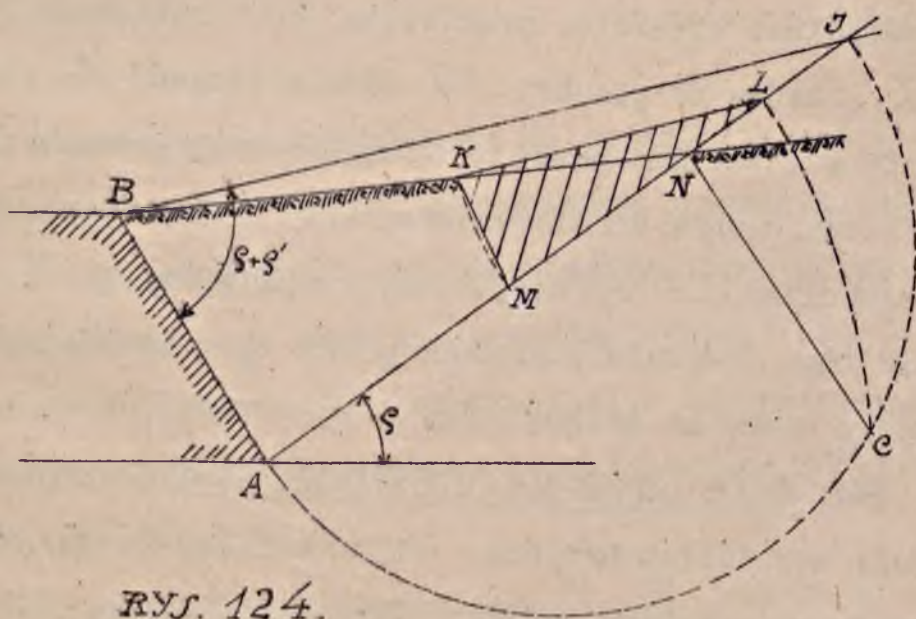
A więc, jeśli szukamy punktu przyłożenia naporu ziemi na ścianę AB /rys. 123/, który należy traktować jako wypadkową sił ciągłych, jednostajnie wzrastających od A do B , to wypadkowa przejdzie przez środek ciężkości

O_1 pola trójkąta ciśnień abc , czyli w odległości $\frac{4}{3}$ od podstawy. Prowadzimy zatem przez O_1 równoległą do Ax aż do przecięcia się z AB w p. O . Punkt O jest punktem przyłożenia naporu. Ponieważ napór ziemi tworzy z normalną do płaszczyzny AB kąt tarcia $= \varphi'$, więc, odłożywszy kąt φ' naprawo od normalnej, znajdziemy

linję działania naporu ziemi.

W podobny sposób znaleźlibyśmy punkt przyłożenia naporu ziemi, naprz. na część ściany $A_1 A_2$. Punkt ten znajdzie się na AB na tej wysokości, na której znajdzie się środek ciężkości pola ciśnień $CDEF$. Co do wyznaczenia linji działania naporu, należy powtórzyć te same uwagi, co i dla ściany AB .

143. JEDEN ZE SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKÓW. Korzystając z podanego w poprzednich paragrafach ogólnego sposobu znajdowania naporu ziemi na ścianę płaską, i zachowując podobne do poprzedniego oznaczenia, łatwo damy sobie radę w każdym innym przypadku.



RYC. 124.

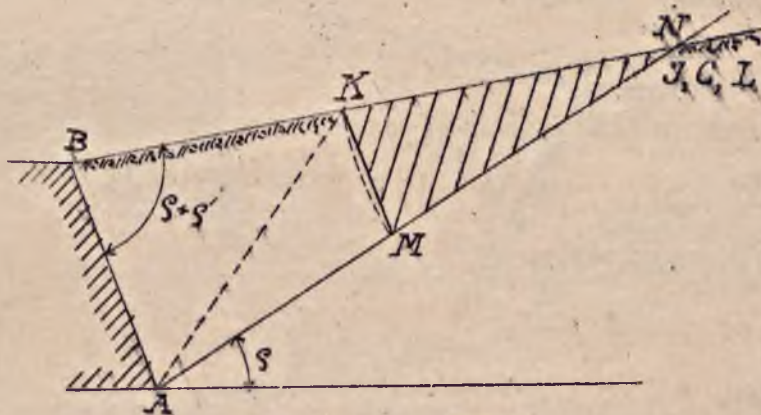
Jako jeden z przykładów niech będzie taki: znaleźć

napór ziemi na ścianę, jeśli "kierunkowa" wychodzi PONAD naziom, jak to widzimy na rys. 124, gdzie prosta BN wskazuje naziom, zaś kierunkowa BJ , tworząc kąt $(\varphi + \varphi')$ z płaszczyzną ściany AB , wychodzi ponad naziom. Zauważmy, że odcinek $AJ = a$ i odcinek $AN = c$ są analogiczne do podobnych odcinków na fig. 122.

W końcu paragr. 137 otrzymaliśmy, że aby wyznaczyć punkt L , przy pomocy którego odnajdziemy na naziomie punkt K , należy określić odcinek $b = \sqrt{ac}$. W tym celu, podobnie jak w par. 134 na odcinku a , jak na średnicy, zataczamy półkole; z punktu N /koniec odcinka c / wystawiamy do a prostopadłą aż do przecięcia się w C z półkolem; wreszcie, promieniem AC zataczamy łuk CL , który na prostej AJ odcina długość $AL = b$. Kiedy znaleźliśmy punkt L , prowadzimy przezeń prostą LK równoległą do kierunkowej AJ . Odłożywszy następnie odcinek $LK = LM$ znajdujemy trójkąt naporu KLM . Pole tego trójkąta pomnożone przez q da nam wartość naporu ziemi na ścianę AB .

144. DRUGI SZCZEGÓLNY PRZYPADEK. Kiedy „kierunkowa” ułoży się wzdłuż naziomu, jak to widzimy na rys. 125. Postępujemy podług ogólnej reguły: pod kątem φ prowadzimy prostą zesypu AN . Kierunkowa poprowadzona z B przetnie prostą AN w punkcie J , który upadnie na punkt N . Jeśli na AN jak na średnicy zataczymy

łuk i z punktu J wystawimy prostopadłą, otrzymamy punkt C /i ten znajdzie się też w punkcie N /. Odcinek AC na prostej AN wyznaczy punkt L /i ten punkt będzie w N /. Przez znaleziony punkt L prowadzimy pro-



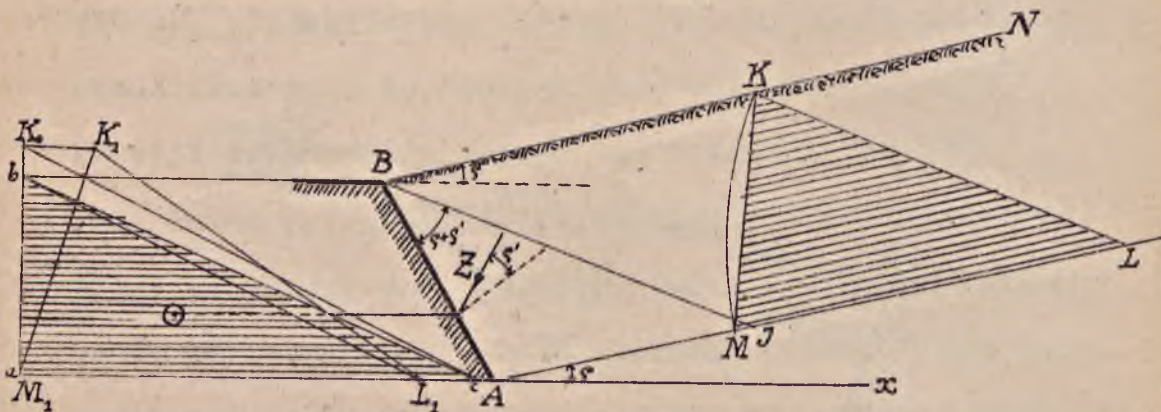
RYC. 125.

stą równoległą do kierunkowej do przecięcia się z naziomem w punkcie K . Punkt ten w danym przypadku jest nieokreślony, gdyż prosta JK idzie wzdłuż prostej naziomu AN . Wobec tego zmuszeni jesteśmy zwrócić się do innej właściwości punktu K , wynikającej z twierdzenia, przytoczonego w par. 137; szukana prosta osuwowa AK połowi pole $ABKLA$.

Na zasadzie tego znajdziemy, że K znajduje się w połowie odcinka BN , inaczej BL . Kiedy punkt K znaleźliśmy, odkładamy $KL=ML$, i otrzymamy wówczas trój-

kąt naporu KLM .

145. JESZCZE JEDEN PRZYPADEK SZCZEGÓLNY. Gdy na ścianę AB przeziemia, której naziom BN jest równoległy do płaszczyzny zesypu AL /rys.126/.



RYS. 126.

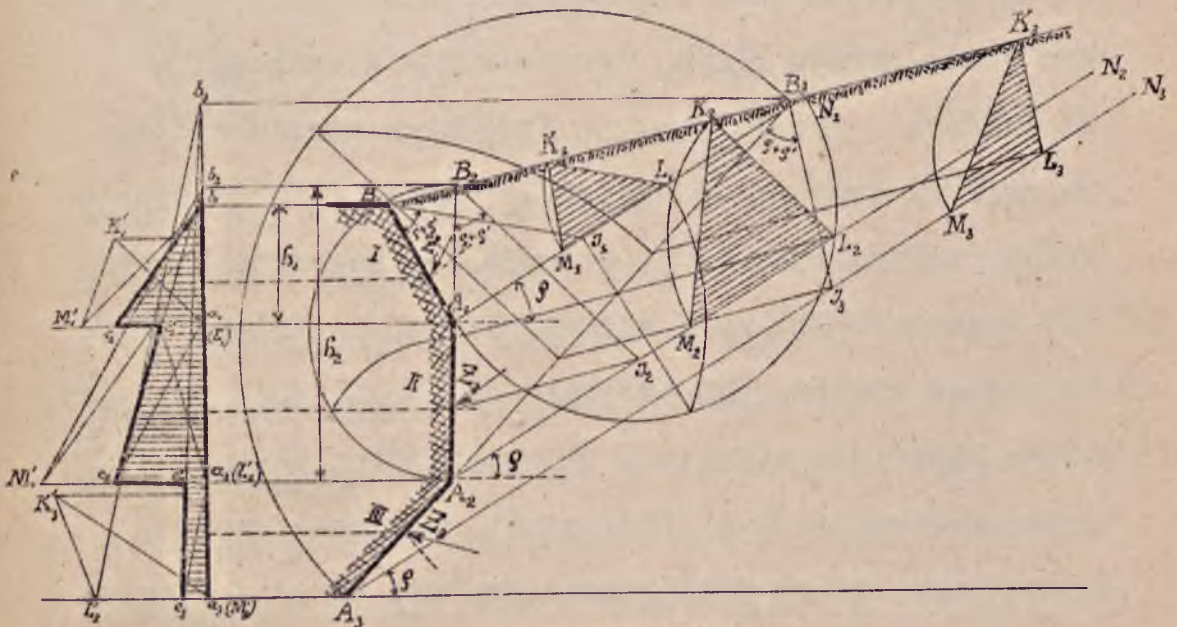
W tym razie punkt przecięcia się BN z AL jest nieskończenie odległy, a zatem i cały trójkąt parcia KLM leży w nieskończoności, mając jednak wymiary skończone.

Możemy sobie łatwo wyobrazić ów trójkąt w granicach rysunku: należy tylko przez dowolny punkt L prostej zesypu poprowadzić KL równoległą do kierunkowej BJ , a następnie odłożyć odcinek $LM=LK$ i połączyć punkty K i M . Otrzymamy wtedy trójkąt KLM . Oczywiście jest, że taki sam trójkąt otrzymalibyśmy i w tym razie, gdyby powyższą budowę wykonać w nieskończoności.

Przekształcenie tego trójkąta naporu na równoważny mu trójkąt abc , o wysokości = wysokości ściany wykonywa się tak samo, jak w przypadku ogólnym /par.141/.

Całkowity napór Z , mierzony polem trójkąta abc , jest przyłożony w tym punkcie ściany AB , który przypada na jednej wysokości ze środkiem ciężkości trójkąta ciśnien abc i tworzy z normalną do ściany kąt β' .

146. NAPÓR ZIEMI NA ŚCIANĘ O PROFILU ŁAMANYM. Gdy ściana oporowa od strony ziemi ograniczona jest kilkoma płaszczyznami, pochyleniemi do poziomu pod różnemi kątami, wówczas w celu wyznaczenia rozkładu ciśnień, należy postąpić



RYŚ. 127.

w sposób, który wyłożymy na przykładzie /rys.127/. Przypuśćmy, że ściana od strony ziemi jest ograniczona trzema dowolnemi płaszczyznami: B_2A_1 , A_1A_2 i A_2A_3 .

Rozpatrzmy naprzód płaszczyznę BA_1 ściany, nie zwracając wcale uwagi na dwie pozostałe dolne płaszczyzny.

Wykreślamy więc, tak samo jak w przypadku ogólnym,

prostą zesypu $A_1 N_1$, prostą kierunkową $B J_1$ i t.d., aż wreszcie otrzymamy trójkąt naporu $K_1 L_1 M_1$, który następnie przekształcamy na trójkąt ciśnień $a_1 b_1 c_1$ o wysokości $= h_1$. Trójkąt ten daje rozkład ciśnień na ścianę $B_1 A_1$.

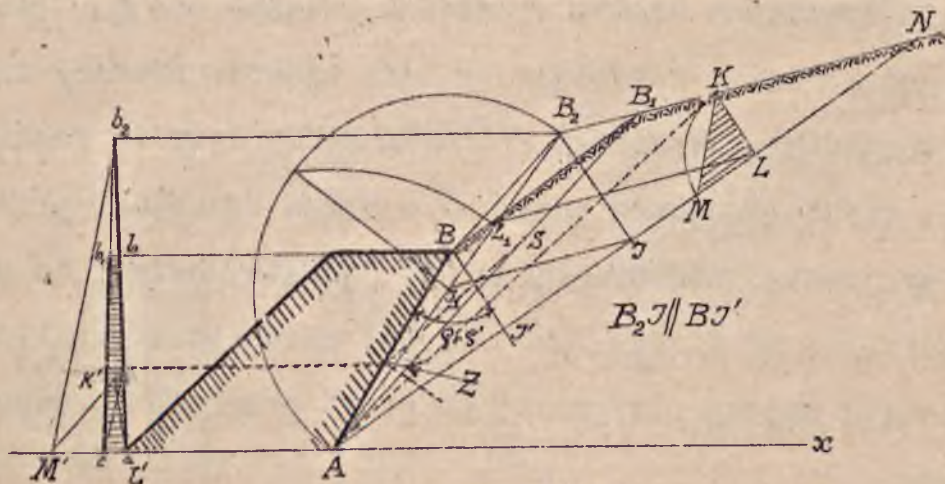
Przechodzimy następnie do płaszczyzny $A_1 A_2$. Przedłużamy ją w myśli, aż do przecięcia się z naziemem $B_1 N_1$ w punkcie B_2 i rozpatrujemy działanie ziemi, jak gdyby na płaszczyznę $A_2 B_2$. Prostą zesypu jest w danym razie prosta $A_2 N_2$, tworząca z poziomem kąt φ ; kierunkową - prosta $B_2 J_2$, a trójkątem naporu - trójkąt $K_2 L_2 M_2^x$. Trójkąt ten należy przekształcić na prostokątny, o wysokości $= h_2$, co może być wykonane znanym już sposobem. Aby mieć wykres ciśnień na ścianę $A_1 A_2$, należy od otrzymanego trójkąta $a_2 b_2 c_2$ odrzucić tę część, która odpowiada ciśnieniu na wyobraźną ścianę $A_1 E_2$, czyli trójkąt $a_2 b_2 c_2'$. Pozostanie wówczas trapez $a_2 c_2' c_2 a_2$, który przedstawia szukany rozkład ciśnień na ścianę $A_1 A_2$.

Zupełnie tak samo postępujemy z płaszczyzną $A_2 A_3$ ściany. W trójkącie ciśnień $a_3 b_3 c_3$, który otrzymamy, nie posiada dla nas znaczenia część $a_2 b_3 c_2'$; pozostaje więc jedynie trapez $a_2 c_2' c_3 a_3$. Środki ciężkości: trójkąta $a_2 b_3 c_3$, trapezu $a_2 c_2' c_3 a_3$ i trapezu $a_2 c_2' c_3 a_3$ wskażą punkty przyłożenia naporu ziemi Z_1, Z_2, Z_3 w płasz-

x/ Trójkąt ten jest wyznaczony na rys. 127 sposobem, wyłożonym w par. 140.

czynach I, II, III.

147. POWIERZCHNIA NAZIOMU ŁAMANA. Przypuśćmy, że na-
ziom ma kształt jak na rys. 128; wówczas trójkąt naporu



RYJ. 128.

wyznaczamy z warunku, aby prosta osuwowa AK połowiła pole ABB_2KLA , jak to było dowiedzione w paragr. 137.

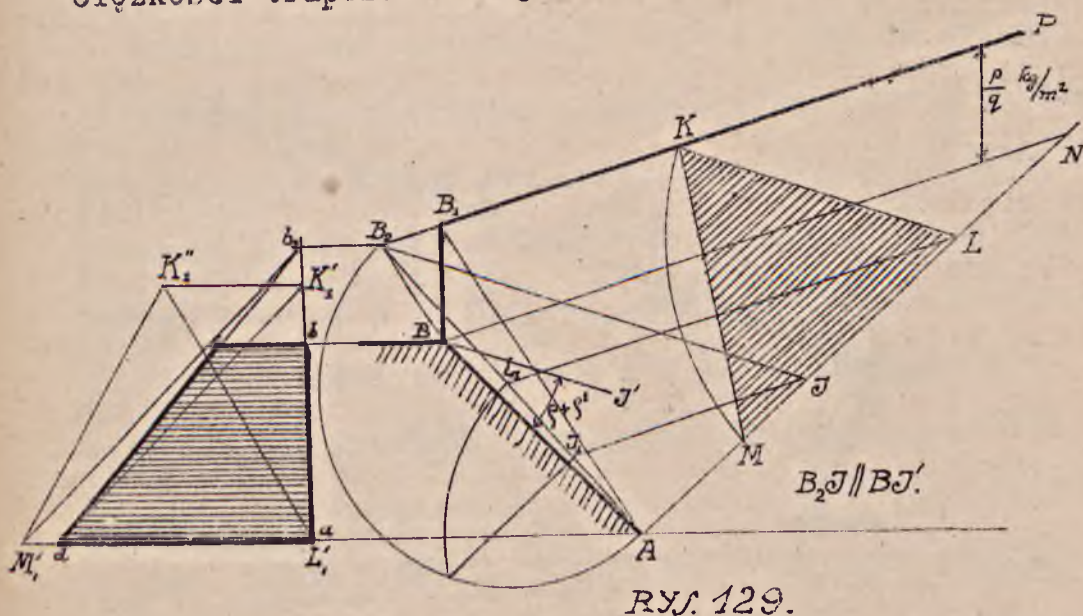
W celu ułatwienia zadania zastępujemy trójkąt ABB_2 przez równoważny mu trójkąt, którego jeden z boków stanowi przedłużenie prostej B_2N , a drugi (AB_2) jest wspólny dla niego oraz dla figury NB_2Ax . Wykonywamy to, prowadząc przez B równoległą do prostej AB_1 , aż do punktu B_2 przecięcia się z B_2N , i łącząc następnie B_2 z A .

Teraz uważamy, że mamy do czynienia jakby ze ścianą AB_2 , na którą prze bryła ziemi NB_2Ax i wykreślamy dla niej trójkąt naporu KLM i równoważny mu trójkąt ciśnienia abc . Od tego ostatniego odrzucamy część b_1b_2c , odpowiadającą tej części ściany domniemanej, która znaj-

duje się powyżej ściany rzeczywistej. Pozostanie wobec tego trapez ab_2c , który przedstawia rozkład ciśnienia na ścianę AB . Punkt przyłożenia naporu ziemi znajdziemy na wysokości środka ciężkości trapezu ab_2c , lub też, co będzie mniej dokładnie, w taki sposób: szukamy środka ciężkości czworoboku ABB_1KA , który dąży do osunięcia się; niech to będzie punkt S . Przez ten punkt prowadzimy prostą, równoległą do KA , prostej osuwu, do przecięcia się ze ścianą AB . Punkt przecięcia się tych prostych możemy przyjmować za punkt przyłożenia naporu ziemi.

148. DODATKOWE OBCIĄŻENIE NAZIOMU. Przypuśćmy, że prócz ciężaru ziemi N_0BAx /rys. 129/ na ścianę AB działa jeszcze dodatkowe obciążenie równomiernie rozłożone na naziomie i wynoszące ρ kg/m^2 . W takim przypadku możemy dodatkowe obciążenie zastąpić warstwą ziemi takiej grubości, aby ciężar tej warstwy ziemi wyniósł ρ kg/m^2 . A dalej postępujemy podobnie, jak w par. poprzedzającym: zastępujemy trójkąt ABB_1 przez AB_1B_2 , przyjmujemy AB_2 za domniemaną ścianę i wykreślamy dla niej trójkąt naporu i trójkąt ciśnień, uważając B_2P jako naziom. Od trójkąta ciśnień ab_2d należy odrzucić część bb_2c . Pozostała część - trapez $abcd$ wskaże nam rozkład ciśnienia na ścian AB . O Punkcie przyłożenia

naporu ziemi na ścianę AB sądząc będziemy ze środka ciężkości trapezu $abcd$.

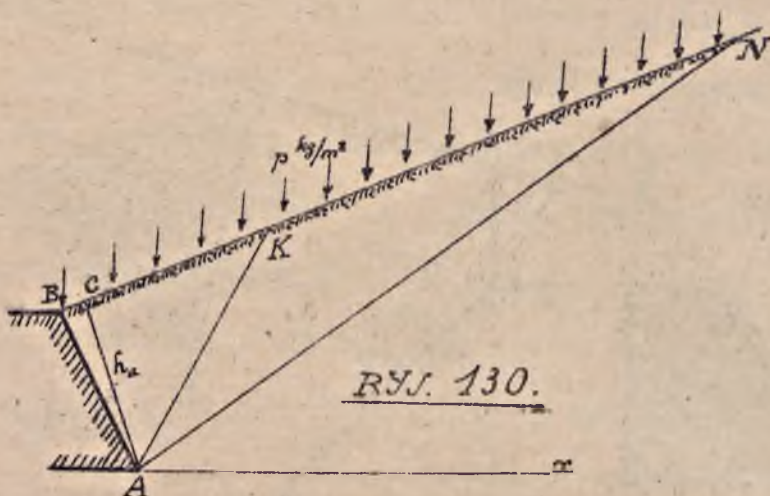


149. Często też jest stosowany inny sposób rozwiązywania powyższego zadania, mianowicie, nie uwzględniamy dodatkowego obciążenia naziomu, natomiast przyjmujemy stosownie zwiększony ciężar właściwy ziemi.

Obliczmy, jaki należy przyjąć ciężar właściwy ziemi, jeśli dodatkowe obciążenie naziomu wynosi $\rho \text{ kg/m}^2$ rys. 130/. Przypuśćmy, że należy uwzględnić dodatkowe obciążenie na dowolnej części naziomu \overline{BK} . Ciężar odpowiedniej bryły ziemi ABK znajdziemy: $\frac{1}{2} \cdot \overline{BK} \cdot h_a \cdot q$; dodatkowe obciążenie naziomu wyniesie $\overline{BK} \cdot 1 \cdot \rho$; razem otrzymamy siły, działające na bryłę: $\frac{1}{2} \overline{BK} \cdot h_a \cdot q + \overline{BK} \cdot 1 \cdot \rho$. Jeśli tę siłę mamy przedstawić jedynie jako ciężar tej bryły, wówczas, oznaczając zastępczy ciężar właściwy

przez q' , otrzymany:

$$\frac{1}{2} \overline{BK} \cdot h_a \cdot q + \overline{BK} \cdot 1 \cdot p = \frac{1}{2} \overline{BK} \cdot h_a \cdot q';$$



$$q' = q + \frac{2p}{h_a};$$

h_a oznacza tu odległość A od płaszczyzny naziomu.

Otóż, przyjmując ciężar właściwy ziemi nie q lecz q' , możemy dodatkowego obciążenia naziomu już nie uwzględniać i traktować zadanie z ostatniego paragrafu w sposób typowy, jak to było wskazane w par. 139 i 140.

Zwrócić tu należy uwagę, że wyłożona metoda nie jest w zupełności słuszna. Dostrzeżemy to, rozważając rozkład ciśnień na ścianę AB . Przy pierwszym sposobie, wykazanym w par. 148, o rozkładzie ciśnień poucza nas trapez $abcd$ /rys. 129/, zaś przy sposobie drugim, podanym w obecnym paragrafie, rozkład ciśnień będzie wskazany przy pomocy trójkąta, abc jak na rys. 123:

Pierwszy rozkład należy uznać za logiczniejszy, niż drugi.

Również punkt przyłożenia naporu ziemi na ścianę otrzymany przy pierwszym sposobie wyżej, niż przy drugim sposobie. Więcej zaufania wzbudza, oczywiście, pierwsze rozwiązanie i tembardziej zasługuje na stosowanie, że, jak z późniejszego wykładu będzie to wynikało, taki rozkład sił będzie dla muru oporowego pod względem stateczności i wytrzymałości więcej niebezpieczny, a więc bardziej godny baczniejszego rozważania.

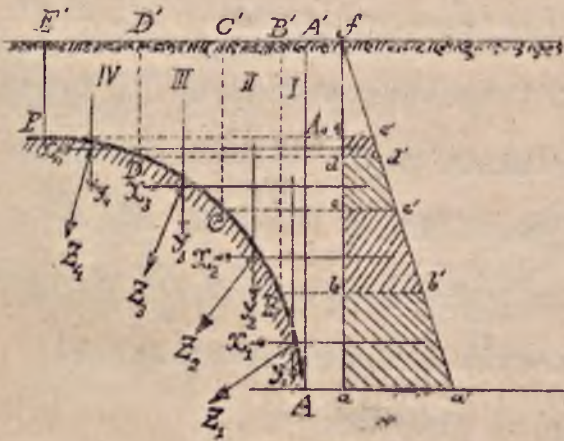
150. NAPÓR ZIEMI NA ŚCIANĘ O POWIERZCHNI KRZYWEJ.

Przypuśćmy, że należy znaleźć napór ziemi na powierzch-

nię grzbietową sklepienia $ABCD$ rys. 131/.

Naziem niech będzie poziomy AE' . Długość sklepienia /wzdłuż tworzącej/ przyjmujemy, jak zwykle = 1 m.

Wskażemy tu na **PRZYBLIŻONY**, praktycznie dostatecznie



RYS. 131.

dokładny sposób.

Dzielimy linię grzbietową na kilka części niekoniecznie równych: AB, BC, CD, DE Przez punkty A, B, C, D, E — prowa-

dziny proste pionowe, AA', BB', CC', DD', EE' , które dzielą brykę ziemi, opierającą się na sklepieniu, na części I, II, III, IV. Znajdujemy ciężary i środki ciężkości tych części. Przyjmujemy, że ciężary znalezione będą PIONOWEMI składowemi naporu ziemi na odpowiednie części powierzchni grzbietowej. Niech te składowe będą Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . Następnie zakładamy, że składowe POZIOME naporu ziemi będą takie jakibyśmy otrzymali, obliczając napór ziemi na rzuty pionowe części powierzchni grzbietowej, to jest tak, jakgdyby to były części ściany pionowej AA_0 . Przypuścimy, że postępując w sposób, podany w poprzednich paragrafach, znaleźlibyśmy trójkąt ciśnień $aa'f$. Trapezy ciśnień na poszczególne części rzutu sklepienia będą: $abb'a', bcc'b', cdd'c', dee'd'$. Jeżeli obliczymy pola tych trapezów, pomnożymy je przez ciężar właściwy ziemi, otrzymamy napór ziemi na części płaszczyzny AA_0 . Będą to składowe POZIOME X_1, X_2, X_3, X_4 całkowitego naporu ziemi na powierzchnię AB, BC, CD, DE . Linje działania tych składowych przejdą przez środki ciężkości właściwych trapezów ciśnień.

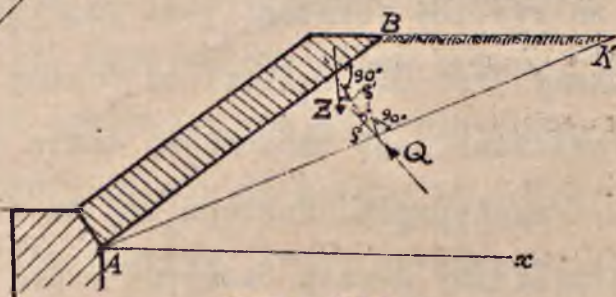
Kiedy już znaleźliśmy siły X_1, Y_1 , określimy przy pomocy trójkąta sił wypadkową ich Z_1 , która będzie całkowitym naporem ziemi na powierzchnię AB . Toż samo dodanie sił X_2 i Y_2 da nam wypadkową Z_2 - napór ziemi na powierzchnię BC i t.d.; wreszcie otrzymamy Z_3 i Z_4 .

Dla zaoszczędzenia miejsca i dla większej wyrazistości rysunku wiele pomocniczych czynności nie zostały wcale pokazane; zaznaczono tylko ostateczne wyniki: trójkąt *aa'f* środki ciężkości pól, wypadkowe Z_1, Z_2, \dots i t.p.

151. ODPÓR ZIEMI. W paragr. 135 rozróżniliśmy działanie muru bierne od czynnego; w pierwszym przypadku ziemia wywiera na ścianę NAPIR, w drugim przypadku ODPÓR. O naporze była mowa w paragr. 136 do 150. Obecnie rozważmy odpór ziemi. Z samego charakteru odporu wynika, że, jeżeli ziemia pod naciskiem muru może być wysunięta z za niego, kierunek oddziaływania muru na ziemię i odwrotnie oraz ziemi na ziemię w płaszczyźnie /nazwijmy tak/ wysuwu powinny ze stosownemi



RYS. 132.



RYS. 133.

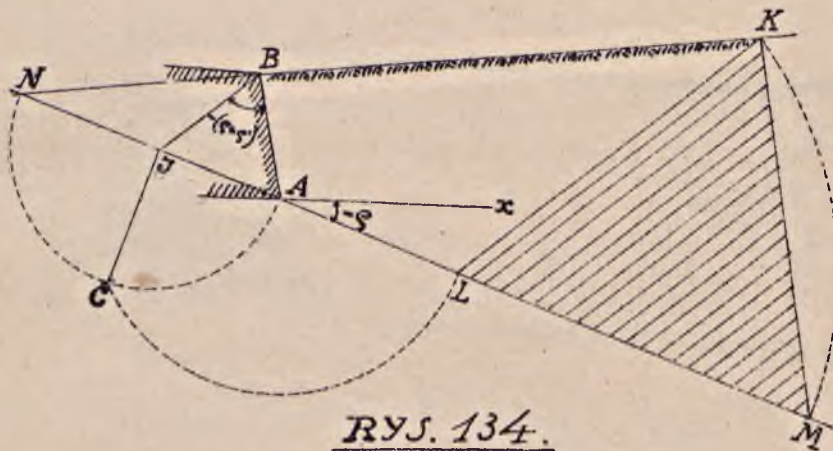
normalnemi do AB i AK tworzyć kąty β i β' , odłożone w stronę przeciwną niż to było przy naporze ziemi /por. rys.

119/. Kierunek oddziaływania muru i ziemi w płaszczyźnie wysuwu wskazany jest na rys. 132, gdzie ściana AB, parta się S od strony, dajmy na to, sklepienia, dąży do wysunięcia zza siebie ziemi; ziemia w tym razie wywiera odpór. Na rys. 133 wskazany jest drugi przykład odporu ziemi - w przypadku muru okładzinowego. W obydwóch tych przykładach wskazany jest kierunek sił Z i Q względem normali do płaszczyzn AB i AK.

Całe zagadnienie, dotyczące ODPORU ziemi, różni się, zatem, od zagadnienia na temat NAPORU tylko znakami kątów φ i φ' .

Nięc i rozwiązanie odpowiednich zadań należy uskutecznić przy uwzględnieniu tej różnicy.

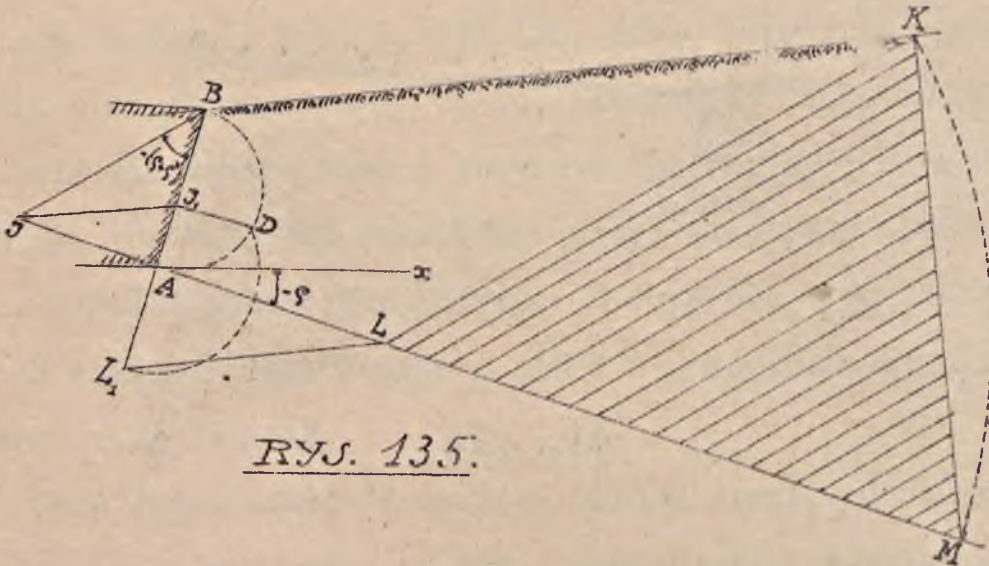
Na rys. 134 pokazane jest rozwiązanie zadania, w którym szukany jest ODPÓR ziemi na ścianę AB. W celu ułatwienia wprowadzone jest znakowanie takie samo, jak na rys. 122, 123 i następnych. Postępujemy tu w taki sposób: z punktu A prowadzimy prostą "zesypu" - pod kątem $(-\varphi)$ do poziomu \overline{Ax} . Prostą zesypu przedłużamy do przecięcia się z namiem BN w punkcie N. Oczywiście, punkt N znajdzie się z lewej strony AB, odwrotnie niż to było w przypadku NAPORU. Z punktu B prowadzimy "kierunkową" BJ, która utworzy z AB kąt $[-(\varphi + \varphi')]$. Na AN zataczamy koło jak na średnicy i z punktu J prowadzimy prostopadłą JC. Na prostej zesypu.



RYS. 134.

odkładamy odcinek $AL =$ cięciwie AC . Przez punkt L prowadzimy prostą LK równoległą do "kierunkowej", wreszcie odkładamy odcinek $LM = LK$. Otrzymujemy w ten sposób "trójkąt odporu". Wykreślenie trójkąta ciśnień i następnie znalezienie punktu przyłożenia odporu na ścianę AB - już nie będzie stanowić trudności; pamiętać tylko należy, że kąty φ i φ' są ujemne.

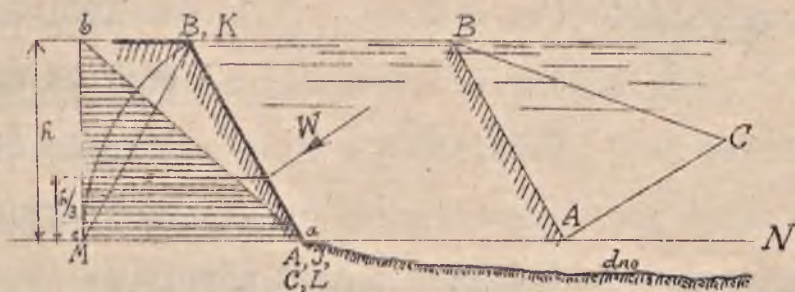
Gdybyśmy punkt N otrzymali POZA granicami rysunku, należy zastosować wówczas budowę podobną do tej, jaką poznaliśmy w paragr. 140 /rys. 122/. Jak w tym razie można sobie poradzić, widocznie jest na rys. 135.



RYJ. 135.

152. PARCIE WODY NA ŚCIANĘ PŁASKĄ. Działanie wody na ścianę oporową daje się wyznaczyć o wiele prościej, niż działanie ziemi. W danym, bowiem, razie zarówno kąt tarcia wody o ścianę, jak i kąt "zesypu" dla wody = zero, a zatem linja AN będzie poziomą, prosta "kierunkowa" ułoży się wzdłuż ściany AB /rys. 136/. Łatwo, dalej, zrozumieć, że wobec tego punkty J, C oraz L przypadają w A i że wierzchołek K trójkąta parcia znajduje się w punkcie B. Dwa inne boki tego trójkąta wyznaczymy, odmierzając $LM = LK$ i łącząc punkt M z K. Zatem otrzymaliśmy trójkąt parcia KLM. Równoważnym trójkątem ciśnienia jest trójkąt abc. Parcie cał-

Wódki wody W jest prostopadką do ściany, równa się polu

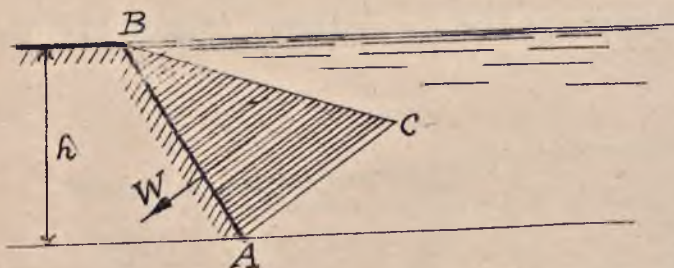


RYJ. 136.

trójkąta abc i jest przyłożone do ściany w punkcie, znajdującym się na wysokości $\frac{h}{3}$ od poziomu AN . Trójkąt abc daje obraz rozkładu ciśnień na rzut płaszczyzny AM na płaszczyznę pionową. Dogodniej będzie jednak mieć wykres rozkładu ciśnień wody na właściwą ścianę. W tym celu należy przekształcić trójkąt ABM na równoważny mu trójkąt prostokątny, którego jedna z przyprostokątnych = AB . Aby to uczynić, odmierzamy na prostopadłej w punkcie A do AB /prawa strona rys. 136/ odcinek $AC = h$ i łączymy punkty C z B . Dowiedzimy, że $\triangle ABC$ przedstawia szukany wykres.

Pole $\triangle ABC = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h$; następnie pole $\triangle ABM = \frac{1}{2} \overline{AM} \cdot h$, ponieważ $AM = AB$, więc $\triangle ABM = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h$. Zatem pole $\triangle ABC =$ polu $\triangle ABM$. c.b.d.d.

Widzimy stąd, że W CELU WYKREŚLENIA TRÓJKĄTA PARCIA DLA WODY, NA PROSTEJ AC , PROSTOPADLEJ W A DO ŚCIANY AB /rys. 137/ ODMIERZYĆ ODCINEK $AC =$ GŁĘBOKOŚCI h PUNKTU A

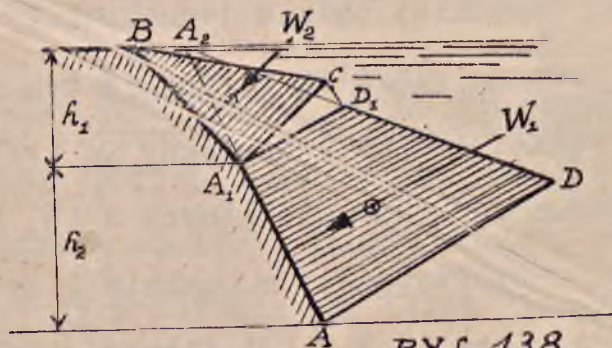


RYS. 137.

POD ZWIERCIADŁEM
WODY I POŁĄCZİĆ
PUNKTY B i C.

153. PARCIE
WODY NA ŚCIANĘ
ŁAMANĄ. Ściana,
na którą ciśnie

woda, dajmy na to, jest łamana i jest utworzona np. z dwóch płaszczyzn /rys.138/ A_1B i AA_1 . Zastosujemy do każdej z tych płaszczyzn wyniki, otrzymane w par. poprzednim. Przede wszystkim względem płaszczyzny A_1B :



RYS. 138.

Wystawiamy
prostopadłą do
 A_1B w punkcie A_2 ;
na tej prostopad-
łej odkładamy od-
cinek A_2C = głąbo-
kości punktu A_1
pod zwierciadłem
= h_1 , wreszcie

łączymy punkt B z C. Otrzymamy w ten sposób trójkąt parcia wody na ścianę A_1B . Zwracamy się do płaszczyzny AA_1 : przedłużamy w myśli ścianę AA_1 , aż do przecięcia się jej ze zwierciadłem wody i kreślimy trójkąt parcia dla wyobraźalnej ściany AA_2 . Uczynimy to odmierzając na prostej

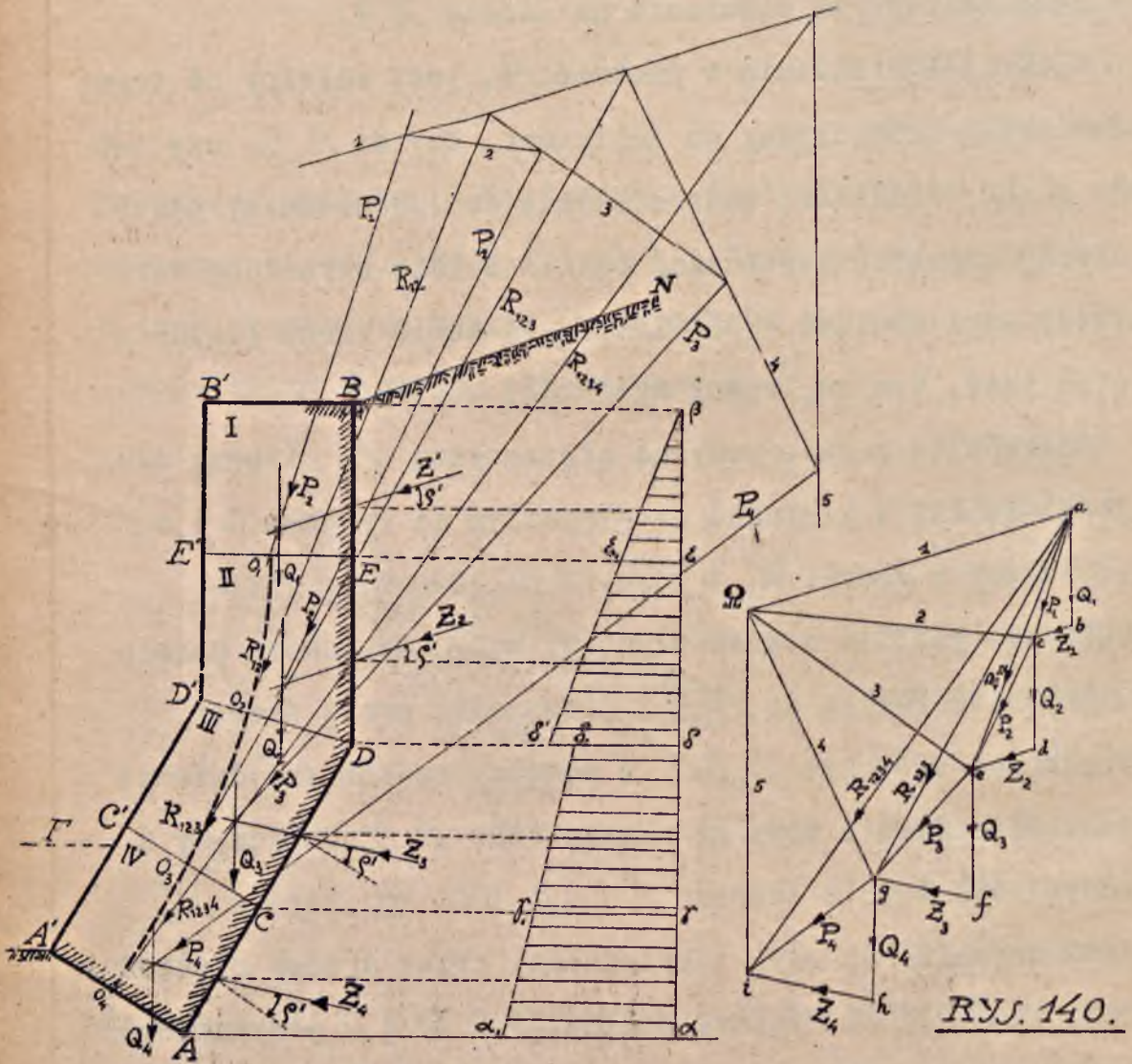
AD, prostopadkiej do AA_2 , odcinek $AD = h_1 + h_2$ i łącząc punkt D z A_2 . Od trójkąta AA_2D , otrzymanego powyżej, należy odrzucić część $A_1A_2D_1$ /odpowiadającą parciu na nieistniejącą część ściany A_1A_2 /, reszta zaś, t.j. trapez AA_1D_2D przedstawi wykres ciśnienia na ścianę AA_1 .

Kierunek ciśnienia w punkcie A_1 jest zależny od tego, do jakiej płaszczyzny go zaliczamy, czy do A_1B , czy też do AA_1 ; ciśnienie zawsze będzie do odpowiedniej płaszczyzny normalne i posiadać będzie ściśle określoną wartość, gdyż odcinki A_1C i A_1D_1 są sobie równe /każdy z nich jest, bowiem, równy wysokości h_1 /.

Całkowite parcie wody na płaszczyznę A_1B /przy długości ściany w kierunku prostopadłym do rysunku = 1 m. / obliczymy z wzoru: $W_2 = \text{polu} \triangle A_1BC \cdot 1000 \text{ kg.}$, gdzie 1000 kg. jest to ciężar właściwy wody. Wypadkowe parcie W_2 jest normalne do A_1B i przechodzi przez środek ciężkości trójkąta A_1BC . W podobny sposób znajdziemy: całkowite parcie wody na płaszczyznę AA_1 obliczymy z wzoru: $W_1 = \text{polu trapezu } AA_1D_2D \cdot 1000 \text{ kg.}$ Parcie W_1 jest normalne do AA_1 i przechodzi przez środek ciężkości trapezu AA_1D_2D . Wymiary pól A_1BC i AA_1D_2D powinny być wzięte w metrach.

154. BADANIE RÓWNOWAGI ŚCIAN OPOROWYCH, ŚRODKI I LINJA ŚRODKÓW CIŚNIEŃ. Dotychczas mówiliśmy o tem, jak się wyznacza siły, które wywiera ziemia lub woda na ścianę opo-

rową. Teraz rozpatrzmy, w jaki sposób bada się równowagę ściany oporowej, gdy te siły już mamy znalezione.



RYJ. 139.

RYJ. 140.

Wyobraźmy sobie ścianę oporową, złożoną z bloków I, II, III, IV, dotykających się ze sobą w stosugach CC', DD', EE' . Długość ściany niech będzie 1 m. Nasion niech będzie BN. Przypuśćmy, dalej, że, korzystając z wywodów par.146, otrzymaliśmy, jako wykres ciśnień, figurę $\alpha\beta\delta\delta_1\alpha_1\alpha$, z której znajdziemy napory na poszczególne płaszczyzny ściany oporowej, a więc: Z_1 na płaszczyznę BE z pola $\Delta\beta\epsilon\epsilon_1$; punkt przyłożenia naporu znajdzie się na ścianie BE na poziomie środka ciężkości z tego $\Delta\beta\epsilon\epsilon_1$; linja działania naporu Z_1 tworzy kąt S' z NORMALNĄ do BE . Toż samo powiemy o następnej płaszczyźnie ściany ED : Napór Z_2 , który znajdziemy z pola trapezu $\epsilon_1\epsilon\delta\delta_1$, przechodzi przez punkt, znajdujący się na poziomie środka ciężkości trapezu $\epsilon_1\epsilon\delta\delta_1$, i tworzy kąt S' z NORMALNĄ do ED . Dalej, na płaszczyznę $\frac{CD}{AC}$ działa napór $\frac{Z_3}{Z_4}$, który obliczymy z pola trapezu $\frac{\delta\delta_1\alpha_1}{\delta_1\delta\alpha_1}$; napór ten przechodzi przez punkt, znajdujący się na poziomie środka ciężkości właściwego trapezu i tworzy kąt S' z normalną do $\frac{CD}{AC}$.

Następnie obliczmy ciężary poszczególnych bloków. Ciężary te niech będą Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ; będą to siły pionowe, przyłożone w środkach ciężkości pól: $BEEB', EDD'E', DCC'D', CAAC'$.

Widzimy, że na blok I działają siły Z_1 i Q_1 ; dodajemy je w jedną wypadkową P_1 /rys.140/, która przechodzi przez punkt przecięcia się Z_1 i Q_1 /rys.139/. W podobny sposób

zamiast sił Z_2 i Q_2 , działających na II blok, przykładamy siłę P_2 , znalezioną na rys.140 i prowadzimy ją przez punkt przecięcia się siły Z_2 z Q_2 /rys.139/. W taki sam sposób zastępujemy siły $\frac{Z_3 \text{ i } Q_3}{Z_4 \text{ i } Q_4}$ - siłą $\frac{P_3}{P_4}$. Mając tak przygotowane zadanie przystępujemy do badania równowagi każdego bloku oddzielnie, poczynając od I.

Blok I znajduje się pod działaniem dwóch sił: siły P_1 i oddziaływania nań bloku II. Aby była równowaga, oddziaływanie bloku II na I powinno być, oczywiście, równe sile P_1 , skierowane wzdłuż tej samej prostej, co i siła P_1 , lecz z lotem przeciwnym. Zatem, oddziaływanie to przechodzić będzie przez punkt O_2 , znajdujący się w stosudze EE' . Punkt taki nazwiemy ŚRODKIEM CIŚNIENIA w stosudze EE' .

Przechodzimy następnie do zbadania równowagi bloku II. Na ten blok działa: siła P_1 - od górnego bloku, siła P_2 i oddziaływanie III - dolnego bloku na II.

Dodajmy siły P_1 i P_2 w jedną wypadkową R_{12} /przy pomocy wieloboku sił na rys.139 i wieloboku sznurowego na rys.140/. Ponieważ siła R_{12} ma się równoważyć z oddziaływaniem bloku III na II, więc oddziaływanie to powinno być: równe R_{12} , mieć tę samą co i R_{12} linię działania i posiadać lot odwrotny. Zatem to oddziaływanie przechodzi przez punkt O_2 , znajdujący się w stosudze DD' . Punkt O_2 - będzie to nowy ŚRODEK ciśnienia /w stosudze DD' /.

Zwracamy się w taki sam sposób do bloku $\frac{III}{IV}$: Na ten blok działają: z góry siła $\frac{R_{12}}{R_{123}}$ od bloku $\frac{II}{III}$, siła $\frac{P_2}{P_4}$ i oddziaływanie z dołu od bloku IV. Dodajemy siły $\frac{R_{12}}{R_{123}}$ i $\frac{P_2}{P_4}$ w jedną wypadkową $\frac{R_{123}}{R_{1234}}$. Ponieważ siła $\frac{R_{123}}{R_{1234}}$ ma być w równowadze z oddziaływaniem bloku IV fundamentu więc to oddziaływanie powinno być równe $\frac{R_{123}}{R_{1234}}$, mieć tę samą linię działania, lecz lot przeciwny.

Stąd wnioskujemy, że oddziaływanie to przechodzić powinno przez punkt $\frac{O_3}{O_4}$, znajdujący się w stosudze $\frac{CC'}{AA'}$. Punkty O_3 i O_4 są to również ŚRODKI CIŚNIEŃ w stosugach CC' i AA' .

Połączmy wszystkie środki ciśnień linią ciągłą $O_2 O_3 O_4$ /rys.139/. Otrzymamy krzywą, którą nazywać będziemy LINIĄ ŚRODKÓW CIŚNIEŃ.^{x/} Poniżej wskazane będzie, jakie znaczenie ma ta linja przy badaniu równowagi ściany oporowej.

Na rys.139 przyjęty został naziom od lewej strony ściany na wysokości punktu A' . Gdyby naziom sięgał naprz. do punktu F' , wówczas można warstwy ziemi $A'F'$ nie uwzględniać, t.j. liczyć tak, jakgdyby jej nie było. Łatwo z następnego zrozumiemy, że przez to uzyskamy WIĘKSZE bezpieczeństwo ściany oporowej pod względem jej równowagi.

x/
Uważamy za właściwe zaznaczyć, że rozróżniać będziemy pojęcie "linja środków ciśnień" o czem była mowa, od pojęcia "linja ciśnień", które spotkamy przy sklepieniach.

155. BADANIE LINJI ŚRODKÓW CIŚNIENI. TRZY WARUNKI:

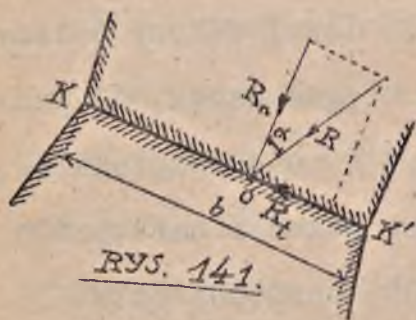
STATECZNOŚCI I WYTRZYMAŁOŚCI ŚCIAN OPOROWYCH. Przypuśćmy, że KK' /rys.141/ jest którąkolwiek stosugą między dwoma blokami ściany oporowej i że oddziaływanie wzajemne tych bloków jest równe R . Wreszcie, dajmy na to, że linja działania siły R , znaleziona drogą poprzednio wskazaną, tworzy normalną do płaszczyzny stosugi kąt α .

Rozkłóźmy siłę R na dwie składowe: jedna (R_n) niech będzie prostopadła do stosugi, a druga (R_t) niech leży w jej płaszczyźnie.

Rozważmy działanie każdej z tych składowych.

Składowa R_t stara się zesunąć jeden blok po powierzchni drugiego, czemu winno zapobiedz tarcie. Czyli tarcie

bloku o blok powinno być większe /a conajmniej równe/ od siły R_t . Warunek ten będzie spełniony tylko w tym razie, gdy kąt tarcia φ dla materiału, z którego są bloki wykonane, będzie większy od kąta α . Dla bezpieczeństwa nie uwzględniamy działania zaprawy



w stosudze. Widzimy zatem, że STATECZNOŚĆ ŚCIANY OPOROWEJ WYMAGA, ABY W KAŻDEJ STOSUDZE SIŁA, Z KTÓRĄ NA DOLNY BLOK DZIAŁA GÓRNY, PRZECINAŁA STOSUGĘ POD KĄTEM, MNIEJSZYM OD

KĄTA TARCIA.

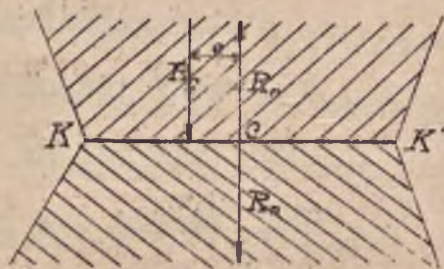
Przejdźmy teraz do składowej R_n . Siła ta stara się przycisnąć bloki do siebie i może skruszyć stykające się powierzchnie. Aby temu zapobiedz, NALEŻY NADAĆ STOSUDZE ODPOWIEDNIE WYMIARY. Poznajmy bliżej naprężenia w stosudze:

Weźmy pod uwagę stosugę /rys.142/, o szerokości = b w cm. i długości = 1 m. /w kierunku, prostopadłym do płaszczyzny rysunku/ i przypuśćmy, że na nią działa siła R_n , prostopadła do niej i przyłożona w jej ŚRODKU ciężkości. Ponieważ pole powierzchni stosugi wynosi $100 \cdot b \text{ cm}^2$

zatem naprężenie, wywołane przez siłę R_n , we wszystkich punktach jest jednakowe i równe $k_1 = \frac{R_n}{100 \cdot b} \text{ kg/cm}^2$.

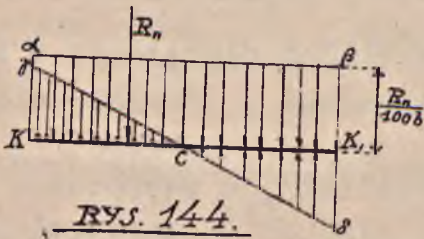
Możemy to przedstawić za pomocą wykresu, podanego na rys.142.

Inaczej będzie w tym przypadku, gdy siła R_n /rys.143/ jest przyłożona w



RYS. 143.

punkcie O , leżącym poza jej środkiem ciężkości C stosugi. Aby wyznaczyć w tym przypadku rozkład naprężeń, na-

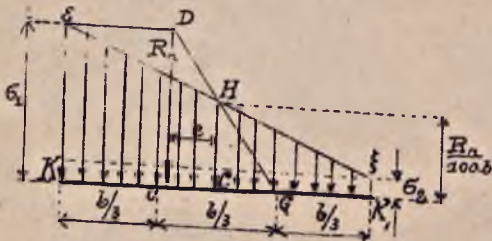


RYS. 144.

leży uciec się do następującego sposobu: przykładowy w środku ciężkości C dwie siły równe i odwrotne, z których każda wynosi R_n . Wiemy, że dodane siły nie zmieniają wcale

działania danej siły R_n , możemy więc uważać, że na stosugę prócz tej ostatniej, działają tamte dwie. Jakież działanie wywrze ten układ sił? Siła R_n /nieprzekreślona/, przyłożona w środku ciężkości stosugi, wywoła działanie, rozpatrzone już poprzednio /rys.142/, a mianowicie ściskanie, jednakowe w całym przekroju. Naprężenia, pochodzące od niej, wyniosą, zatem $\frac{R_n}{100b}$, uwidocznione są

na rys.144 prostą $\alpha\beta$ równoległą do KK' .



RYS. 145.

Prócz rozważonej siły R_n , mamy jeszcze dwie inne, zakreślone na rys. 143. Tworzą one parę, o momencie $= R_n \cdot e$, gdzie e oznacza długość między li-

njami tych sił. Para $(R_n e)$ wywoła naprężenia, które zmieniają się linjowo^{x/} i w danym razie są ściskające w lewej części przekroju (KC) , a rozciągające w prawej (CK') ; w środku ciężkości C naprężenie, wywołane przez parę, jest = 0. Naprężenia te uwidocznione są na rys.144 prostą $\gamma\delta$.

Tak więc przy działaniu rozważanego układu trzech sił powstają w stosudze dwojakie naprężenia, jedno pod wpływem siły R_n i drugie pod wpływem pary sił o mom. $R_n e$. W rezultacie w przekroju istnieją naprężenia wypadkowe, równe sumie algebraicznej tamtych dwóch.

Na rys.145 linja $\epsilon\xi$ przedstawia wykres rozkładu naprężeń wypadkowych. Ponieważ obydwa składniki, dające tę wypadkową, zmieniają się linjowo, zatem i suma ich zmienia się w sposób linjowy i, wobec tego, linja $\epsilon\xi$ jest prostą.

Przytem możliwe są dwa przypadki: 1/ prosta $\epsilon\xi$ nie przecina stosugi KK' ; wtedy naprężenia nie zmieniają znaku i są to naprężenia ściskające w całym jej przekroju /rys.145/; 2/ prosta $\epsilon\xi$ przecina stosugę KK' - wtedy naprężenia zmieniają znak i są w jednej części stosugi KL ściskającymi, a w drugiej LK' - rozciągającymi /rys.146/.

^{x/}Por. nankę o wytrzymałości materiałów, rozdział o gięciu płaskim.

Naprężenia rozciągające są w stosudze nieosiągalne, gdyż na zaprawę nie można liczyć, aby mogła przeciwstawić się naprężeniom rozciągającym.

Co się tyczy materiału, z którego ścianę mamy wykonać, lepiej nie obarczać go naprężeniami rozciągającymi, aby nie było niespodzianek.

Poznajmy kiedy naprężenia w stosudze będą tylko ścisakające, a kiedy mogą powstać ścisakające i rozciągające.

Z teorii "wytrzymałości materiałów" wiemy, że pod działaniem pary sił o momencie M , zginającej pręt, otrzymujemy naprężenia skrajnych włókien:

$$\sigma_g = \pm \frac{M}{W},$$
 gdzie M jest momentem pary $= R_n \cdot e$, zaś W - jest momentem wytrzymałości przekroju pręta, w naszym przypadku, pola stosugi względem osi obojętnej. Ponieważ stosugę przyjmujemy jako FIGURĘ PROSTOKĄTNĄ o długości $l \text{ m} = 100 \text{ cm.}$ i szerokości $b \text{ cm.}$, więc $W = \frac{100 \cdot b^2}{6}$; zatem

$$\sigma_g = \pm \frac{6 R_n \cdot e}{100 \cdot b^2}.$$

Pod działaniem siły R_n , przyłożonej do środka ciężkości stosugi, powstają naprężenia ścisakające: $\sigma_c = -\frac{R_n}{100 \cdot b}$ zatem otrzymany wypadkowe naprężenia włókien skrajnych: dla włókien w ścianie ścisakanej:

$$\sigma_1 = -\left(\frac{6 R_n \cdot e}{100 b^2} + \frac{R_n}{100 b}\right) = -\frac{R_n}{100 b} \left(\frac{6 \cdot e}{b} + 1\right) \dots \dots \dots /1/$$

zaś dla włókien w ścianie rozciąganej:

$$\sigma_2 = + \frac{6R_n \cdot e}{100b^2} - \frac{R_n}{100b} = \frac{R_n}{100b} \left(\frac{6e}{b} - 1 \right) \dots \dots \dots /2/$$

Z ostatniego wzoru /2/ na σ_2 widzimy, że w ścianie rozciąganej powstać mogą naprężenia rozciągające, kiedy będzie $\frac{6e}{b} - 1 > 0$, czyli kiedy $\frac{6e}{b} > 1$, albo $e > \frac{b}{6}$; kiedy zaś $e \leq \frac{b}{6}$, $\sigma_2 \leq 0$.

Zatem kiedy odległość punktu przyłożenia siły R /t.zw. środka ciśnień/ od środka ciężkości przekroju C nie jest większa od $\frac{b}{6}$ /w jedną i drugą stronę/, wówczas naprężeń rozciągających niema. Innymi słowy: W STOSUDZE NIEMA NAPRĘŻEŃ ROZCIĄGAJĄCYCH, GDY PUNKT PRZYŁOŻENIA SIŁY R LEŻY WEWNĄTRZ ŚRODKOWEJ TRZECIEJ CZĘŚCI PRZEKROJU STOSUGI CZYLI WEWNĄTRZ T.ZW. RDZENIA STOSUGI.

Wyobraźmy sobie teraz w każdej stosudze "rdzeń", t.j. trzecią jej część środkową; poprowadźmy dwie linje ciągłe przez końcowe punkty poszczególnych rdzeni, otrzymamy pasek, który nazwiemy "rdzeniem ściany".

Rozwijając, następnie, myśl, powiedzianą powyżej, dla wszystkich stosug ściany, stwierdzimy, że GDY LINJA CIŚNIEŃ PRZEBIEGA WEWNĄTRZ RDZENIA ŚCIANY, WÓWCZAS NAPRĘŻENIA ROZCIĄGAJĄCE W ŚCIANIE NIE POKAZĄ SIĘ. Musimy wyraźnie pod-

kreślić, że powyższe jest słuszne WYŁĄCZNIE DLA SPOINY
O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM.

Obecnie możemy już wypowiedzieć, jakim warunkom powinna
odpowiadać ściana oporowa:

1/ Kąt α między normalną do stosugi a kierunkiem wypad-
kowej siły, działających na górne bloki, powinien być mniej-
szy niż kąt tarcia φ , właściwy danemu materiałowi. Wów-
czas unikamy wysunięcia się części ściany. Zazwyczaj wyma-
gane jest, aby $\alpha < 33^\circ - 35^\circ$.

2/ Linja środków ciśnień powinna przebiegać wewnątrz
rdzenia ściany, gdyż wówczas unikamy niepożądanych naprężeń
rozciągających.

3/ Naprężenia w skrajnych punktach stosug nie powinny
przekraczać dozwolonych naprężeń dla danego materiału, aby
uniknąć skruszenia materiału i zburzenia ściany.

156. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ. a/ SPÓSÓB ANALITYCZNY. Gdy
siła R jest znana, oraz mamy daną odległość środka ciśnień
od środka ciężkości stosugi (e), szerokość stosugi = b
/przy długości jej l m./, wówczas skrajne naprężenia σ_1 i σ_2
można wyznaczyć z wzorów paragr. poprzedzającego, mianowicie
naprężenie ściskające:

$$\sigma_1 = - \frac{R_n}{100b} \left(\frac{6e}{b} + 1 \right)$$

oraz naprężenie rozciągające:

$$\sigma_2 = \frac{R_n}{100b} \left(\frac{6e}{b} - 1 \right).$$

trzymałość ściany wymaga, aby $\sigma_1 \leq k_c$, zaś warunku,

aby $\sigma_2 \leq k_r$ pod uwagę nie bierzemy, gdyż na zdolność kamienia opierania się rozciąganiu nie liczymy.

b/. SPOSÓB WYKREŚLNY. /Rys. 145/. Na prostopadłej do stosugi w środku ciężkości C odmierzamy odcinek $CH = \frac{R_n}{100b}$; następnie dzielimy spoinę na trzy równe części i skrajny punkt rdzenia (Q) łączymy z końcem H odcinka CH ; przez punkt D przecięcia się prostej QH z linią działania siły R prowadzimy równoległą do KK_1 . Jeśli punkt przecięcia się tej ostatniej z prostopadłą, wystawioną w punkcie K do KK_1 , oznaczymy przez ε , to odcinek εK przedstawi naprężenie w stosudze w punkcie K ; czyli największe naprężenie σ_1 . Łącząc następnie punkty ε i H i przedłużając prostą εH do punktu ξ przecięcia się jej z prostopadłą do KK_1 w punkcie K_1 otrzymamy, że odcinek $\xi K_1 = \sigma_2$ jest równy naprężeniu w punkcie K_1 , czyli najmniejszemu naprężeniu w stosudze. Naprężenie σ_2 może być ściskające, może być $= 0$, lub może być rozciągające. Prosta $\varepsilon \xi$ przedstawia rozkład naprężeń w całym przekroju stosugi.

Że tak jest zauważymy, rozpatrując dwa podobne trójkąty /rys. 145/ QHC i QDO , mianowicie:

$$\overline{HC} : \overline{DO} = \overline{CQ} : \overline{OQ} \quad \text{stąd} \quad \overline{DO} = \frac{\overline{HC} \cdot \overline{OQ}}{\overline{CQ}}$$

ponieważ $\frac{\overline{HC}}{100b} = \frac{R_n}{100b}$, $\overline{CQ} = \frac{b}{6}$, $\overline{OQ} = \overline{OC} + \overline{CQ} = e + \frac{b}{6}$,

zatem
$$\overline{DO} = \frac{R_n}{100b} \cdot \frac{e + \frac{b}{6}}{\frac{b}{6}} = \frac{R_n}{100b} \left(1 + \frac{6e}{b}\right).$$

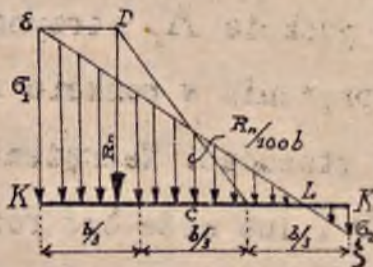
Porównując otrzymany wzór z wzorem /1/ poprzedniego paragr., znajdziemy, że \overline{DO} co do WARTOŚCI jest równe naprężeniu σ_1 . Ponieważ $\overline{DO} = \varepsilon \cdot \overline{K}$, stąd też wynika, że co do wartości $\varepsilon \overline{K} = \sigma_1$.

Również łatwo można pokazać, że odcinek $\xi \overline{K}_1 = \sigma_2$ ($\varepsilon \overline{K} - \xi \overline{K}_1$): $(\overline{HC} - \xi \overline{K}_1) = \overline{KK}_1$; $\overline{KC} = 2$; stąd $\xi \overline{K}_1 = 2 \overline{HC} \cdot \varepsilon \overline{K}$; podstawiając z poprzedniego wartości na \overline{HC} i $\varepsilon \overline{K}$, otrzyma-

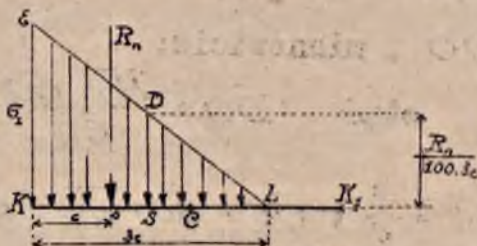
my:

$$\xi \overline{K}_1 = \frac{2R_n}{100b} - \frac{R_n}{100b} \left(1 + \frac{6e}{b}\right) = \frac{R_n}{100b} \left(1 - \frac{6e}{b}\right),$$

czyli odcinek $\xi \overline{K}_1$, co do wartości bezwzględnej równa się naprężeniu σ_2 , c.b.d.d.



RX. 146.



RX. 147.

157. Nieraz jest rzeczą konieczną pogodzić się z tem, że siła, działająca na stosugę, jest przyłożona w punkcie, leżącym poza rdzeniem. Jak należy postąpić w tym razie?

Wiemy z poprzedzającego, że w części LK_1 /rys. 146/ powstaną wtedy naprężenia rozciągające. To samo daje nam wykres: część prostej $\epsilon\delta$ znajduje się POD prostą KK_1 , czyli na części stosugi LK_1 powstaną naprężenia odmiennego znaku niż na części KL . Pod wpływem naprężeń rozciągających mur się może rozzejść, a wtedy owe naprężenia znikną i będzie tak, jakgdyby siła R_n działała na stosugę o innej - mniejszej szerokości.

Szerokość ta powinna być taką, aby siła R_n jako wypadkowa, przechodziła przez środek ciężkości pola trójkąta, który przedstawiać będzie rozkład naprężeń /tylko ściskających/ w stosudze.

Jeśli, zatem, siła R_n przecina stosugę w odległości c od bliższej krawędzi ściany, to wspomniany trójkąt powinien mieć za podstawę odosinek $= 3c$, czyli, że stosuga będzie ściskana na szerokości $= 3c$ /rys. 147/.

Jednocześnie wiemy, że pole powyższego trójkąta, obliczone w cm^2 i pomnożone przez $1 \text{ m.} = 100 \text{ cm}$

/długość badanej ściany/, powinno równać się sile R_n ,

t.j.
$$R_n = \frac{\epsilon K \cdot 3c \cdot 100}{2},$$

stąd

$$\overline{\varepsilon K} = \sigma_2 = \frac{2R_n}{3c \cdot 100} \dots \dots \dots /3/$$

W danym razie σ_2 nie powinno przekraczać bezpiecznego naprężenia dla danego materiału K_c .

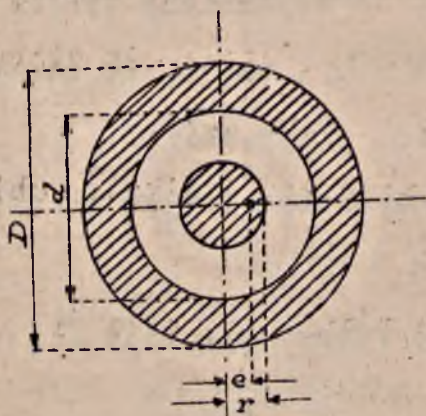
Jeżeli chodzi o wykreślne wyznaczenie σ_2 , postępujemy w ten sposób:

Obliczamy wartość $\frac{R_n}{100 \cdot 3c}$, odkładamy na prostopadłej do KK_2 , wystawionej w S - w połowie $3c$ - odcinek $SD = \frac{R_n}{100 \cdot 3c}$; przez L i D prowadzimy prostą, która na prostej $K\varepsilon$ odetnie długość, przedstawiającą największe naprężenie ściskające σ_2 .

158. OBLICZANIE KOMINA, o przekroju pierścieniowym prowadzi się tak samo, jak obliczenie ściany oporowej. Rolę parcia ziemi gra tu siła wiatru. Podobnie jak ścianę oporową dzielimy komin na poszczególne części, stykające się stosugami i wykreślamy linię środków ciśnień. Jeśli przytem zostaną spełnione trzy warunki, które mieliśmy dla

ściany oporowej, to komin będzie stateczny i wytrzymały.

Parcie wiatru należy obliczać, rozpatrując każdą część komina jako walec kołowy o średnicy d /w metr./, wysokości h /w metr./: $P = 0,67p d \cdot h$ gdzie p = ciśnieniu wiatru na



148.

jednostkę pola - kg/m^2 . Zwykle przyjmujemy $\rho = 150 \text{ kg/m}^2$.

Z rozważań analitycznych, których tu nie będziemy przytaczali^{x/}, wypada, że rdzeń przekroju pierścieniowego jest kołem, którego środek przypada na osi komina, a promień wynosi

$$r = \frac{D}{8} \left[1 + \left(\frac{d}{D} \right)^2 \right],$$

gdzie litery mają znaczenie zgodne z rys.148.

Dla największego naprężenia mamy zaś wzór:

$$\sigma_1 = \frac{R}{F} \left(1 + \frac{8De}{D^2 + d^2} \right),$$

przyczem F oznacza pole przekroju komina, a e odległość punktu przyłożenia siły wypadkowej, działającej na stosując od osi komina; σ_1 powinno być $\leq k_c$. Największe naprężenie σ_1 można też znaleźć drogą wykreślną: por. "Technik" tom I str.409.

ROZDZIAŁ IX.

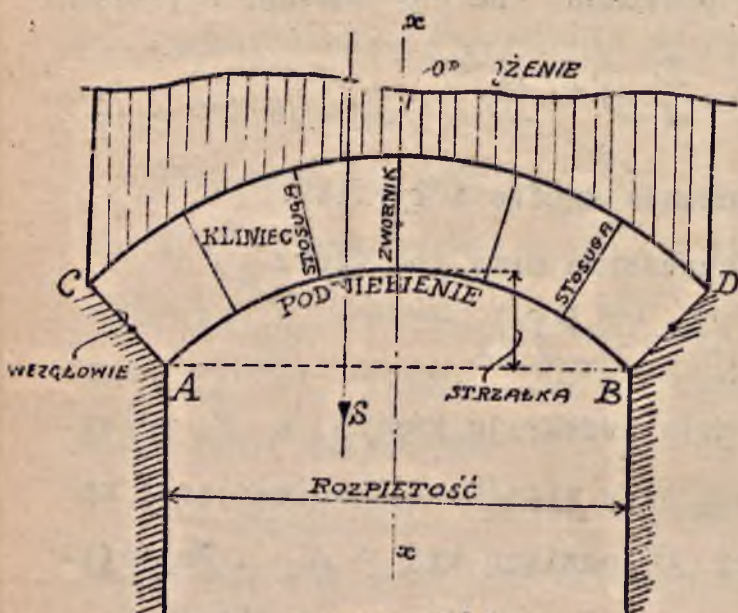
SKLEPIENIA.

159. OKREŚLENIA. PRZEDMIOT ROZDZIAŁU. SKLEPIENIEM

NAZYWAMY KONSTRUKCJĘ Z BLOKÓW, KAMIENI LUB CEGIEŁ, SŁUŻĄCĄ DO POKRYCIA DANEJ PRZESTRZENI, O PEWNEJ ROZPIĘTOŚCI I PODTRZYMUJĄCĄ ZAZWYCZAJ /OPRÓCZ CIĘŻARU WŁASNEGO/ OBCIĄ-

x/ Por. Teorię wytrż. materiałów.

ZENIE DODATKOWE W POSTACI MURU, NASYPU, CIĘŻARÓW STAŁYCH I RUCHOMYCH i t.d.



RYJ. 149.

Na rys. 149 widzimy typowe sklepienie "beczukowe". Kombinując kilka sklepień beczukowych otrzymamy sklepienie "krzyżowe", "klast-

torne" i t.p.

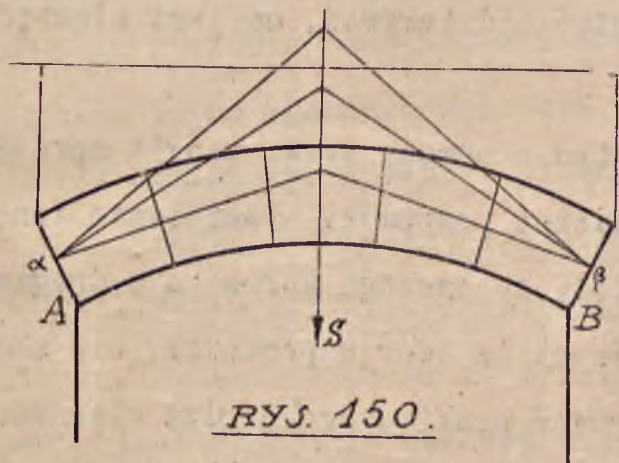
Poszczególne kamienie, tworzące sklepienie nazywamy KLINCAMI, powierzchnie ich zetknięcia STOSUGAMI; miejsce, w którym sklepienie opiera się o ścianę, nosi nazwę WEZGŁOWIA; najwyższy kliniec nazywamy ZWORNIKIEM; dolną powierzchnię sklepienia - PODNIEBIENIEM; pod ROZPIĘTOŚCIĄ sklepienia rozumiemy odległość poziomą, mierzoną w świetle między podporami sklepienia. Wreszcie STRZAŁKĄ zwiemy odległość najwyższego punktu sklepienia od prostej AB.

Sklepienia rozróżniamy symetryczne względem osi i nie-

symetryczne. Poza tem rozpatrywać będziemy sklepienia obciążone symetrycznie i niesymetrycznie. Naprz. na rys. 149 mamy sklepienie symetryczne, lecz niesymetrycznie obciążone. Na rys. 153 widzimy sklepienie SYMETRYCZNE, SYMETRYCZNIE OBCIĄŻONE oraz na rys. 151 SKLEPIENIE NIESYMETRYCZNE, NIESYMETRYCZNIE OBCIĄŻONE. W dalszym wykładzie rozpatrzemy każde z nich oddzielnie.

Mówiąc o DŁUGOŚCI SKLEPIENIA będziemy mieli na myśli wymiar jego w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rysunku. Długość tę przyjmujemy zwykle równą 1 metrowi.

160. ODDZIAŁYWANIA W WEZGŁOWIACH. Mur, o który opiera się sklepienie, będące w równowadze, wywiera nań oddzia-



ływanie. Jakiż jest kierunek i wartość oddziaływania? Aby odpowiedzieć na to pytanie weźmy pod uwagę sklepienie, przedstawione na rys. 150.

Przypuśćmy, że wypadkowa sił zewnętrznych, działających na to sklepienie, jest $= S$. Siła ta w przypadku równowagi sklepienia musi się zrównoważyć z oporami muru w

węzłowiach A i B , a więc te dwa oddziaływania i siła S powinny przecinać się w jednym punkcie. Punktem tym może być dowolny punkt, leżący na linii działania siły S , bo kierunki oddziaływań nie są niczem określone. I nie tylko kierunki! Nie wiemy nawet, gdzie znajdują się punkty przyłożenia α i β tych oddziaływań, bo, rzecz jasna, mogą być niemi dwa którekolwiek punkty węzłowia A i B .

Ta nieoznaczoność kierunków i punktów przyłożenia oddziaływań stoi na przeszkodzie do ścisłego rozwiązania naszego zagadnienia.

Brak nam danych po temu, aby z pośród nieskończenie wielu kierunków linii działania i punktów przyłożenia w węzłowiach wybrać te lub owe, a tem samem nie możemy z całą pewnością wyznaczyć oddziaływań, co jest niezbędne dla potrzeb życia.

Możnaby tu skorzystać z pomocy t.zw. teorii sprężystości, która rozważa podobne przypadki, lecz temat ten, z jednej strony nie należy do naszego kursu, a z drugiej strony wyniki, do których ta teoria prowadzi, nie mogą mieć szerszych zastosowań praktycznych, gdyż własności materiału, rozważanego w teorii, bardzo daleko odbiegają od tych, jakie spotykamy w materiale stosowanym do sklepień, jak kamień, cegła, beton /nie żelazobeton/.

Niżej zobaczymy, że można sobie z góry zadać w węzło-

wiach punkty α i β tak, aby oddziaływania musiały przez nie przejść, ale i to nie rozwiąże jeszcze sprawy, bo pozostaną nieznane kierunki oddziaływań. Zatem, kiedy mamy zamiar budować sklepienie należy iść drogą empiryczną, korzystając z wzorów i przykładów sklepień już zbudowanych, które okazały stateczność i wytrzymałość. Przytem wzorujemy się zwykle na dobrze poznanych sklepieniach, oddawna będących w służbie.

Pomimo, jednak, że do budowy sklepień przystępujemy, korzystając z wzorów starych, istnieje w nas żądza sprawdzenia dostępnymi nam środkami, czy i o ile projektowane sklepienie może być stateczne i wytrzymałe.

Badanie to, jak zobaczymy, polega na poznaniu możliwości wykreślenia wewnątrz sklepienia t.zw. linii ciśnień i następnie na wysnuciu wniosków, jakie wykreślona linja ciśnień dostarczy. Zresztą, bliższe szczegóły później.

161. WYKREŚLNE SPRAWDZANIE SKLEPIEŃ W OGÓLNYM PRZYPADKU. SKLEPIENIE NIESYMETRYCZNE, NIESYMETRYCZNIE OBCIĄŻONE.

Sklepienie takie widzimy na rys. 151. Przypuśćmy, że sklepienie jest obciążone warstwą ziemi $LA_0C_0B_0M_0$ i dajmy na to, że ciężar właściwy ziemi (q_1) jest mniejszy od ciężaru właściwego klinów (q_2). Sklepienie dzielimy płaszczyznami stosug na kliny: AA_1D_1 , $DD_1E_1E_1$ i t.d.

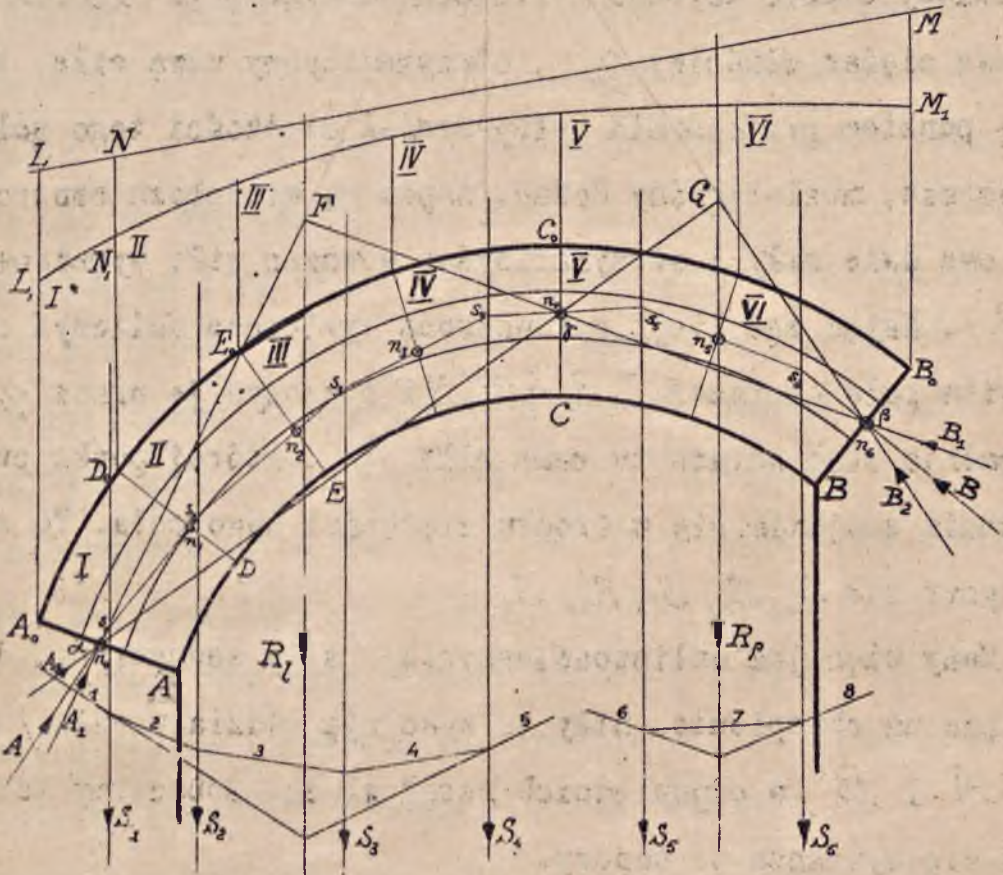
Aby uprościć sobie zadanie przystępujemy warstwą ziemi

$LA_0C_0B_0M$ inną, o ciężarze właściwym takim, jaki mają klince. Aby zachować przytem pierwotny ciężar, należy nadać zastępczej warstwie mniejszą wysokość. Oczywiście jest rzeczą, że wysokość ta jest równa wysokości pierwotnej, zmniejszonej w stosunku $\frac{q}{q_2}$. Zmniejszając w ten sposób wszystkie rzędne pola $LA_0C_0B_0M$ otrzymamy nową linię obciążeń, t.zw. sprowadzoną LINIĘ OBCIĄŻEŃ L_1M_1 .

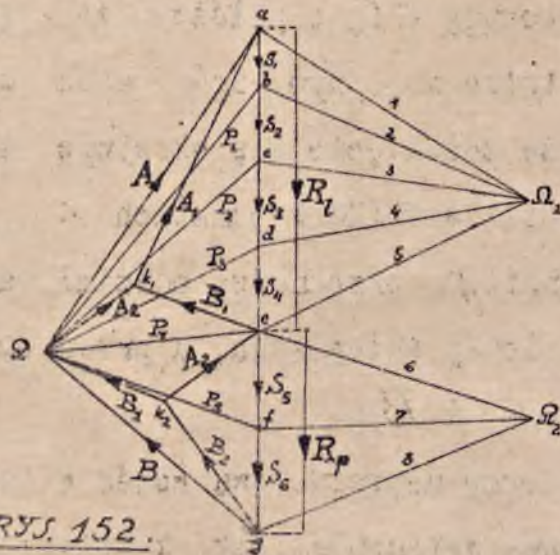
Obecnie będziemy postępować tak, jak gdyby sklepienie było obciążone bryłą ziemi $L_1A_0C_0B_0M_1$. Na każdy kliniec przypada część tej bryły, zawarta pomiędzy dwiema płaszczyznami pionowymi, poprowadzonymi przez górne krawędzie odpowiednich klinców. Tak więc np. kliniec I jest obciążony warstwą ziemi $A_0L_1N_1D_0$, której ciężar, dodany do ciężaru klinca, daje wypadkową S_1 - jedną z sił, działających na sklepienie. Podobnie postępujemy z klincami II, III i t.d., przyczem otrzymamy wypadkowe S_2, S_3, \dots, S_6 .

Zanim pójdziemy dalej, wyjaśnimy w paru słowach, na czem polega udogodnienie, które nam daje sprowadzona linja obciążeń:

Gdybyśmy jej nie mieli, wówczas, aby wyznaczyć siłę S_1 , trzeba by obliczyć pole $A_0L_1N_1D_0$, pomnożyć je przez ciężar właściwy ziemi q /długość bryły - w kierunku prostopadłym do rysunku - jest równa 1 m./ i otrzymaną siłę przyłożyć w środku ciężkości tego pola. Następnie na-



RYS. 151.



RYS. 152.

leżałoby zrobić to samo z klinцем, mnożąc pole $A_0 D_0 DA$ przez ciężar właściwy ϱ_2 ; otrzymalibyśmy nową siłę, której punktem przyłożenia byłby środek ciężkości tego pola; wreszcie, musielibyśmy dodać, za pomocą wieloboku sznurowego owe dwie siły i otrzymalibyśmy wówczas siłę wypadkową

S_1 . Mając zaś linię sprowadzoną wystarczy obliczyć całkowite pole obciążeń $L_1 A_0 ADD_0 N_2$ i pomnożyć je przez ϱ_2 . Wypadnie stąd odrazu ta sama siła S_1 , której punkt przyłożenia znajdzie się w środku ciężkości tego pola. To samo dotyczy sił S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 .

Mamy więc już obliczone wszystkie siły zewnętrzne, działające na sklepienie. Siły te wywołują oddziaływania /odpory/ A i B w odpowiednich węzłach. Zobaczymy teraz, jak się wyznacza te odpory.

Przypuśćmy, że podzieliliśmy zadane sklepienie na dwie części stosując CC_0 ; założmy, że części te stykają się ze sobą tylko w jednym, wspólnym punkcie /w stosunku CC_0 / i że zetknięcie się skrajnych klinów w węzłach zachodzi także TYLKO w punktach α i β . Oczywiście, przez punkt γ przechodzą oddziaływania wzajemne części prawej i lewej sklepienia, a przez punkty α i β - odpory węzłowi A i B .

Rozpatrzmy naprzód lewą część sklepienia, uważając część prawą wyłącznie, jak konstrukcję geometryczną.

NIĘWAŻKĄ, lecz mogącą wywierać odpór (B_2) na pozostałą część sklepienia. Odpór ten przechodzi, oczywiście, przez punkty β i γ i musi się przeciąć z odporem A_2 w węzłowie A na wypadkowej R_1 sił S_1, S_2, S_3, S_4 , działających na lewą część sklepienia. Wyznaczymy więc za pomocą wieloboku sił i wieloboku sznurowego /rys.151 i 152/ ową wypadkową; połączmy z punktem α punkt przecięcia się wypadkowej R_1 z prostą $\beta\gamma$, otrzymamy linię działania odporu A_2 . Wartość i lot jego znajdziemy z wieloboku sił /rys.152/, w którym $\overline{ae} = R_1, \overline{ek} = B_2, \overline{ka} = A_2$.

Zupełnie tak samo rozpatrzmy część lewą sklepienia, jako nieważką i wywierającą jedynie odpór (A_2) na część pozostałą. Odpór ten przejdzie przez punkty α i γ i przecięnie się z odporem B_2 w węzłowie B w punkcie Q wypadkowej R_p sił S_5 i S_6 ; należy więc wyznaczyć wypadkową R_p , za pomocą wieloboku sznurowego i wieloboku sił /rys.151 i 152/. Prosta βQ jest linią działania odporu B_2 . Wartość i lot jego wyznaczamy z nowego wieloboku sił /rys.152/, gdzie $\overline{eg} = R_p, \overline{gk} = B_2, \overline{ke} = A_2$.

Ostatecznie znaleźliśmy cztery oddziaływania A_1, A_2, B_1, B_2 ; z nich A_1 i B_1 wywierają nacisk, gdy prawa część sklepienia jest nieważką i obciążona, a A_2 i B_2 - gdy nieważką bez obciążenia jest część lewa. W rzeczywistości, obydwie części sklepienia są obciążone, a więc w istocie działają jednocześnie wszystkie cztery siły

A_1, A_2, B_1, B_2 , przy czym A_1 i A_2 wywierają wezglowie A , a B_1 i B_2 - wezglowie B . Aby więc wyznaczyć całkowite odpory wezglowi trzeba odpowiednie siły dodać. Wykonujemy to za pomocą wieloboku sił na rys. 152, prowadząc przez punkt K_1 równoległą do $\overline{eK_2} = A_2$, a przez K_2 , równoległą do $\overline{eK_1} = B_1$. W przecięciu tych dwóch równoległych otrzymamy punkt Ω ; oczywiście, odcinki $\overline{\Omega a}$ i $\overline{g\Omega}$ są odpowiednio równe szukanym odporom całkowitym wezglowi A i B . Ich linje działania przechodzą przez punkty α i β wezglowi A i B .

Kiedy wyznaczyliśmy oddziaływania wezglowi, przechodzimy do rozpatrzenia równowagi poszczególnych klinców, przy czym postępujemy w podobny sposób, jak przy ścianach oporowych /par. 154/.

Bierzemy więc naprzód pod uwagę kliniec I. Działają nań siły A i S_1 i oddziaływanie klinca II P_1 . Wartość i kierunek siły P_1 wyznaczamy z warunków równowagi, z trójkąta sił Ωab /rys. 152/, w którym boki Ωa i ab są znane, równe, mianowicie, siłom A i S_1 , trzeci bok $b\Omega$ /zamykający/ daje oddziaływanie klinca II na I, t.j. siłę P_1 . Linja działania siły P_1 przechodzi przez punkt s_1 przecięcia się siły A z S_1 i jest równoległa do $b\Omega$. Linja działania P_1 przecina stozogę DD_0 w punkcie $e n_1$, który, podobnie, jak dla ściany oporowej, nazywamy ŚRODKIEM

CISNIEN w tej stosudze. Dalej rozważamy kliniec II. Dzia-
ła nań siła S_2 , o której była mowa poprzednio oraz od-
działywania klinców I i III. Pierwsze z nich jest już znane:
co do wartości i linii działania jest równe P_1 , lecz lot
ma odwrotny, równe jest, mianowicie, odcinkowi \overline{Rb} w wie-
loboku sił /rys. 152/. Siła S_2 wyznaczona jest odcinkiem
 $\overline{bc} = S_2$; oddziaływanie zaś klinca III na II wyznaczymy,
jako odcinek $\overline{cR} = P_2$, budując trójkąt \overline{Rbc} . Linja dzia-
łania siły P_2 przechodzi przez punkt S_2 przecięcia się
sił S_2 i P_1 i jest równoległa do odcinka \overline{cR} . Siła ta
przecina stosugę, odgraniczającą kliniec II od III w punk-
cie n_2 , który jest nowym środkiem ciśnień.

Tak samo postępujemy z klincami III, IV, V i VI, otrzy-
mamy przytem nowe środki ciśnień n_3 , n_4 , n_5 i n_6 . Jeśli
budowa jest wykonana prawidłowo, to środki ciśnień n_4 i n_6
powinny upaść na punkty β i γ .

Połączmy ze sobą kolejne środki ciśnień linią ciągłą,
otrzymamy wówczas LINJĘ CISNIEN rozważanego sklepienia.
Linja ta odgrywa tu podobną rolę, jaką posiada przy badaniu
ścian oporowych linja środków ciśnień.

A zatem:

1/ Stateczność sklepienia wymaga, aby linja ciśnień
przecinała stosugi pod kątami nie większemi od kąta tarcia
klinca o kliniec.

2/ Należy nadać sklepieniu takie wymiary, żeby większe naprężenie w stosudze, wywołane przez składki normalną /do płaszczyzny stosugi/ oddziaływania wzajemnego przyległych klinców, nie przekraczało dozwolonych granic.

3/ Aby naprężenia w stosudze były wyłącznie ściskające, należy dążyć do tego, iżby linja ciśnień przebiegała wewnątrz rdzenia sklepienia, t.j. wewnątrz środkowej trzeciej części sklepienia /dla stosugi o przekroju prostokątnym/.

W przykładzie, przedstawionym na rys.151, ostatni warunek dla części sklepienia między II i III klincem nie jest spełniony.

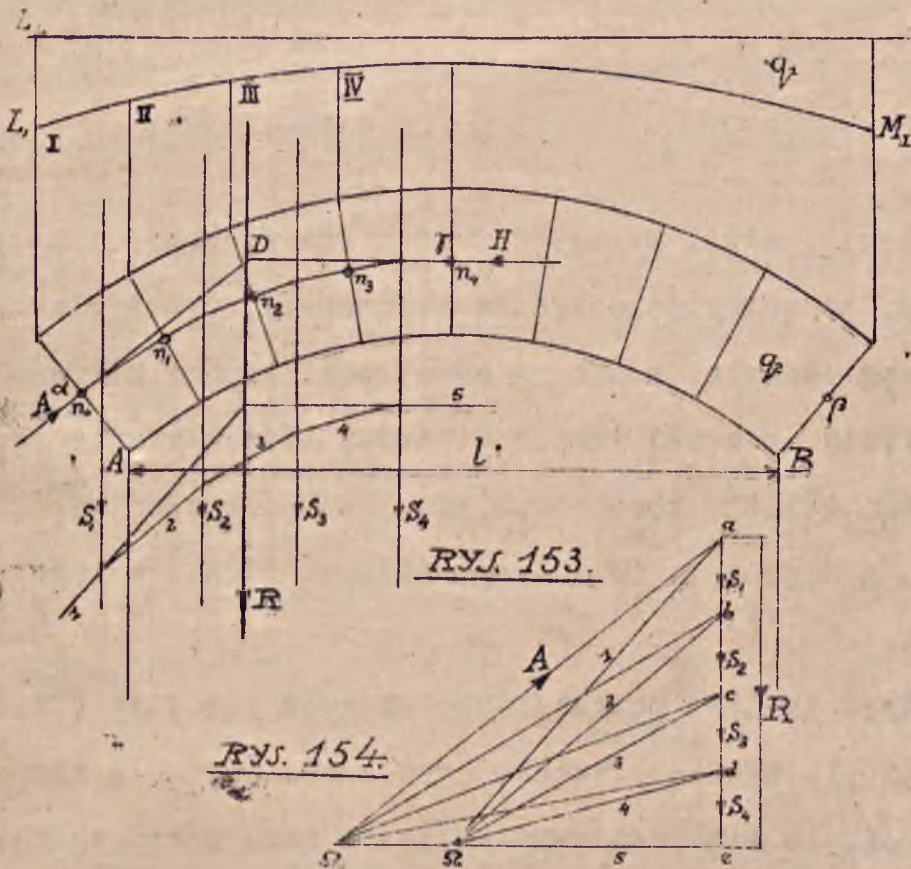
162. SKLEPIENIE SYMETRYCZNE, SYMETRYCZNIE OBCIĄŻONE.

/rys.153 i 154/. W tym przypadku sposób postępowania jest prostszy niż poprzednio, ze względu na symetrię zarówno sklepienia, jak i obciążenia.

Wystarczy wobec tego rozpatrzyć tylko jedną połowę sklepienia, np. lewą. Działają na nią następujące siły: siły S_1, S_2, S_3, S_4 /pochodzące od ciężaru własnego klinców I, II, III, IV oraz obciążenia zewnętrznego/, odpór węzłowa A i oddziaływanie H prawej połowy sklepienia. Zakładamy, że siła H przechodzi przez punkt J . Siła H , którą nazywamy też rozporem, musi być pozioma,

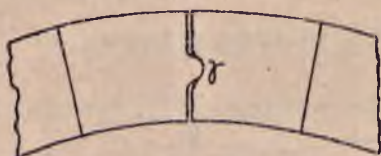
gdyż tego wymaga symetria^{x/}. Siły S_1, S_2, S_3, S_4 zastępujemy wypadkową R , otrzymaną przy pomocy wieloboku sznurowego i wieloboku sił z biegunem Ω . Łącząc punkt D , w którym przecina się rozpór H z wypadkową R , z obranym z góry punktem α , otrzymamy linię działania odporu A . Wartość i lot jego znajdziemy z wieloboku sił $a\epsilon\Omega_1$ /rys. 154/, w którym $\bar{a}\epsilon = R$, $\bar{\epsilon}\Omega_1 = H$, a $\bar{\Omega}_1\alpha = A$. W ten sposób znaleźliśmy H i A .

W dalszym ciągu wykreślamy linię ciśnienia, postępując zupełnie tak samo, jak w poprzednim przykładzie.



x/ Zresztą wynika to także z przypadku ogólnego, który rozpatrywaliśmy poprzednio.

163. W JAKI SPOŚÓB MOZNA ZAPEWNIĆ SOBIE PUNKTY $\alpha, \beta,$
 γ ? Mówiliśmy parokrotnie w par. poprzedzających
o tem, że zadajemy sobie punkty α, β, γ . Wypada teraz
wskazać, jak to można zrobić praktycznie. Można nałożyć
na przylegające klince pochwy żelazne lub też wykuc
dotykające się płaszczyzny klinców tak, aby jedna pł-
szczyzna miała występ /rys.155/, a druga odpowiednie



RYS. 155.



RYS. 156.

wgłębienie. Jeśli występ będzie nieco większy od wgłę-
bienia, to zetknięcie będzie zachodziło, praktycznie,
w jednym punkcie, a nie na całej powierzchni klinca.
Oczywiście, z braku innych klinców, oddziaływanie są-
siednich klinców będzie musiało przejść przez ten
punkt, a więc cel, do którego dążymy, będzie osiągnię-
ty.

Nieraz zamiast poprzedniego sposobu pomiędzy klince
wstawia się płytkę ołowianą /rys.156/, a w celu za-
bezpieczenia się przed wypłynięciem ołowiu pod wpływem
znacznego ciśnienia, otacza się ją miedzianą koszulką.

164. PUNKTY α , β , γ NIE SĄ ZAPEWNIONE. ZAUFANIE DO LINIJ CIŚNIENI. W praktyce rzadko korzysta się z umyślnego zaznaczania punktów α , β i γ w sposób poprzednio podany, gdyż jest to połączone z trudnościami technicznymi. Jeśli, bowiem, klince stykają się całą powierzchnią, to oddziaływanie ich rozkłada się na duże pole i ciśnienie na jednostkę pola nie jest znaczne. To samo zachodzi nawet wtedy, gdy zetknięcie jest tylko częściowe. Inaczej zaś jest w tym razie, gdy zastosujemy jeden z wymienionych w par. poprzedzającym sposobów. Zetknięcie będzie się odbywać tylko w jednym punkcie^{x/}, a więc ciśnienie, przypadające na jednostkę pola, może być bardzo duże; może ono przekraczać naprężenia bezpieczne dla danego materiału.

Gdy punktów α , β i γ konstrukcyjnie nie zaznaczamy, wówczas, jak wiemy, nie można z góry przewidzieć, przez które punkty przejdą oddziaływania wezglowi i wobec tego nieznana jest linia ciśnień.

W tym razie wykreślamy szereg linii ciśnień, odpowiadających różnym punktom α , β , γ , wziętym dowolnie jako punkty, przez które przechodzić ma linia ciśnień.

JĘŚLI CHOĆ JEDNA Z TYCH LINIJ CIŚNIENI ODPOWIADA WARUNKOM PRZYTOCZONYM W PAR. 161, PRZYJMUJEMY, ŻE MOŻEMY MIEĆ

^{x/} Pod "punktem" trzeba tu rozumieć w rzeczywistości małe pole.

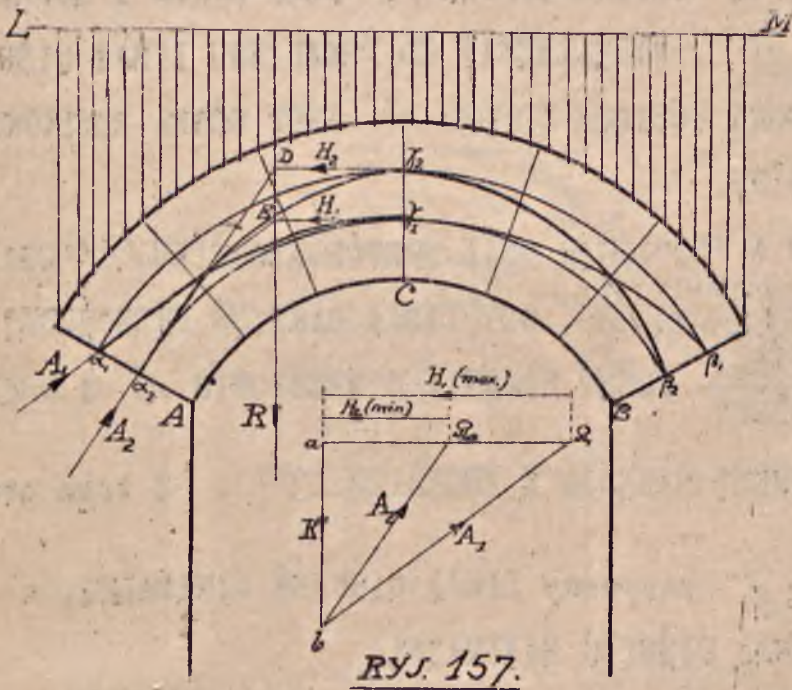
NADZIEJĘ, IŻ SKLEPIENIE BĘDZIE STATECZNE I WYTRZYMAŁE I IM WIĘCEJ JEST TAKICH LINIJ, TEM NADZIEJĘ NASZĄ UWAŻAMY ZA BARDZIEJ UGRUNTOWANĄ.

Jest to, oczywiście, przypuszczenie, nie oparte na ścisłym rozumowaniu, lecz poparte wielokrotnym doświadczeniem.

165. LINJE CIŚNIENI: MINIMALNA I MAKIMALNA. Jeśli będziemy badali sklepienie sposobem, wyłożonym w par. poprzedzającym, to może się zdarzyć, iż uda się nam poprowadzić cały szereg linii ciśnień wewnątrz rdzenia. Która z tych linii jest jednak najbardziej miarodajna do obliczania wymiarów sklepienia, albo, innymi słowy, która z nich daje najbezpieczniejsze i najpewniejsze wymiary sklepień? Postarajmy się na to pytanie odpowiedzieć.

W tym celu rozpatrzmy sklepienie symetryczne, symetrycznie obciążone /rys. 157/. Przypuśćmy, że R jest wypadkową ciężaru własnego i obciążenia zewnętrznego, które przypadają na lewą połowę sklepienia. Wypadkowa ta pozostaje w równowadze z odporem A w wezłowie A i z rozporem H w zworniku C . Zatem te trzy siły muszą się przeciąć w jednym punkcie. Założmy naprzód, że odpór wezłowie przechodzi przez punkt α_2 dolny skrajny punkt rdzenia przy wezłowie, a rozpór H w zworniku przez β_2 - górny skrajny punkt rdzenia. Te dane wystarczają już do wyznaczenia

owych oddziaływań. Trzeba tylko przez punkt J_2 poprowadzić prostą poziomą, aż do punktu D przecięcia się H_2 z siłą R i połączyć punkt D z punktem α_2 ; proste J_2D i α_2D dadzą nam linje działania szukanych sił. Ich wartości i loty wyznaczamy z trójkąta sił $\alpha_2b\Omega_2$, z którym $\overline{\alpha b} = R$, $\overline{b\Omega_2} = A_2$ a $\overline{\Omega_2\alpha} = H_2$.



Przypuśćmy teraz, że punkt J obieramy w stosudze zwornikowej coraz niżej zaś punkt α w stosudze wezgłowa A - coraz wyżej. Wtedy z wieloboku sił zobaczymy, że zarówno siła A , jak i siła H - będą wzrastały. Największą wartość osiągną one wtedy, gdy linja ciś-

nien przejdzie przez punkty α_2 i β_2 . Wówczas oddziaływania wyniosą $\overline{\Omega_2 \alpha} = H_2$ i $\overline{b\Omega_2} = A_2$.

Większych oddziaływań nie otrzymamy przy żadnym innym układzie linii ciśnień.

Z rozważań poprzedzających, oraz z rys. 157 wynika kilka wniosków:

1/ SKŁADOWA PIONOWA ODPORU A JEST STAŁA I RÓWNA WYPADKOWEJ R , NIEZALEŻNIE OD PRZEBIEGU LINJI CIŚNIEŃ.

2/ SKŁADOWA POZIOMA ODPORU A JEST RÓWNA ROZPOROWI H W ZWORNIKU.

3/ ODPÓR W WEZŁOWIU ORAZ ROZPÓR W ZWORNIKU (H) OSIĄGAJĄ WARTOŚCI $\frac{\text{NAJMNIEJSZE}}{\text{NAJWIĘKSZE}}$, GDY LINJA CIŚNIEŃ PRZECHODZI PRZEZ $\frac{\text{NAJNIŻSZY}}{\text{NAJWYŻSZY}}$ PUNKT RDZENIA W WEZŁOWIU A I PRZEZ $\frac{\text{NAJWYŻSZY}}{\text{NAJNIŻSZY}}$ PUNKT RDZENIA W ZWORNIKU C . Z tego powo-

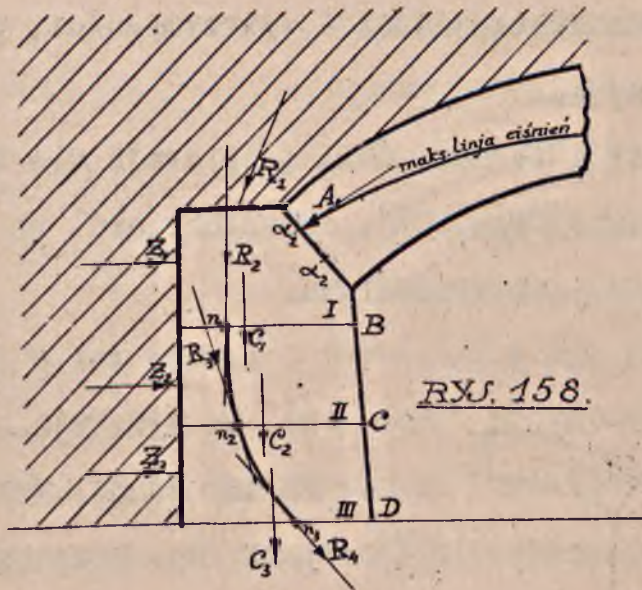
du linję $\alpha_2 \beta_2$ nazywamy LINJĄ CIŚNIEŃ MINIMALNĄ, a $\alpha_1 \beta_1$ - LINJĄ CIŚNIEŃ MAXIMALNĄ.

Ponieważ nie mamy pewności, w jaki sposób przebiegać będzie w sklepieniu linja ciśnień, należy założyć, że jest nią linja maximalna, gdyż ta daje największe wartości sił, działających między poszczególnymi klinami. Otrzymane siły powinny być podstawą do obliczenia wymiarów bezpiecznych sklepienia.

Poza tem należy wykreślić linję ciśnień minimalną,

aby upewnić się co do granic, w których linje ciśnien mogą być w sklepieniu zmieniane.

166. PODPORY SKLEPIEN muszą tak samo, jak sklepienia, czynić zadość warunkom stateczności i wytrzymałości. Podpory te obliczamy na zasadzie teorii ścian oporowych.



Dzielimy więc ścianę na kilka bloków i rozpatrujemy równowagę każdego z nich oddzielnie. Na blok I /rys.158/ działa sklepienie z siłą (A_1), ciężar własny (C_2), napór ziemi z góry (R_1) i napór ziemi z oku (Z_1). Te cztery siły dają wypadkową R_2 , z którą blok I działa na blok II. Prócz siły R_2 działa na blok II jeszcze ciężar własny C_2 i parcie ziemi Z_2 . Wypadkowa R_3

sił R_2, C_2, Z_2 jest równa oddziaływaniu bloku II na III.

Podobnie postępujemy wreszcie z blokiem III: działają nań siły R_3, C_3, Z_3 ; ich wypadkowa jest równa R_2 .

Kolejne wypadkowe R_2, R_3, R_4 przecinają stosugi B, C, D w punktach n_1, n_2, n_3 , które są środkami ciśnień w tych stosugach. Linja ciśnień, łącząca te środki musi czynić za-
dość warunkom stateczności i wytrzymałości, podanym dla ścian oporowych.

167. Jeśli o tę samą ścianę opierają się dwa sklepienia symetryczne /rys. 159/, zdawałoby się, że stateczność takiej ściany jest zapewniona.



Rys. 159.

Byłoby tak w istocie, gdyby owa symetria nigdy nie była naruszona. Tak jednak nie jest, np. przy budowie, kiedy to może się zdarzyć, że na-
przód zostanie wykonane jedno sklepienie, a potem drugie. Może też zajść wypadek taki, że jedno ze sklepień się za-

wali, a wtedy ściana będzie pozostawała wyłącznie pod naporem drugiego sklepienia.

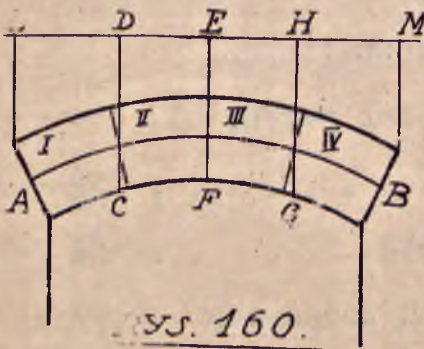
Aby zapobiedz w tym razie zawaleniu się i drugiego sklepienia należy obliczać ścianę w ten sposób, jakgdyby

miało być wykonane tylko jedno sklepienie i jakgdyby z drugiej strony ściana nie miała żadnego oparcia.

168. INNY ROZKŁAD OBCIĄŻENIA. W par. 161 mówiliśmy, że obciążenie zewnętrzne sklepienia należy dzielić płaszczyznami pionowymi, przechodzącymi przez górne krawędzie klinców. Nieraz jednak postępuje się inaczej, mając na

wzglądzie ułatwienie przy wyznaczaniu pola obciążeń i środków ciężkości.

Prowadzimy mianowicie w sklepieniu linię środkową AB i owe płaszczyzny pionowe prowadzimy przez

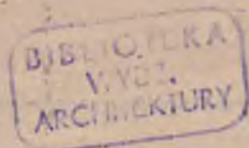


punkty przecięcia się jej ze stosugami /rys. 160/. Jeśli przypuścimy, że prosta LM oznacza linię sprowadzoną, to obciążenie /łącznie z ciężarem klinca/, które przypada np. na blok II , będzie wtedy równe iloczynowi z pola $CDEF$ przez ciężar właściwy kamienia i będzie przyłożone w środku ciężkości tego pola. Podobnie rzecz się ma dla innych klinców.

Sposób ten jest tem ściślejszy, im mniejsza jest krzywizna sklepienia.

SPIS ROZDZIAŁÓW.

	Str.
Rozdział wstępny	3
Rozdział I. Składanie i rozkładanie sił do jednego punktu przyłożonych	11
Rozdział II. Składanie i rozkładanie sił przy- łożonych do różnych punktów i dzia- łających w jednej płaszczyźnie. Wieloboki Varignona, ich własności. Warunki równowagi	22
Rozdział III. Momenty statyczne sił	51
Rozdział IV. Belka prosta na dwóch podporach	77
Rozdział V. Środek sił i środek ciężkości	105
Rozdział VI. Moment bezwładności	125
Rozdział VII. Kratownice	137
Rozdział VIII. Ściany oporowe	198
Rozdział IX. Sklepienia.	247



6801