

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

**Wydział Elektroniki
i Technik Informatycznych**

ROZPRAWA DOKTORSKA

mgr inż. Adam Rudziński

Proces emisji spontanicznej w kryształach fonicznych

Promotor
prof. dr hab. inż. Paweł Szczepański

Warszawa, 2010

Streszczenie

Tematem niniejszej rozprawy jest modelowanie procesu emisji spontanicznej zachodzącego w ośrodku o strukturze kryształu fotonicznego. Z uwagi na możliwość opisu analitycznego struktury, w pracy ograniczono się do badania jednowymiarowego kryształu fotonicznego, co jednak pozwala opisać najistotniejsze cechy zjawiska w sposób w pełni ścisły. Dzięki temu można sformułować ogólne wnioski, podając jednocześnie założenia i ograniczenia, którym one podlegają. Jednowymiarowe kryształy fotoniczne charakteryzują się takimi samymi cechami, jak bardziej złożone dwu- lub trójwymiarowe, dlatego przedstawiona analiza i płynące z niej wnioski mają zastosowanie także dla nich.

W rozprawie przedstawiono analityczny model pola elektromagnetycznego w strukturze jednowymiarowego kryształu fotonicznego – oparty na metodzie macierzy przejścia tzw. model efektywnego rezonatora, utworzony według pomysłu autora rozprawy. Podano interpretację fizyczną parametru struktury zdefiniowanego w tym modelu, tzw. widma modowego, które pozwala na łatwą i przejrzystą analizę struktury modowej i bezpośrednio przekłada się na szybkość emisji spontanicznej. Wskazano sposób konstrukcji ortonormalnej bazy modów struktury oraz pokazano liczne właściwości matematyczne modelu. W oparciu o model efektywnego rezonatora wyprowadzono wyrażenie na szybkość emisji spontanicznej dla jednego i wielu atomów. W ten sposób otrzymany został opis charakteryzujący za pomocą widma modowego wpływ warstw jednowymiarowego kryształu fotonicznego na emisję spontaniczną. Jest to opis bardzo wygodny z punktu widzenia projektanta struktur tego typu i stanowi oryginalny wkład autora rozprawy.

Z przeprowadzonych obliczeń wyciągnięte zostały wnioski dotyczące wpływu parametrów i defektów struktury na emisję spontaniczną, w szczególności pokazano, że emisja do modu defektowego słabnie wraz z oddalaniem się od zdefektowanej warstwy. Otrzymane wyniki dla przypadku wielu atomów w różnych warstwach struktury uczyniły zasadnym także postawienie hipotezy, iż kolektywna emisja fotonu przez parę atomów, z których jeden znajduje się w otoczeniu silnie hamującym emisję spontaniczną, może stanowić dla tego atomu dominujący mechanizm emisji.

Abstract

The subject of this thesis is modelling of the process of spontaneous emission occurring in a photonic crystal medium. To retain the possibility of analytic description of the structure, the investigation has been limited to one-dimensional photonic crystal, what allows to describe the phenomenon rigorously in every aspect. Therefore, general conclusions can be formulated, along with assumptions and restrictions they are amenable to. Because one-dimensional photonic crystal possesses the same features, as more complicated two- and three-dimensional structures, presented analysis and conclusions are applicable to these structures as well.

In the thesis, there is presented an analytic model of electromagnetic field in the structure of one-dimensional photonic crystal – based on translation matrix method so-called effective resonator model, proposed and constructed by the author of the thesis. There has been given a physical interpretation of a parameter defined within the model, so-called mode spectrum, which allows an easy and clear analysis of modal structure and is directly related to spontaneous emission rate. Construction of basis of orthonormal modes has been shown and numerous mathematical properties of the model demonstrated. An expression based on the effective resonator model describing spontaneous emission rate has been derived for a single atom and for multiatomic case. This way, a description characterizing impact of one-dimensional photonic crystal on the spontaneous emission rate with the help of mode spectrum has been obtained. It has been shown to be a convenient tool for design of multilayer structures and it constitutes an original contribution of the thesis' author.

Conducted calculations allowed to draw conclusions concerning impact of parameters and defects of structure on spontaneous emission, in particular it has been shown, that spontaneous emission into a defect mode becomes weaker with growing distance to the defected layer. On the base of results obtained for many atoms in different layers, a hypothesis was formed, stating, that collective emission by a pair of atoms, one of which is placed in environment strongly inhibiting spontaneous emission, may be a dominant emission channel.

Spis treści

Wykaz najważniejszych oznaczeń	6
1. Wstęp	8
1.1. Zjawisko emisji spontanicznej	8
1.2. Modele pola elektromagnetycznego w jednowymiarowych kryształach fotonicznych	11
1.3. Cel i tezy rozprawy	14
1.4. Układ pracy	15
2. Jednowymiarowy kryształ fotoniczny	17
2.1. Definicja struktury	17
2.2. Bezwymiarowe parametry struktury jednowymiarowego kryształu fotonicznego	18
3. Formalizm macierzy przejścia	20
3.1. Równania i warunki ciągłości pola elektromagnetycznego	20
3.1.1. Rozwiązania w jednorodnie wypełnionej przestrzeni	21
3.1.2. Warunki ciągłości pola elektromagnetycznego na granicy ośrodków	22
3.2. Pole elektromagnetyczne w wielowarstwowym planarnym falowodzie dielektrycznym	23
3.2.1. Warstwy o zerowej szerokości	26
3.2.2. Grupa macierzy przejścia	26
3.2.3. Przepływ energii pola elektromagnetycznego	27
3.3. Odbicie fali płaskiej od struktury warstwowej	28
3.3.1. Jednorodne fale płaskie	28
3.3.2. Niejednorodne fale płaskie	28
3.3.3. Transformacja odbicia wektora falowego	29
3.3.4. Związki pomiędzy współczynnikami odbicia w różnych warstwach	30
4. Model efektywnego rezonatora	32
4.1. Pole elektromagnetyczne we wnęce rezonansowej	32
4.1.1. Normalizacja widma modowego	35
4.1.2. Widmo modowe a własności kryształu fotonicznego	35
4.2. Mody pola elektromagnetycznego w modelu efektywnego rezonatora	41
4.3. Klasyfikacja i właściwości modów	42
4.3.1. Mody promieniowania	43
4.3.2. Mody podłożowe	43
4.3.3. Mody prowadzone	43

4.4.	Ortonormalizacja modów wybranej warstwy	44
4.4.1.	Mody promieniowania	46
4.4.2.	Mody podłożowe	49
4.4.3.	Mody prowadzone	50
4.5.	Związki między modami różnych warstw	50
4.5.1.	Mody prowadzone	51
4.5.2.	Mody podłożowe	52
4.5.3.	Mody promieniowania	53
4.6.	Równoważność modów różnych warstw	54
4.7.	Związek modelu efektywnego rezonatora z modelem Carnigli-Mandela	57
5.	Teoria emisji spontanicznej	59
5.1.	Hamiltonian swobodnego pola elektromagnetycznego i układu atomowego	59
5.2.	Oddziaływanie pola elektromagnetycznego z układem atomowym	61
5.3.	Szybkość emisji spontanicznej z pojedynczego atomu	64
5.4.	Emisja spontaniczna w jednowymiarowym kryształcie fonicznym	66
5.4.1.	Mody promieniowania	67
5.4.2.	Mody podłożowe	68
5.4.3.	Mody prowadzone	69
5.5.	Przykładowe wyniki obliczeń	70
5.6.	Porównanie z opisem opartym na gęstości stanów	76
6.	Emisja spontaniczna z układu wieloatomowego	78
6.1.	Hamiltonian układu wieloatomowego w jednej warstwie	78
6.2.	Emisja spontaniczna z układu atomów w jednej warstwie	79
6.2.1.	Wyraz wiodący stałej rozpadu	81
6.3.	Emisja spontaniczna z układu atomów w różnych warstwach	85
7.	Podsumowanie	91
	Bibliografia	93
	Lista publikacji autora rozprawy	99

Wykaz najważniejszych oznaczeń

Stałe fizyczne

c	$= 299792458 \text{ m/s}$	prędkość światła w próżni
μ_0	$= 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$	przenikalność magnetyczna próżni
ϵ_0	$= (\mu_0 c^2)^{-1} \approx 8,854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$	przenikalność elektryczna próżni
\hbar	$= 1,054571628(53) \times 10^{-34} \text{ Js}$	zredukowana stała Plancka
m	$= 9,10938215(45) \times 10^{-31} \text{ kg}$	masa elektronu
e	$= -1,602176487(40) \times 10^{-19} \text{ C}$	ładunek elektryczny elektronu

Oznaczenia matematyczne

\mathbb{R}	zbiór liczb rzeczywistych
$i\mathbb{R}$	zbiór liczb urojonych (tj. liczb zespolonych o zerowej części rzeczywistej)
a^*	sprzężenie zespolone (liczby lub macierzy) a
A^\dagger	sprzężenie hermitowskie operatora A
\mathbf{A}	wektor (oznaczenie pogrubionym symbolem)
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	wersory kierunkowe osi kartezjańskiego układu współrzędnych
\mathbf{A}_*	wektor o zmienionym znaku składowej z , tj. $\mathbf{A}_* = (A_x, A_y, -A_z)$

Oznaczenia w modelu efektywnego rezonatora

j	indeks warstwy struktury
$n_{(j)}$	współczynnik załamania j -tej warstwy
$L_z^{(j)}$	szerokość j -tej warstwy
$\Lambda^{(j)}$	szerokość optyczna j -tej warstwy
n_1, n_2	współczynniki załamania warstw w komórce elementarnej
L_1, L_2	szerokości warstw w komórce elementarnej
Λ_1, Λ_2	szerokości warstw w komórce elementarnej
$n_{(L)}, n_{(R)}$	współczynniki załamania obszarów na zewnątrz struktury
$\chi_j(z)$	funkcja charakterystyczna j -tej warstwy
\mathbf{k}, \mathbf{q}	wektor falowy w warstwie $j = 0$
$\mathbf{k}^{(j)}, \mathbf{q}^{(j)}$	wektor falowy w j -tej warstwie
ϵ	polaryzacja
ω_k	pulsacja modu o wektorze falowym \mathbf{k}
ϑ	kąt padania
η	kosinus kąta padania

Oznaczenia w modelu efektywnego rezonatora (c.d)

$m_{j,i}$	macierz warunków ciągłości pomiędzy warstwami i -tą i j -tą
$w_{i,j}$	macierz odwrotna do $m_{j,i}$
$e_{k\epsilon}, e_{k\epsilon}^H$	wersory polaryzacji pól elektrycznego i magnetycznego
$\rho_\epsilon(\mathbf{k})$	widmo modowe
$\xi_\epsilon(\mathbf{k})$	współczynnik sprzężenia
$\psi_{k\epsilon}, \psi_{k\epsilon}^H$	rozkłady pól: elektrycznego i magnetycznego
$f_{k\epsilon}$	rozkład pola elektrycznego modu z bazy ortonormalnej

Oznaczenia w teorii emisji spontanicznej

\hat{H}_{em}	hamiltonian swobodnego pola elektromagnetycznego (e-m)
\hat{H}_{at}	hamiltonian swobodnego atomu lub układu atomów
\hat{H}_{int}	hamiltonian oddziaływania układu atomowego z polem e-m
R	operator relaksacji
Ω_{10}	częstotliwość kołowa (pulsacja) przejścia atomowego
Θ_{10}	znormalizowana częstotliwość kołowa (pulsacja) przejścia atomowego
Γ	szybkość emisji spontanicznej
$\Gamma_{RM}, \Gamma_{SM}, \Gamma_{GM}$	szybkość emisji spontanicznej do modów promieniowania, podłożowych i prowadzonych
Γ^{fs}	szybkość emisji spontanicznej pojedynczego atomu w próżni

1. Wstęp

1.1. Zjawisko emisji spontanicznej

Jest od dawna znanym faktem, iż oddziaływanie układu atomowego z promieniowaniem elektromagnetycznym nie zależy jedynie od samego układu, ale ma na niego wpływ także otoczenie, w którym się on znajduje. Umieszczenie atomu bądź cząsteczki we wnęce rezonansowej prowadzi do pojawienia się wielu efektów nieobecnych w wolnej przestrzeni, które są przedmiotem badań w tzw. elektrodynamice kwantowej wnek rezonansowych (ang. *cavity quantum electrodynamics*) – dobrą pracą przeglądową z tej dziedziny jest np. [1] autorstwa Z. Białynickiej-Biruli. Między innymi, jednym z tych efektów jest modyfikacja szybkości relaksacji układu wzbudzonego, która w przypadku sprzężenia z promieniowaniem elektromagnetycznym przyjmuje postać emisji spontanicznej fotonu. Zjawisko to pociąga za sobą istotne konsekwencje praktyczne dla współczesnej nauki i techniki, jest zatem ważnym przedmiotem prac badawczych.

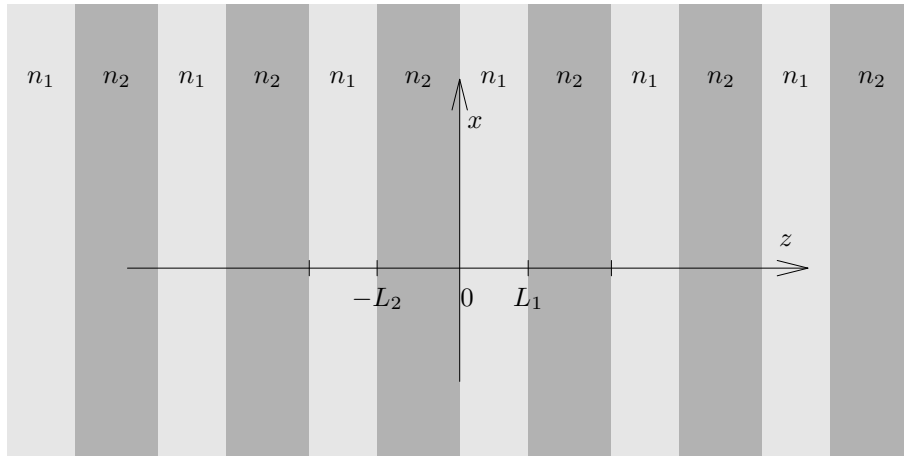
Związek pomiędzy szybkością emisji spontanicznej a otoczeniem wytłumaczył po raz pierwszy Purcell [2], wskazując, że obecność warunków brzegowych prowadzących do rezonansu powoduje ilościową modyfikację drgań (zwiększenie ilości dostępnych stanów), które biorą udział w procesie relaksacji. Rozumowanie to znalazło potwierdzenie doświadczalne w wielu eksperymentach, np. w opisanych w pracach [3–8]. Możliwość modyfikacji szybkości emisji promieniowania można wykorzystać do poprawy sprawności źródeł światła, wpływu na parametry wiązki laserowej (m.in. zaszumienie), czy też do blokowania emisji tam, gdzie jest ona niepożądana.

Aby móc świadomie wpływać na zachodzące zjawisko, potrzebny jest dokładny model matematyczny, poprawnie przewidujący jego przebieg i umożliwiający badanie wpływu na nie różnych czynników będących pod kontrolą konstruktora przyrządu, w którym ono zachodzi, np. wymiary geometryczne lub zastosowane materiały, a zatem także ich parametry. Dogłębne zrozumienie mechanizmu oddziaływania rezonansowego światła z materią, w postaci zaproponowanej przez Einsteina [9] jako trzech procesów: absorpcji fotonu, emisji spontanicznej fotonu i emisji wymuszonej fotonu, stało się możliwe dopiero po narodzinach mechaniki kwantowej, tłumaczącej strukturę atomowych dyskretnych poziomów energetycznych, między którymi mogą zachodzić przejścia wraz z towarzyszącą im odpowiednią wymianą energii z polem elektromagnetycznym. Sformułowana została teoria półklasyczna, opisująca atom za pomocą teorii kwantowej, zaś pole elektromagnetyczne w sposób klasyczny. Za pomocą tej teorii wytłumaczono przejścia wymuszone, wywołane obecnością pola elektromagnetycznego, jednak

okazało się niemożliwe zrozumienie mechanizmu wywołującego emisję spontaniczną, gdyż zerowa amplituda pola oznaczała w tej teorii brak zaburzenia powodującego przejście atomowe. Zjawisko to pojawiło się samoistnie w opisie teoretycznym dopiero po przeprowadzeniu kwantowania pola elektromagnetycznego¹. Zagadnienia modelowania teoretycznego procesów oddziaływania rezonansowego szczegółowo opisane są m.in. w monografii Allena, Eberly'ego i Rzążewskiego [10]. Z punktu widzenia niniejszej pracy ważnym wnioskiem jest, że poprawny model procesu emisji spontanicznej musi być z konieczności modelem kwantowoelektrodynamicznym. Taki właśnie opis emisji spontanicznej w próżni podali jako pierwsi Weisskopf i Wigner [11], zaś opis stosowny dla atomu umieszczonego w dielektryku można znaleźć w pracy Glaubera i Lewensteina [12]. Natomiast wszelkie opisy, w których pole elektromagnetyczne traktowane jest klasycznie, nawet, jeżeli prowadzą do poprawnych wyrażen, nie mogą być uznane za pełną teorię. Są to, w najlepszym przypadku, ograniczone modele, w pewnej części fenomenologiczne, nie dają one pełnego obrazu zjawiska, a interpretacja ich przewidywań i tak wymaga odniesienia do idei teorii kwantowej. Poprawna teoria emisji spontanicznej musi, między innymi, umożliwiać takie uogólnienie na przypadek wielu atomów, które uwzględni zjawisko nadpromienistości, przewidziane przez Dickego i opisane po raz pierwszy w jego pracy [13].

Dokładne zrozumienie mechanizmu zjawiska pozwala wybrać stosowny materiał, który mógłby posłużyć za środowisko odpowiednio kształtujące przebieg procesu. Już od ponad stu lat, dzięki pracy Lorda Rayleigh [14], wiadomo, że ośrodek charakteryzujący się periodycznym rozkładem materiału ma szczególne właściwości. W ośrodku takim pojawiają się przedziały częstotliwości, dla których propagacja fal typu właściwego dla ośrodka jest zabroniona (tj. uniemożliwiona przez ośrodek). Dotyczy to zarówno drgań ciał rozłożonych regularnie wzdłuż elastycznego sznurka, fal akustycznych w ośrodku materialnym, funkcji falowej elektronu w kryształach (mówimy wówczas o przerwach energetycznych), jak też wszelkich innych zjawisk falowych, w tym fal elektromagnetycznych w ośrodku dielektrycznym. Przedziały częstotliwości, dla których propagacja fali elektromagnetycznej jest wzbroniona nazywa się *przerwami fonicznymi*, a materiał, który się nimi charakteryzuje – kryształem fonicznym. Struktury te zawiązującają poświęcaną im uwagę w dużej części pracom i koncepcjom Yablonovitcha [15], który zaproponował wykorzystanie przerwy fonicznej do blokowania emisji spontanicznej, oraz Johna [16], który opisał możliwość lokalizacji fotonów w takiej strukturze po wprowadzeniu w niej odpowiedniego zaburzenia. Powstałe zainteresowanie spowodowało podjęcie wielu prac badawczych skoncentrowanych na właściwościach kryształów fonicznych i doprowadziło do rozwoju technologii wytwarzania takich struktur, np. [17–27]. Obecnie

¹ Ciekawostką jest, że interpretacja mechanizmu wywołującego to przejście zależy od zastosowanego opisu. Można wybrać opis, w którym próżnia bez fotonów ma (formalnie nieskończenie wielką) energię tzw. fluktuacji pola zerowego, które chociaż nie mogą wzbudzić atomu (przekazując mu część swojej energii), mogą jednak wywołać przejście, które go jej pozbawi. Z drugiej strony, można przedstawić opis, w którym próżnia bez fotonów ma zerową energię, a emisja spontaniczna zachodzi przypadkowo, po prostu dlatego, że może zajść. Opisy te są równoważne i prowadzą do jednakowych wyników.



Rys. 1.1. Struktura jednowymiarowego kryształu fotonicznego: n_1, n_2 – współczynniki załamania warstw; L_1, L_2 – szerokości warstw.

faktycznie znajdują one zastosowanie w modyfikacji emisji promieniowania [28–35]. Na bazie struktur z przerwą foniczną zostały zbudowane takie przyrządy jak diody LED, w których powodują one zwiększenie wydajności emisji [7, 31, 36–38] czy lasery, w których zapewnia ona selektywne sprzężenie zwrotne [39, 40] (w szczególności lasery typu VCSEL [41]) lub również wpływa na sprawność przyrządu [42], ale także nie mające na celu generacji promieniowania, jak światłowody [43–45], w których zapewniają one lokalizację i prowadzenie światła; pełnią także role filtrów [46, 47], przesuwników fazy lub linii opóźniających [48]. Struktury periodyczne, często także nazywane kryształami fonicznymi, tworzy się również w mikrofalowych układach pseudo-jednowymiarowych, zbudowanych np. z odcinków linii koncentrycznych lub elementów torów falowodowych [49, 50]. Optycznym odpowiednikiem tego typu rozwiązań są światłowodowe siatki Bragga [51–53]. Struktury takie znajdują zastosowanie jako selektywne zwierciadła, sensory [51] lub elementy sprzęgaczy [54, 55], laserów włóknowych oraz innych przyrządów.

Najprostszym rodzajem kryształu fotonicznego jest jednowymiarowy kryształ foniczny ze skokowo zmieniającym się współczynnikiem załamania, zbudowany z płaskich warstw dielektrycznych (rys. 1.1). Struktura taka posiada zalety, które powodują, że jest ona ważnym tematem prac badawczych. Jest to jedyna struktura foniczna, którą można w pełni opisać w sposób analityczny². Dzięki temu daje się wyprowadzać ściśle wyrażenia pozwalające formułować wnioski o charakterze ogólnym i nie trzeba opierać się jedynie na obserwacjach poczynionych dla konkretnych struktur. Otrzymane rozwiązania analityczne dla jednowymiarowego kryształu fonicznego są bardzo istotne także w przypadku o wiele bardziej złożonych struktur fonicznych, gdyż mogą służyć jako punkt wyjścia dla modeli tych struktur oraz umożliwiają interpretację lub weryfikację wyników, do których by one prowadziły. Strukturę jednowy-

² Dla struktur dwu- oraz trójwymiarowych kryształów fonicznych nie są znane jawnie wyrażenia opisujące rozkłady pola.

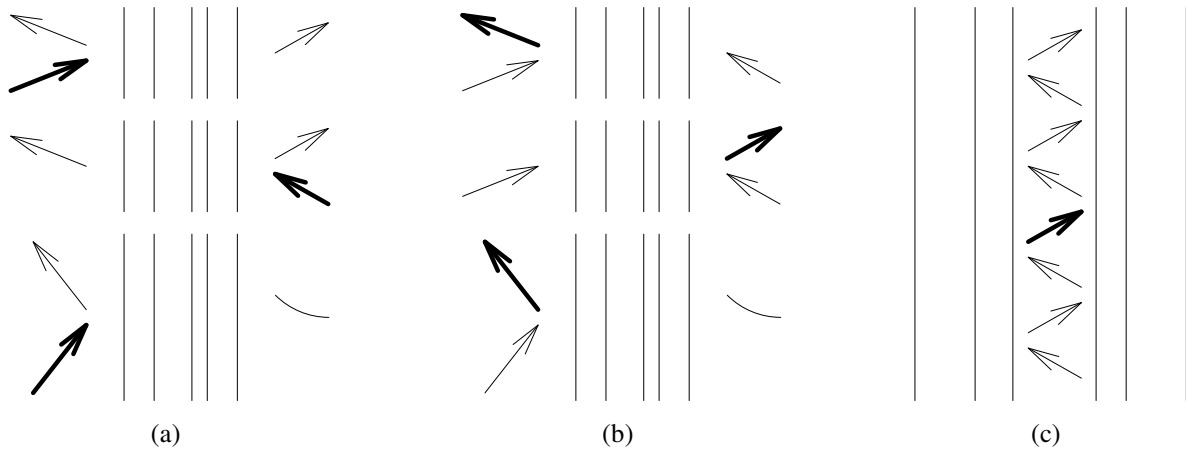
miarowego kryształu fotonicznego jest stosunkowo prosto wytworzyć, co znacząco wpływa na możliwość przeprowadzania doświadczeń i zastosowania jako elementów urządzeń. Ponadto, dobierając materiały warstw, które zapewnią odpowiedni kontrast współczynników załamania, można otrzymać nawet w tak prostej strukturze przerwę foniczną, która obejmuje wszystkie mody związane z promieniowaniem ze struktury³ [32, 56–58].

1.2. Modele pola elektromagnetycznego w jednowymiarowych kryształach fonicznych

Idealny kryształ foniczny jest strukturą ściśle okresową (charakteryzującą się symetrią translacyjną⁴), co za tym idzie, zbudowaną z nieskończonej liczby komórek elementarnych (tj. grup warstw, których sekwencje powtarzają się regularnie w strukturze), a zatem jego modelowanie można oprzeć na twierdzeniu Floqueta-Blocha, które ustala postać modów pola elektromagnetycznego w strukturze (zwanymi falami Blocha). Zgodnie z tym twierdzeniem, mody struktury są postaci $u(\mathbf{r}; \mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, gdzie \mathbf{k} jest wektorem falowym, a $u(\mathbf{r}; \mathbf{k})$ jest (parametryzowaną przez \mathbf{k}) funkcją okresową, o takim samym okresie, jak sieć krystaliczna, tzn. jeżeli sieć krystaliczna jest niezmiennicza względem translacji o wektor \mathbf{R} , wtedy $u(\mathbf{r} + \mathbf{R}; \mathbf{k}) = u(\mathbf{r}; \mathbf{k})$. Podejście to pozwala wytłumaczyć ogólne cechy kryształów fonicznych, takie jak istnienie przerw fonicznych, ich położenie i szerokość, zaś przykłady zastosowania go w obliczeniach można znaleźć np. w pracach [59, 60]. Jednak każdy rzeczywisty kryształ foniczny jest strukturą skończonych rozmiarów, dla której nie można przyjąć okresowych warunków brzegowych, ponieważ fotony mogą docierać do jej krawędzi i opuszczać ją, a tym samym silnie odczuwają jej obecność [61]. Modele, które mają na celu opisanie cech realizowanych struktur, muszą więc traktować jednowymiarowy kryształ foniczny jako szczególny przypadek wielowarstwowego falowodu planarnego (szczególnie, gdy w strukturze mają być obecne defekty w formie warstw o szerokościach lub współczynnikach załamania niezgodnych z wartościami w strukturze regularnej), co wyklucza możliwość zastosowania twierdzenia Floqueta-Blocha i pociąga za sobą konieczność zastosowania innej bazy modów struktury. Wprawdzie można w takim przypadku zmodyfikować mody Blocha, poprzez dodatkową modulację przestrzenną lub zszywanie z falami płaskimi w obszarach, w których okresowość jest naruszona, wprowadza to jednak niepotrzebne komplikacje. Powszechnie stosowanym podejściem jest zastosowanie odpowiednio rozbudowanego modelu Carnigli-Mandela [62], zaproponowanego oryginalnie do opisu pola elektromagnetycznego na granicy dwóch ośrodków. W modelu tym, pole elektromagnetyczne opisuje się za pomocą modów pojawiających się w naturalny sposób przy rozważaniu odbicia fali na granicy ośrodków, otrzymanych poprzez odpowiednie sklejenie fal płaskich padających na granicę pod każdym kątem, z każdą płaszczyzną padania i z każdą polaryzacją, tj.:

³ Tj. mody promieniowania i podłożowe według klasyfikacji przyjętej w niniejszej pracy.

⁴ Symetria translacyjna oznacza niezmienniczość względem przesunięcia o pewien wektor.



Rys. 1.2. Różne konstrukcje modów struktury: (a) mody nadchodzące, (b) mody wychodzące, (c) model efektywnego rezonatora. Strzałki wskazują wektory falowe zszywanych fal płaskich, pogrubiona oznacza falę pobudzającą mod. Fragment krzywej oznacza falę zanikającą wykładniczo.

- fali padającej z ośrodka o mniejszym współczynniku załamania z towarzyszącymi jej falą odbitą i falą załamaną w ośrodku o większym współczynniku załamania;
- fali padającej z ośrodka o większym współczynniku załamania pod kątem mniejszym od kąta całkowitego odbicia z towarzyszącymi jej falą odbitą i falą załamaną w ośrodku o mniejszym współczynniku załamania;
- fali padającej z ośrodka o większym współczynniku załamania pod kątem większym od kąta całkowitego odbicia z towarzyszącymi jej falą odbitą i falą zanikającą w ośrodku o mniejszym współczynniku załamania.

Mody te są ortogonalne [63] i w przypadku dwóch ośrodków tworzą układ zupełny [64]. Ponieważ pochodzą one od fal padających, nazywa się je modami *nadchodzącymi* (ang. *incoming modes*). Można posłużyć się nieco innym zestawem modów, umieszczając w miejsca fal padających fale propagujące się od granicy, z którymi skleja się fale płaskie z obydwu stron granicy (jedna z nich może być zanikająca) [65]. Mody struktury nazywa się wówczas modami *wychodzącymi* (ang. *outgoing modes*). Zbiory te są równoważne, a różnica pomiędzy nimi polega na tym, że dla wybranej polaryzacji, w przypadku modów nadchodzących, z każdego kierunku na granicę ośrodków pada tylko jedna fala płaska, zaś w przypadku modów wychodzących – granicę ośrodków opuszcza w każdym kierunku tylko jedna fala płaska. Pierwszy z tych zbiorów wydaje się zatem być naturalniejszy dla procesu absorpcji, zaś drugi – dla procesu emisji. Model Carnigli-Mandela można prosto uogólnić na przypadek struktury wielowarstwowej, w której mogą występować mody prowadzone. Mody utworzone w opisany powyżej sposób, z rozkładami pola wewnątrz struktury, które można otrzymać np. metodą macierzy przejścia [66, 67], tworzą zbiory modów promieniowania i podłożowych. Schematycznie konstrukcja tych modów przedstawiona jest na rys. 1.2 (a) i (b). Model należy uzupełnić o zbiór modów prowadzonych, które wystarczy znaleźć dla warstwy o najwyższym współczynniku załamania. Przykładami

prac opartych o mody nadchodzące i wychodzące są, odpowiednio, [68] i [69]. W pierwszej z tych prac, mody promieniowania zostały przededefiniowane tak, aby w obszarach poza strukturą uzyskać postać fal stojących, co ma zapewnić ich ortogonalność [70].

W przypadku modów nadchodzących, źródła fal, z których biorą one swój początek, umieszczone są na zewnątrz struktury, co jest raczej nienaturalne w przypadku, gdy faktyczne źródło promieniowania umieszczone jest wewnątrz struktury. Mody wychodzące pochodzą wprawdzie od fal unoszących energię ze struktury, jednak ich konstrukcja może kojarzyć się bardziej z „wysysaniem” jej przez bliżej niesprecyzowane urządzenia poza strukturą, niż z aktem emisji z jej wnętrza. Stoi to w pewnej sprzeczności z dążeniem do opisanie właściwości struktury „z punktu widzenia” obiektu znajdującego się w jej wnętrzu, który jest źródłem promieniowania (w wyidealizowanym przypadku jedynym), a warunki brzegowe zadane są przez jego bezpośrednie otoczenie, które przecież może istotnie zmieniać się w zależności od tego, w którym miejscu wewnątrz struktury ów obiekt zostanie umieszczony. Modelem, który jawnie uwzględnia tę możliwość jest model efektywnego rezonatora [71–80], utworzony według oryginalnego pomysłu autora niniejszej rozprawy. W modelu tym rozpatruje się oddzielnie rozkłady pola związane z każdą warstwą struktury, jest on zatem najogólniejszym możliwym modelem dla planarnej struktury warstwowej. Każdy rozkład pola pochodzi od pojedynczej fali płaskiej i otrzymuje się go sumując z tą falą wszystkie fale odbite od obydwu granic warstwy – patrz rys. 1.2(c). Mody te są indeksowane wektorem falowym i polaryzacją, dzielą się w naturalny sposób na mody promieniowania, podłożowe i prowadzone. Wprawdzie metoda oparta na zbliżonej koncepcji była już opisywana w literaturze, np. w [81, 82], jednak wykraczała ona niewiele ponad wyznaczenie kątów padania, przy których występują mody wnęki. Natomiast przedstawiony w niniejszej pracy model efektywnego rezonatora stanowi pełny opis pola elektromagnetycznego, m.in. poprzez zdefiniowane przez autora rozprawy parametry niosące ze sobą istotną treść fizyczną. Dzięki temu model ten pozwala na prostą i szybką analizę właściwości struktury kryształu fotonicznego, w tym także tych o charakterze lokalnym i stanowi dla projektanta struktury narzędzie wygodniejsze, niż opisane wcześniej modele.

Jedną z wielkości charakteryzujących strukturę, istotną przy analizie procesu emisji, jest gęstość stanów. Badanie wpływu struktury na ten proces przeprowadza się często poprzez obliczanie tej wielkości [83–85]. Jeżeli jednak posługuje się w tych rachunkach modelem opartym na polu pochodzącym spoza struktury, trudno jest powiązać ostateczny wynik z konkretnym fragmentem kryształu fotonicznego. W modelu efektywnego rezonatora autor rozprawy definiuje tzw. *widmo modowe*, które jest własnością konkretnej warstwy struktury. Wielkość ta jest odpowiednikiem dobroci rezonatora zdefiniowanej dla każdego modu oddzielnie. Jeżeli widmo modowe przyjmuje wartości bliskie takiej, jak w jednorodnym ośrodku, oznacza to, że warstwa ma dla rozważanych modów niską dobroć. Wysokie wartości widma modowego wskazują na wysoką dobroć i konstruktywną interferencję w warstwie, zaś niskie wartości – na wysoką dobroć, ale destruktywną interferencję. W pracach autora rozprawy pokazano szereg cech i możliwości modelu efektywnego rezonatora. Wzorując się na metodzie zliczania mo-

dów [84], można powiązać widmo modowe z gęstością stanów, interpretując je jako swego rodzaju „spektralną gęstość” tej wielkości [71,72]. Analizując widmo modowe można w prosty sposób odczytać najważniejsze cechy struktury fotonicznej, takie jak przerwy fotoniczne, czy częstotliwości modów defektowych, a także bardziej subtelne, jak np. lokalny charakter defektu, polegający na tym, że wprowadzony defekt powiększa istotnie widmo modowe (a zatem też gęstość stanów) jedynie w pewnej liczbie warstw przylegających do zdefektowanej [73]. Posługując się widmem modowym można także zbadać, w jakim stopniu przypadkowe defekty, mające swoje źródło w niedoskonałości procesu technologicznego, powodują degradację struktury [74]. Model efektywnego rezonatora pozwala w sposób analityczny wyznaczyć ortonormalną bazę modów właściwą dla zadanej warstwy [75–78], a także podać szereg ich właściwości matematycznych [79]. Widmo modowe przekłada się bezpośrednio na szybkość emisji spontanicznej [80], co jest szczególnie istotne w niniejszej pracy. Sprawia to, że model efektywnego rezonatora stanowi wygodne narzędzie dla projektanta struktur optoelektronicznych, które może znaleźć zastosowanie np. przy optymalizacji układu warstw diod LED lub doborze parametrów siatek Bragga w laserach włóknowych. Warto także zaznaczyć, że jako model w pełni analityczny, model efektywnego rezonatora można stosować jako „punkt odniesienia” dla modeli numerycznych lub podstawę konstrukcji analitycznych, lecz przybliżonych modeli bardziej złożonych struktur – został on w tym celu wykorzystany w modelu opisanym w [86].

1.3. Cel i tezy rozprawy

Za cel pracy zostały postawione:

- kompletne sformułowanie matematyczne modelu efektywnego rezonatora jednowymiarowego kryształu fotonicznego z dowolnymi defektami (szerokości lub współczynnika załamania warstwy) i analiza właściwości tego modelu;
- zastosowanie owego modelu do wyprowadzenia wygodniejszego (z punktu widzenia projektanta struktury) opisu emisji spontanicznej, niż oparte na spotykanych w literaturze modelach pola elektromagnetycznego w jednowymiarowych kryształach fotonicznych, (wykorzystujących mody Floqueta-Blocha, czy funkcje opisujące gęstość stanów).

W pracy ograniczono się do modelowania struktur jednowymiarowych, dla których możliwe jest sformułowanie modelu w pełni analitycznego, z jawnymi wyrażeniami opisującymi rozkłady pól i różne charakterystyki struktury. Przyjęte zostało także przybliżenie dielektryków bezdyspersyjnych, bezstratnych, liniowych i izotropowych. W ten sposób, skoncentrowano się na wyprowadzeniu wyrażen analitycznych oddających najistotniejsze cechy struktury. Jest to postępowanie standardowo przyjmowane w podobnych pracach, a otrzymane wyniki pozwalają stwierdzić, że taki opis w przypadku bardziej skomplikowanych struktur byłby identyczny co do zasady. Rozszerzenie opracowanego modelu na ogólniejsze przypadki, uwzględniając w nim materiały dyspersyjne, stratne, nieliniowe lub anizotropowe, czy też bardziej złożoną

geometrię struktury, stanowi możliwą drogę kontynuacji pracy. W rozprawie przedstawiono kilka praktycznych spostrzeżeń poczynionych na podstawie opracowanego modelu i dokonanych wyprowadzeń.

Przeprowadzone w ramach niniejszej pracy badania pozwalają dowieść następujących tez:

Teza 1. *Emisję spontaniczną w strukturze jednowymiarowego kryształu fotonicznego z defektami można scharakteryzować za pomocą widma modowego, zdefiniowanego w modelu efektywnego rezonatora.*

Teza 2. *W zdefektowanym jednowymiarowym kryształcie fotonicznym, zbudowanym ze skończonej liczby warstw, szybkość emisji spontanicznej do modu defektowego jest zwiększona jedynie w pewnym ograniczonym obszarze wokół defektu i zależy od położenia defektu w strukturze.*

Prawdziwość tezy nr 1 dowodzą wyniki otrzymane w rozdziale 5, które pokazują, że widmo modowe jest wprost proporcjonalne do wkładów poszczególnych modów do szybkości emisji spontanicznej oraz do prawdopodobieństwa emisji do konkretnego modu. W rozdziale 4 zostało wykazane, że widmo modowe zawiera informacje o własnościach struktury, a zatem także odzwierciedla ono wpływ jej szczególnych cech na przebieg zjawiska emisji spontanicznej.

Za prawdziwością tezy nr 2 przemawia dyskusja przeprowadzona w rozdziale 4 wraz z zamieszczoną w nim rys. 4.10, przedstawiającym wykresy widma modowego wokół różnie rozmieszczonych defektów. Wykresy te pokazują, że widmo modowe w warstwach odpowiednio odległych od defektu przyjmuje małe wartości i wynika z nich jednoznacznie, że widmo modowe osiąga różne wartości przy różnym umiejscowieniu defektu. Zgodnie z tezą nr 1, wartości widma modowego przekładają się na szybkość emisji do modu, a zatem poczynione obserwacje dotyczą także zachowania się tej wielkości.

1.4. Układ pracy

Układ niniejszej rozprawy jest następujący. W rozdziale 2 zdefiniowana jest rozważana struktura i parametry stosowane do jej opisu. Rozdział 3 zawiera wprowadzenie pojęć i definicji z zakresu elektrodynamiki stanowiących podstawę dalszych rozważań, dotyczących równań Maxwella i ich rozwiązań o postaci fali płaskiej, warunków ciągłości pola oraz wynikającej z nich metody macierzy przejścia, uzupełnionych przez autora rozprawy pewnymi uwagami, istotnymi w dalszej części pracy. Metoda macierzy przejścia jest podstawą dla modelu efektywnego rezonatora, którego szczegółowe omówienie jest tematem rozdziału 4. Zawartość tego rozdziału stanowi w całości oryginalny wkład autora rozprawy. Przedstawiony w nim jest równoważny opis warstwy jako rezonatora, w którym definiuje się specyficzne, charakteryzujące go parametry. Pokazany jest sposób konstrukcji ortonormalnych modów struktury związanych z ustaloną warstwą, a następnie omówiona kwestia równoważności modów pochodzących z różnych warstw między sobą oraz z modami modelu Carnigli-Mandela. Rozdział 5 zawiera teorię procesu emisji spontanicznej, prowadzącej do wyrażenia na szybkość tego zjawiska, sformu-

łowanego z wykorzystaniem zdefiniowanych przez autora rozprawy parametrów efektywnego rezonatora. W rozdziale 6 teoria ta jest rozbudowana na przypadek układu wieloatomowego, w którym pojawia się zjawisko nadpromienistości, zaś opracowany przez autora rozprawy opis prowadzi do postawienia hipotezy dotyczącej emisji kolektywnej. Rozdział 7 podsumowuje pracę.

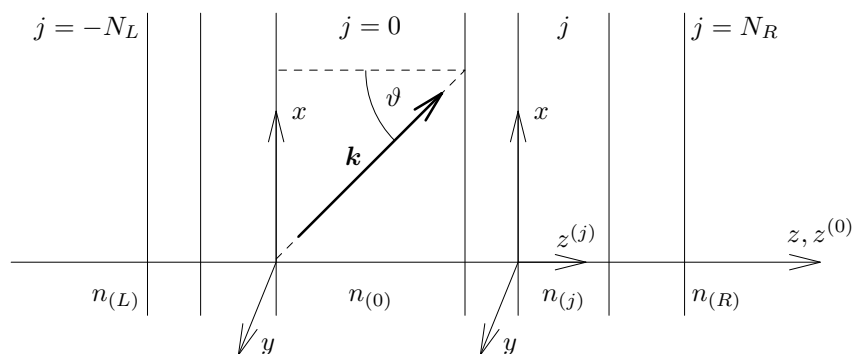
2. Jednowymiarowy kryształ fotoniczny

Rozdział ten zawiera definicję struktury rozważanej w niniejszej pracy oraz używanych do jej opisu parametrów materiałowych i geometrycznych.

2.1. Definicja struktury

Jednowymiarowy kryształ fotoniczny jest strukturą dielektryczną, która jest szczególnym przypadkiem wielowarstwowego światłowodu planarnego. Aby uwzględnić skończone rozmiary kryształu fotonicznego i dopuścić obecność dowolnych defektów (szerokości lub współczynnika załamania warstwy) w jego strukturze, nie wolno narzucać ograniczeń na wymiary i materiały warstw. Należy zatem posłużyć się najogólniejszym (geometrycznie) modelem tego typu falowodu. Dla uproszczenia rozważań, w rozprawie założono wyidealizowany model materiałów warstw, jako jednorodnych, liniowych i izotropowych dielektryków o pomijalnie małej stratności. W ten sposób, przedstawiony model pozwala opisać najistotniejsze aspekty wpływu struktury jednowymiarowego kryształu fotonicznego na emisję spontaniczną fotonu.

W niniejszej pracy rozważana jest struktura zbudowana ze skończonej liczby warstw dielektrycznych, których materiały są bezstratne, liniowe, izotropowe i jednorodne, ułożonych w dowolnej kolejności wzdłuż osi z , rozciągających się nieskończenie w kierunkach prostopadłych do tej osi (rys. 2.1). Warstwy struktury numerowane są kolejno indeksem j , poczynając od wartości $j = -N_L$, odpowiadającej obszarowi znajdującemu się na lewo od kryształu fotonicznego, do wartości $j = N_R$, odpowiadającej obszarowi z prawej strony struktury. Obydwa skrajne obszary, wypełniające przestrzeń poza strukturą, traktowane są w opisie jako jej war-



Rys. 2.1. Model struktury jednowymiarowego kryształu fotonicznego z defektami.

stwy. Szerokość j -tej warstwy wynosi $L_z^{(j)}$, zaś rozkład współczynnika załamania w strukturze można przedstawić jako funkcję współrzędnej z :

$$n(z) = \sum_j n_{(j)} \chi_j(z), \quad (2.1)$$

gdzie $n_{(j)}$ oznacza współczynnik załamania j -tej warstwy, natomiast $\chi_j(z)$ jest funkcją charakterystyczną j -tej warstwy, zdefiniowaną jako:

$$\chi_j(z) = \begin{cases} 1, & \text{dla } z \text{ wewnątrz } j\text{-tej warstwy,} \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (2.2)$$

Z każdą warstwą związany jest jej lokalny układ współrzędnych $(x, y, z^{(j)})$, w którym współrzędna $z^{(j)}$ przyjmuje wartość 0 na lewej granicy warstwy i wartość $L_z^{(j)}$ na prawej granicy warstwy. Wyjątkiem jest współrzędna $z^{(L)}$ w układzie lokalnym obszaru z lewej strony światłowodu¹, która przebiega od $-\infty$ do 0 na jego jedynej powierzchni granicznej. Układ współrzędnych warstwy $j = 0$ uważany będzie za globalny układ współrzędnych, tak więc $z^{(0)} = z$. Osie x i y są wspólne dla lokalnych układów wszystkich warstw.

Przy wyprowadzeniach wygodnie jest posługiwać się możliwie ogólnymi oznaczeniami, natomiast prezentacja wyników obliczeń jest czytelniejsza, jeżeli skorzysta się z oznaczeń oddających regularny charakter struktury. W niniejszej pracy brane pod uwagę będą kryształy fotoniczne zbudowane z dwóch różnych materiałów (choć nic nie stoi na przeszkodzie, aby wykonać opisywane obliczenia dla struktur o bardziej urozmaiconym rozkładzie warstw). Wyłączając warstwy zdefektowane, dla warstw o parzystym indeksie j można przyjąć współczynnik załamania n_1 i szerokość L_1 , a dla warstw o j nieparzystym – współczynnik załamania n_2 i szerokość L_2 .

2.2. Bezwymiarowe parametry struktury jednowymiarowego kryształu fotonicznego

Do opisu struktury wielowarstwowego falowodu planarnego i zachodzących w niej zjawisk wygodnie jest wprowadzić zestaw bezwymiarowych parametrów, zdefiniowanych w oparciu o pewną charakterystyczną wielkość o wymiarze długości Λ . Zamiast szerokości optycznej j -tej warstwy $\Lambda^{(j)} = n_{(j)} L_z^{(j)}$ można stosować znormalizowaną szerokość optyczną $\Lambda^{(j)}/\Lambda$. Położenie wewnątrz j -tej warstwy można przedstawić w postaci znormalizowanej jako $\zeta^{(j)} = n_{(j)} z / \Lambda^{(j)}$, zachodzi wtedy $0 \leq \zeta^{(j)} \leq 1$. Przyjętej charakterystycznej długości odpowiada charakterystyczna częstotliwość $f_0 = c/\Lambda$, co pozwala zdefiniować znormalizowaną

¹ Dla zwiększenia czytelności wzorów, w niniejszej pracy stosowany jest następujący sposób zapisu: w indeksach górnych i dolnych zamiast N_R pojawia się R , a zamiast $-N_L$ pojawia się L , np. współczynniki załamania na zewnątrz kryształu fotonicznego zapisywane są jako $n_{(R)}$ oraz $n_{(L)}$.

częstotliwość $\Theta = f/f_0$. Dla większej zwięzłości wzorów można także w miejsce kąta padania ϑ posługiwać się jego kosinusem $\eta = \cos\vartheta$. Wszystkie wyrażenia, które będą potrzebne w obliczeniach można wyrazić za pomocą tych parametrów, np.²:

$$k_z z = 2\pi\eta\Theta\zeta\frac{\Lambda^{(0)}}{\Lambda}, \quad (2.3a)$$

$$k_z^{(j)} L_z^{(j)} = \pm 2\pi\Theta \sqrt{1 - \frac{1 - \eta^2}{n_{(j)}^2/n_{(0)}^2}} \frac{\Lambda^{(j)}}{\Lambda}, \quad (2.3b)$$

$$\left| \frac{k_z^{(j)}}{k_z} \right| = \sqrt{\left| 1 + \frac{n_{(j)}^2/n_{(0)}^2 - 1}{\eta^2} \right|}. \quad (2.3c)$$

Komórka elementarna rozważanego jednowymiarowego kryształu fonicznego składa się z dwóch warstw, pierwszej o szerokości L_1 i współczynniku załamania n_1 oraz drugiej, o szerokości L_2 i współczynniku załamania n_2 . Szerokości optyczne tych warstw wynoszą $\Lambda_1 = n_1 L_1$ i $\Lambda_2 = n_2 L_2$. Jako charakterystyczny wymiar wygodnie jest przyjąć szerokość optyczną całej komórki elementarnej $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$. Wówczas $\Lambda_1/\Lambda + \Lambda_2/\Lambda = 1$ oraz $0 \leq \Lambda_1/\Lambda \leq 1$. Obliczenia przedstawione w tej pracy zostały przeprowadzone przy takiej właśnie definicji Λ .

² k_z i $k_z^{(j)}$ są składowymi wektorów falowych, zdefiniowanymi w następnym rozdziale.

3. Formalizm macierzy przejścia

W niniejszym rozdziale przedstawiony jest opis pola elektromagnetycznego za pomocą metody macierzy przejścia, opisanej przez Yeh'a i innych [66, 67]. Rozdział rozpoczyna się od zdefiniowania pojęć i wielkości z zakresu klasycznej teorii pola elektromagnetycznego [87–91], stanowiących podstawę dla rozważań przedstawionych w rozprawie. Następnie, zdefiniowana zostaje metoda macierzy przejścia i poczynionych jest kilka uwag, które nie są powszechnie spotykane w literaturze, są natomiast istotne w dalszej części pracy.

3.1. Równania i warunki ciągłości pola elektromagnetycznego

Równaniami ruchu dla pola elektromagnetycznego są równania Maxwella:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{J}(\mathbf{r}, t), \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t), \quad (3.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3.1d)$$

w których: \mathbf{E} jest natężeniem pola elektrycznego, \mathbf{D} – indukcją pola elektrycznego, \mathbf{H} – natężeniem pola magnetycznego, zaś \mathbf{B} jest indukcją tego pola, \mathbf{J} jest wektorem gęstości prądu elektrycznego (swobodnego), a ρ jest gęstością ładunku elektrycznego (swobodnego). Wszystkie te wielkości są funkcjami położenia \mathbf{r} oraz czasu t . W niniejszej pracy rozważana jest struktura dielektryczna, bez swobodnych prądów i ładunków, co odpowiada położeniu $\mathbf{J} = 0$ oraz $\rho = 0$. Rozważane są materiały liniowe, izotropowe i niemagnetyczne (o przenikalności magnetycznej $\mu \approx 1$), w których zachodzą związki:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r})\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (3.2b)$$

gdzie ε_0 jest przenikalnością elektryczną próżni, ε – względną przenikalnością elektryczną ośrodka (zależną od położenia), a μ_0 przenikalnością magnetyczną próżni. Przenikalności elektryczna i magnetyczna próżni związane są z prędkością światła w próżni $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$. Przenikalność względna ε charakteryzuje materiał dielektryka, którego rozmieszczenie determinuje jej zależność od położenia \mathbf{r} . W ogólności, ε jest funkcją zespoloną, która zależy także od czę-

stotliwości, a jej części rzeczywista i urojona są ze sobą powiązane relacjami Kramersa-Kröniga [92–94]. W niniejszej pracy jednak stosuje się przybliżenie dielektryka bezstratnego i bezdy-spersyjnego, polegające na zaniedbaniu części urojonej ε i jej zależności od częstotliwości. W takim przypadku, ε jest funkcją rzeczywistą, równą kwadratowi współczynnika załamania, w przedstawionych tu rozważaniach

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = n^2(z) = \sum_j n_{(j)}^2 \chi_j(z). \quad (3.3)$$

Przy powyższych założeniach, równania Maxwella przyjmują postać:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.4a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon(\mathbf{r}) \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.4b)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (3.4c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (3.4d)$$

Równania te można rozwiązać rozważając najpierw przypadek ośrodka jednorodnego, a następnie zszywając ze sobą takie rozwiązania otrzymane w różnych warstwach.

3.1.1. Rozwiązania w jednorodnie wypełnionej przestrzeni

Przyjmując, że $\varepsilon = n^2$ jest stałe w całej przestrzeni, można łatwo znaleźć rozwiązania układu równań (3.4). Biorąc rotację obydwu stron równania (3.4a) i podstawiając do tak otrzymanego równania $\nabla \times \mathbf{H}$ zdefiniowaną równaniem (3.4b), otrzymuje się równanie falowe dla pola elektrycznego [87–91]:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (3.5a)$$

W podobny sposób, wstawiając $\nabla \times \mathbf{E}$ dane przez (3.4a) do równania otrzymanego przez wzięcie rotacji stron (3.4b) dochodzi się do równania falowego dla pola magnetycznego:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (3.5b)$$

Równania te mają identyczną postać, zatem mają również identyczne rozwiązania. Można rozwiązać je metodą separacji zmiennych, a ich ogólne rozwiązanie można przedstawić w postaci fali płaskiej

$$\mathbf{e}_{k\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} e^{-i\omega t}, \quad (3.6)$$

o wektorze falowym \mathbf{k} , pulsacji ω i polaryzacji ϵ , której odpowiada wersor $\mathbf{e}_{k\epsilon}$. Aby rozwiązanie to spełniało także odpowiednie z równań (3.4c) lub (3.4d) musi zachodzić

$$\mathbf{e}_{k\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (3.7)$$

tn. wersor $e_{k\epsilon}$ musi być prostopadły do wektora falowego \mathbf{k} . Wynika stąd, że można dla ustalonego \mathbf{k} wskazać dwie liniowo niezależne polaryzacje fali płaskiej. Oprócz tego, współrzędne wektora falowego i pulsację wiąże zależność dyspersyjna

$$k^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}, \quad (3.8)$$

zatem spośród tych czterech parametrów jedynie trzy są niezależne. Równania Maxwella a priori nie narzucają innych ograniczeń na składowe wektora falowego i częstotliwość, na tym etapie wyprowadzenia należy zatem dopuścić, że są to w ogólności liczby zespolone. Jednakże fizyczne pola muszą mieć skończoną energię lub gęstość energii, co oznacza, że spośród wszystkich rozwiązań równań Maxwella należy odrzucić te, w których pola rozbiegają się wykładniczo przy $t \rightarrow \pm\infty$ lub $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Ponieważ czasoprzestrzeń jest jednorodna w czasie, dla rozwiązań fizycznych zawsze $\omega \in \mathbb{R}$. W przypadku jednorodnego ośrodka również $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, jednak przy nietrywialnych warunkach brzegowych mogą rozwiązaniom fizycznym odpowiadać także wartości składowych wektora falowego spoza zbioru liczb rzeczywistych.

Dla fali o harmonicznej zależności od czasu $\exp(-i\omega t)$ pole magnetyczne wyraża się przez pole elektryczne wzorem $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{E}/i\mu_0\omega$, a uśredniony po okresie drgań pola wektor Poyntinga [87–91]:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2}. \quad (3.9)$$

Część rzeczywista tego wektora określa kierunek przepływu energii pola.

3.1.2. Warunki ciągłości pola elektromagnetycznego na granicy ośrodków

W przypadku, gdy pewna powierzchnia \mathcal{S} stanowi granicę pomiędzy dwoma różnymi dielektrykami, ϵ zmienia się skokowo przy przejściu przez tę powierzchnię. W takiej sytuacji, rozwiązania równań pola można otrzymać najpierw znajdując osobne rozwiązania dla każdego z dielektryków, a następnie zszywając je za pomocą warunków ciągłości pól [87–91]. Niech \mathbf{n} będzie wersorem normalnym powierzchni \mathcal{S} , a przenikalności elektryczne dielektryków po obydwu stronach tej powierzchni wynoszą ϵ_1 i ϵ_2 . Przy przyjętych w tej pracy założeniach dotyczących materiałów¹, warunki ciągłości dla pól można zapisać jako:

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.10a)$$

$$(\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (3.10b)$$

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = 0, \quad (3.10c)$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = 0, \quad (3.10d)$$

co oznacza, że składowe wektora natężenia pola magnetycznego i wektora indukcji elektrycznej prostopadłe do powierzchni \mathcal{S} muszą być ciągłe oraz składowe wektorów natężeń pól styczne

¹ Założenia te zostały przedstawione w rozdziale 2.

do \mathcal{S} muszą być ciągłe. Przy orientacji układu współrzędnych zgodnie z definicją z rozdziału 2, można wybrać $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$. Składowymi stycznymi są wówczas składowe w płaszczyźnie xy , a prostopadłymi – w kierunku z .

3.2. Pole elektromagnetyczne w wielowarstwowym planarnym falowodzie dielektrycznym

Znając rozwiązania równań Maxwella dla jednorodnego ośrodka i warunki ciągłości pola, można znaleźć rozwiązanie dla rozważanej struktury jednowymiarowego kryształu fotonicznego, modelowanego jako wielowarstwowy planarny falowód dielektryczny. W tym celu, należy zszyć rozwiązania w postaci fal płaskich z różnych warstw. Należy jednak zauważyć, że w takiej strukturze wektor falowy fali płaskiej \mathbf{k} nie musi być rzeczywisty. Struktura jest jednorodna w kierunkach x i y , więc $k_x \in \mathbb{R}$ i tak samo $k_y \in \mathbb{R}$, ale przypadek składowej k_z jest bardziej złożony. Przy rzeczywistych składowych k_x i k_y , ponieważ częstotliwość także jest rzeczywista, ze związku dyspersyjnego (3.8) wynika, że możliwe są dwa przypadki:

1. $k_z \in \mathbb{R}$, wówczas można wybrać pulsację ω , przy której związek (3.8) jest spełniony, a rozwiązanie ma postać jednorodnej fali płaskiej.
2. $k_z \in i\mathbb{R}$, tzn. jest liczbą urojoną. Ponieważ $\omega \in \mathbb{R}$, więc w tym przypadku obowiązuje ograniczenie $|k_z| \leq k_{\parallel}$, gdzie k_{\parallel} jest długością składowej równoległej wektora falowego \mathbf{k}_{\parallel} :

$$\mathbf{k}_{\parallel} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y, \quad k_{\parallel} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}. \quad (3.11)$$

Rozwiązanie ma wówczas postać niejednorodnej fali płaskiej, której amplituda zanika lub narasta w kierunku z , zależnie od znaku składowej k_z .

Znalezione rozwiązanie jest fizycznym modem struktury, jeżeli nie rozbiega się wykładniczo gdy $z \rightarrow \pm\infty$.

W strukturze tego typu można wyróżnić dwie polaryzacje: TE, w której wektor natężenia pola elektrycznego jest prostopadły do płaszczyzny padania oraz TM, w której prostopadły do płaszczyzny padania jest wektor natężenia pola magnetycznego. Wersory polaryzacji, określające kierunek wektora natężenia pola elektrycznego, można zdefiniować następująco:

$$\mathbf{e}_{k\text{TE}} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}_z|}, \quad \mathbf{e}_{k\text{TM}} = \frac{\mathbf{e}_{k\text{TE}} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \quad (3.12a)$$

dla $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$ można jako wersor polaryzacji TE wybrać dowolny wersor prostopadły do \mathbf{k} . Wersory te są w ogólności zespolone. Kierunek wektora pola magnetycznego wyznaczają natomiast

wersory²

$$\mathbf{e}_{k\epsilon}^H = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{k\epsilon}}{|\mathbf{k}|}. \quad (3.12b)$$

Można pokazać bezpośrednim rachunkiem, że tak zdefiniowane wersory spełniają relacje

$$\mathbf{e}_{-k^*\epsilon} = -\gamma_\epsilon \mathbf{e}_{k\epsilon}^*, \quad \mathbf{e}_{-k^*\epsilon}^H = \gamma_\epsilon \mathbf{e}_{k\epsilon}^{H*}, \quad (3.13a)$$

gdzie współczynnik

$$\gamma_\epsilon = \begin{cases} 1, & \text{dla } \epsilon = \text{TE}, \\ -1, & \text{dla } \epsilon = \text{TM}. \end{cases} \quad (3.13b)$$

W dalszych rachunkach istotną rolę odgrywać będzie także operacja odbicia wektora względem płaszczyzny xy . Wektor $\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z$ po tej operacji, która sprowadza się do zmiany znaku składowej w kierunku z , oznaczany będzie gwiazdką w indeksie dolnym:

$$\mathbf{k}_* = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y - k_z \mathbf{e}_z. \quad (3.14)$$

Aby mogły być spełnione warunki ciągłości pola, wszystkie zszywane fale płaskie muszą mieć jednakową składową wektora falowego równoległą do granic warstw \mathbf{k}_\parallel oraz jednakową pulsację ω . Wektor falowy w j -tej warstwie można zatem zapisać jako

$$\mathbf{k}^{(j)} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z^{(j)} \mathbf{e}_z. \quad (3.15a)$$

W każdej warstwie wektory falowe zszywanych fal spełniają zależność dyspersyjną

$$\mathbf{k}^{(j)2} = \frac{n_{(j)}^2 \omega^2}{c^2}. \quad (3.15b)$$

Stąd, jedynie trzy spośród parametrów fali $k_x, k_y, k_z^{(j)}, \omega$ są niezależne. Załóżmy, że źródło promieniowania znajduje się w warstwie $j = 0$. Wygodnie jest wówczas traktować jako niezależne składowe wektora falowego $\mathbf{k} \equiv \mathbf{k}^{(0)}$. Wyznaczają one jednoznacznie pulsację modu³:

$$\omega_k = \frac{c}{n_{(0)}} \sqrt{\mathbf{k}^2} \quad (3.16a)$$

oraz składowe wektorów falowych w pozostałych warstwach struktury:

$$k_z^{(j)} = \pm \sqrt{\frac{n_{(j)}^2}{n_{(0)}^2} \mathbf{k}^2 - k_\parallel^2}. \quad (3.16b)$$

² Wektory związane z polem magnetycznym oznaczane będą indeksem górnym H, którego nie należy mylić ze sprzężeniem hermitowskim, oznaczanym w tej pracy symbolem †. Wektory opisujące pole elektryczne są pozbawione takiego indeksu, gdyż rachunki oparte są głównie na nich i wprowadzenie dodatkowego indeksu wpłynęło by niekorzystnie na czytelność wzorów.

³ Wprawdzie związek dyspersyjny (3.15b) nie określa znaku pulsacji, ale bez utraty ogólności można ten znak wybrać dowolnie.

Wybór znaku składowej $k_z^{(j)}$ przy $j \neq 0$ jest w zasadzie dowolny, ale ma on wpływ na wygodę opisu pola. Aby opis ten był możliwie najbardziej jednolity, jeżeli $k_z^{(j)}$ jest rzeczywiste, wówczas należy wybrać znak taki, jaki ma część rzeczywista lub urojona k_z (zależnie od tego, która z nich ma niezerową wartość), zaś gdy jest urojone – wówczas należy wybrać taki znak, jaki ma indeks j . W niniejszej pracy przyjęta jest właśnie ta konwencja⁴.

Rozwiązanie równań Maxwella w rozważanej strukturze warstwowej można znaleźć zapisując amplitudę pola prostopadłego do płaszczyzny padania (tj. elektrycznego dla polaryzacji TE albo magnetycznego dla polaryzacji TM) wewnątrz j -tej warstwy w postaci⁵

$$a_j e^{ik^{(j)} \cdot r} + b_j e^{ik_*^{(j)} \cdot r}. \quad (3.17)$$

Warunki ciągłości pola pomiędzy amplitudami fal w dwóch sąsiednich warstwach można zapisać w postaci równania macierzowego⁶

$$\begin{pmatrix} a_{j+1} \\ b_{j+1} \end{pmatrix} = m_{j+1,j} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

gdzie $m_{j+1,j}$ jest macierzą 2×2 zdefiniowaną jako:

$$m_{j+1,j} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K_j^+ \exp(ik_z^{(j)} L_z^{(j)}) & K_j^- \exp(-ik_z^{(j)} L_z^{(j)}) \\ K_j^- \exp(ik_z^{(j)} L_z^{(j)}) & K_j^+ \exp(-ik_z^{(j)} L_z^{(j)}) \end{pmatrix}, \quad (3.19a)$$

a współczynniki K_j^\pm zależą od polaryzacji i składowych $k_z^{(j)}$ oraz $k_z^{(j+1)}$ w następujący sposób:

$$K_j^\pm = 1 \pm \left(\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(j+1)}^2}{n_{(j)}^2} \right) \frac{k_z^{(j)}}{k_z^{(j+1)}}. \quad (3.19b)$$

Amplitudy fal w dowolnych warstwach j -tej i i -tej przy $j > i$ można zatem powiązać równaniem:

$$\begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix} = m_{j,i} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}, \quad (3.20a)$$

przy czym macierz $m_{j,i}$ otrzymuje się jako złożenie macierzy dla par sąsiednich warstw:

$$m_{j,i} = m_{j,j-1} \dots m_{i+2,i+1} m_{i+1,i}. \quad (3.20b)$$

⁴ Wybór ten zapewnia, że we wszystkich warstwach, w których wektory falowe $\mathbf{k}^{(j)} \in \mathbb{R}^3$ ich składowe $k_z^{(j)}$ mają taki sam znak, a w warstwach, w których składowe $k_z^{(j)} \in i\mathbb{R}$, wektory falowe opisują fale niejednorodne o amplitudach malejących z odległością od warstwy $j = 0$, co szczególnie upraszcza opis pola w obszarach zewnętrznych.

⁵ Zastosowana metoda opisu pola za pomocą macierzy przejścia została zaczerpnięta z prac Yeh'a i innych [66, 67].

⁶ Stosowane wielkości są funkcjami wektora falowego i polaryzacji, jednak, dla poprawy czytelności wzorów, zależności te nie będą jawnie wypisywane, poza przypadkami, w których będą one istotne.

Wyznacznik tej macierzy jest równy

$$\det m_{j,i} = \left(\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(j)}^2}{n_{(i)}^2} \right) \frac{k_z^{(i)}}{k_z^{(j)}}. \quad (3.20c)$$

Wynika stąd, że każda macierz $m_{j,i}$ jest nieosobliwa. Odwracając związek (3.20a) otrzymuje się

$$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = w_{i,j} \begin{pmatrix} a_j \\ b_j \end{pmatrix}, \quad (3.21a)$$

gdzie macierz

$$w_{i,j} = m_{j,i}^{-1}. \quad (3.21b)$$

3.2.1. Warstwy o zerowej szerokości

Zgodnie z przyjętą definicją, $m_{j+1,j}$ oznacza macierz wiążącą amplitudy fal w warstwach j -tej i $(j+1)$ -wszej. Umieścimy pomiędzy tymi warstwami dodatkową warstwę o dowolnym współczynniku załamania i szerokości L' , nie zmieniając indeksów. Niech $m'_{j+1,j}$ oznacza macierz ciągłości po tej operacji. Wtedy

$$\lim_{L' \rightarrow 0} m'_{j+1,j} = m_{j+1,j}. \quad (3.22)$$

Oznacza to, że warstwy o zerowej szerokości nie mają wpływu na fizyczne właściwości struktury (tak jak być powinno), natomiast można je swobodnie wykorzystywać w obliczeniach wszędzie tam, gdzie ich zastosowanie byłoby wygodne lub upraszczałoby zagadnienie.

3.2.2. Grupa macierzy przejścia

Niech $\mathcal{T}_{2 \times 2}$ będzie następującym zbiorem macierzy zespolonych o wymiarze 2×2 :

$$\mathcal{T}_{2 \times 2} = \left\{ m \in \mathbb{C}_{2 \times 2} : m = \begin{pmatrix} D^* & B \\ B^* & D \end{pmatrix}, B, D \in \mathbb{C} \wedge \det m = 1 \right\}, \quad (3.23)$$

tj. zbiorem macierzy unimodularnych, których elementy położone na przekątnych są swoimi sprzężeniami. Jest oczywistym, że element neutralny mnożenia macierzy, macierz jednostkowa $1 \in \mathcal{T}_{2 \times 2}$. Niech $m_1 \in \mathcal{T}_{2 \times 2}$ oraz $m_2 \in \mathcal{T}_{2 \times 2}$. Iloczyn tych macierzy $m_1 m_2 \in \mathcal{T}_{2 \times 2}$. Ponadto, istnieje macierz m_1^{-1} , gdyż wszystkie macierze w $\mathcal{T}_{2 \times 2}$ są nieosobliwe, co więcej, $m_1^{-1} \in \mathcal{T}_{2 \times 2}$. Zatem, zbiór macierzy $\mathcal{T}_{2 \times 2}$ wraz ze zwyczajnym mnożeniem macierzowym tworzą grupę, którą będziemy oznaczać po prostu $\mathcal{T}_{2 \times 2}$.

Jeżeli $k_z^{(j)} \in \mathbb{R}$ i $n_{(j+2)} = n_{(j)}$, wówczas macierz $m_{j+2,j} \in \mathcal{T}_{2 \times 2}$. Ponieważ każdą warstwę kryształu fonicznego można otoczyć warstwami o zerowej szerokości i współczynniku

załamania $n_{(i)}$, wynika stąd, że (przy $j > i$)

$$k_z^{(i)} \in \mathbb{R} \wedge n_{(i)} = n_{(j)} \Rightarrow m_{j,i} \in \mathcal{T}_{2 \times 2}. \quad (3.24)$$

Powyższe spostrzeżenie prowadzi także do wniosku, że dla dowolnych współczynników załamania warstw i -tej i j -tej elementy macierzy $m_{j,i}$ i $w_{i,j}$ spełniają:

$$k_z^{(i)}, k_z^{(j)} \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} (m_{j,i}^*)_{22} = (m_{j,i})_{11}, \\ (m_{j,i}^*)_{21} = (m_{j,i})_{12}, \\ (w_{i,j}^*)_{22} = (w_{i,j})_{11}, \\ (w_{i,j}^*)_{21} = (w_{i,j})_{12}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Tożsamości te okażą się przydatne w badaniu związków pomiędzy modami różnych warstw struktury w rozdziale 4.5.

3.2.3. Przepływ energii pola elektromagnetycznego

Pole elektromagnetyczne o postaci (3.17) przenosi energię w kierunku określonym przez część rzeczywistą wektora Poyntinga (3.9). Przez jednostkową powierzchnię granicy warstw przepływa strumień energii pola

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ \bar{S}_z \} &= \frac{\operatorname{Re} \{ k_z^{(j)} \}}{2\mu_0\omega_k} \left(|a_j|^2 \exp(-2\operatorname{Im} \{ k_z^{(j)} \} z^{(j)}) - |b_j|^2 \exp(2\operatorname{Im} \{ k_z^{(j)} \} z^{(j)}) \right) \\ &\quad - \frac{\operatorname{Im} \{ k_z^{(j)} \}}{\mu_0\omega_k} \operatorname{Im} \{ a_j b_j^* \exp(2i\operatorname{Re} \{ k_z^{(j)} \} z^{(j)}) \} \left(\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{k_{\parallel}^2 - |k_z|^2}{|\mathbf{k}|^2} \right). \end{aligned} \quad (3.26a)$$

W rozważanym przypadku składowa $k_z^{(j)}$ może być rzeczywista albo urojona. Jeżeli jest ona rzeczywista, wówczas składowa \bar{S}_z wektora Poyntinga ma część rzeczywistą

$$\frac{\operatorname{Re} \{ k_z^{(j)} \}}{2\mu_0\omega_k} (|a_j|^2 - |b_j|^2). \quad (3.26b)$$

Jeżeli amplitudy fal są równe co do wartości bezwzględnej, wówczas nie występuje przepływ energii w kierunku z – pole elektromagnetyczne ma w tym kierunku postać fali stojącej. Natomiast gdy składowa $k_z^{(j)}$ jest urojona, wtedy część rzeczywista \bar{S}_z jest postaci

$$- \frac{\operatorname{Im} \{ k_z^{(j)} \}}{\mu_0\omega_k} \operatorname{Im} \{ a_j b_j^* \} \left(\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{k_{\parallel}^2 - |k_z|^2}{|\mathbf{k}|^2} \right). \quad (3.26c)$$

Jak widać, jeżeli obydwie amplitudy a_j i b_j są niezerowe, wówczas ma miejsce przepływ energii w kierunku z , a zatem fale niejednorodne w ogólności także mogą przenosić energię w kierunku

ku, w którym składowa wektora falowego jest urojona [91], czyli w rozważanym przypadku prostopadle do granic warstw.

3.3. Odbicie fali płaskiej od struktury warstwowej

3.3.1. Jednorodne fale płaskie

Macierz $m_{j,i}$ lub $w_{i,j}$, zdefiniowana wyrażeniem (3.21b), pozwala w prosty sposób znaleźć współczynnik odbicia jednorodnej fali płaskiej od struktury złożonej z pewnej liczby warstw. Odbicie tego typu jest tematem poruszonym w każdej pozycji traktującej o podstawach elektrodynamiki, np. [87–91], nie będziemy zatem analizować szczegółowo tego zagadnienia. Jak wiadomo, pojedyncza fala płaska o rzeczywistym wektorze falowym przenosi energię w kierunku tego wektora, zatem falę padającą należy zszyć z falą odbitą, która odpowiada za częściowe rozproszenie energii, oraz falą załamana, która zapewnia ciągłość przepływu energii przez granicę. Za pomocą macierzy przejścia można zapisać, dla fali padającej z warstwy $j = 0$ na jej „prawą” granicę:

$$\begin{pmatrix} a_R \\ 0 \end{pmatrix} = m_{R,0} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \quad (3.27a)$$

oraz na „lewą”:

$$\begin{pmatrix} a_L \\ 0 \end{pmatrix} = w_{L,0} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}. \quad (3.27b)$$

Wynikają stąd wyrażenia na współczynniki odbicia

$$r_R = -\frac{(m_{R,0})_{21}}{(m_{R,0})_{22}} e^{-2ik_z L_z}, \quad (3.28a)$$

gdzie $L_z \equiv L_z^{(0)}$ oznacza szerokość warstwy $j = 0$, oraz⁷

$$r_L = -\frac{(w_{L,0}(\mathbf{k}_*))_{21}}{(w_{L,0}(\mathbf{k}_*))_{22}}. \quad (3.28b)$$

3.3.2. Niejednorodne fale płaskie

Pojedyncza niejednorodna fala płaska nie przenosi energii w kierunku, któremu odpowiada urojona składowa wektora falowego – w rozważanym przypadku jest to kierunek z , prostopadły do granicy między ośrodkami. Dlatego, jej naturalnym dopełnieniem w drugim ośrodku jest albo pojedyncza fala niejednorodna, albo dwie jednorodne fale płaskie tworzące falę stoją-

⁷ Współczynniki odbicia zdefiniowane są tak, aby były funkcjami częstotliwości i kąta padania na odpowiednią granicę warstwy – stąd $w_{L,0}(\mathbf{k}_*)$ w definicji $r_L(\mathbf{k})$.

ca. W takim przypadku nie pojawia się natomiast fala odbita, która spowodowałaby przepływ energii. Związki pomiędzy amplitudami mają więc postać, odpowiednio:

$$\begin{pmatrix} a_R \\ b_R \end{pmatrix} = m_{R,0} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.29a)$$

lub

$$\begin{pmatrix} a_L \\ b_L \end{pmatrix} = w_{L,0} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.29b)$$

W tej sytuacji zadanie amplitudy a_0 jednoznacznie określa pole we wszystkich warstwach struktury, bez żadnych dodatkowych zabiegów⁸.

3.3.3. Transformacja odbicia wektora falowego

Rozpatrzmy jak transformacja $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_*$, zdefiniowana równaniem (3.14), wpływa na macierz warunków ciągłości dla pary sąsiednich warstw $m_{j+1,j}$. Składowe wektora \mathbf{k} zostały wybrane jako niezależne parametry modu, a zatem składowe wektorów falowych w pozostałych warstwach $\mathbf{k}^{(j)}$ są przez nie zdefiniowane. Składowa k_{\parallel} jest zachowana we wszystkich warstwach, natomiast składowa $k_z^{(j)}$ jest określona wyrażeniem (3.16b) i dotyczy jej przyjęta reguła wyboru znaku, skąd wynika, że zmiana znaku składowej $k_z^{(j)}$ następuje we wszystkich warstwach, w których $k_z^{(j)} \in \mathbb{R}$, zaś jeżeli składowa ta jest urojona, wtedy znak nie zmienia się. Transformacji $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_*$ towarzyszy zatem zamiana $\mathbf{k}^{(j)} \rightarrow \mathbf{k}_*^{(j)*}$. Wynika stąd, że:

$$m_{j+1,j}(\mathbf{k}_*) = \begin{cases} m_{j+1,j}^*(\mathbf{k}), & \text{gdy } j \notin \{-1, 0\} \text{ lub } k_z \in \mathbb{R}, \\ m_{1,0}^*(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{gdy } j = 0 \text{ i } k_z \in i\mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} m_{0,-1}^*(\mathbf{k}), & \text{gdy } j = -1 \text{ i } k_z \in i\mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.30a)$$

Dla dowolnych warstw j oraz i , przy $j > i$:

$$m_{j,i}(\mathbf{k}_*) = \begin{cases} m_{j,i}^*(\mathbf{k}), & \text{gdy } k_z \in \mathbb{R} \text{ lub } i > 0 \text{ lub } j < 0 \text{ lub } j > 0 > i, \\ m_{j,0}^*(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{gdy } i = 0 \text{ i } k_z \in i\mathbb{R}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} m_{0,i}^*(\mathbf{k}), & \text{gdy } j = 0 \text{ i } k_z \in i\mathbb{R} \end{cases} \quad (3.30b)$$

⁸ W przypadku fali jednorodnej należy uwzględnić wielokrotne odbicia od granic warstwy, natomiast dla fali niejednorodnej, z uwagi na brak fali odbitej, nie ma to miejsca.

oraz

$$w_{i,j}(\mathbf{k}_*) = \begin{cases} w_{i,j}^*(\mathbf{k}), & \text{gdy } k_z \in \mathbb{R} \text{ lub } i > 0 \text{ lub } j < 0 \text{ lub } j > 0 > i, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_{0,j}^*(\mathbf{k}), & \text{gdy } i = 0 \text{ i } k_z \in i\mathbb{R}, \\ w_{i,0}^*(\mathbf{k}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \text{gdy } j = 0 \text{ i } k_z \in i\mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.30c)$$

Ze związków (3.30) i z definicji współczynników odbicia dla fal o rzeczywistych wektorach falowych (3.28) wynika, że

$$k_z \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad r_R(\mathbf{k}_*) = r_R^*(\mathbf{k}), \quad r_L(\mathbf{k}_*) = r_L^*(\mathbf{k}). \quad (3.31)$$

Jest to ważny wniosek, który zostanie wykorzystany w rozdziale 4 przy wyprowadzeniu wyrażenia opisującego rozkłady pola w strukturze.

3.3.4. Związki pomiędzy współczynnikami odbicia w różnych warstwach

Macierz przejścia pozwala powiązać ze sobą współczynniki odbicia w dwóch różnych warstwach, 0-wej i J -tej. Przyjmijmy dla ustalenia uwagi $J > 0$. Wielkości i funkcje związane z warstwą 0-wą oznaczane będą w dotychczasowy sposób, a związane z J -tą warstwą – opatrzone primem, np. $m'_{R,J}$ czy r'_R . Ponieważ zdefiniowany został jedynie współczynnik odbicia dla fali płaskiej o rzeczywistym wektorze falowym, poniżej przedstawione rachunki są przeprowadzone dla $k_z, k'_z \in \mathbb{R}$.

Macierz $m_{R,0} = m_{R,J}m_{J,0}$, a współczynniki odbicia od prawej granicy warstwy dane są wzorami

$$r_R = -\frac{(m_{R,0})_{21}}{(m_{R,0})_{22}} e^{-2ik_z L_z}, \quad r'_R = -\frac{(m_{R,J})_{21}}{(m_{R,J})_{22}} e^{-2ik'_z L'_z}, \quad (3.32)$$

zatem, po prostych przekształceniach:

$$r'_R e^{2ik'_z L'_z} = \frac{(m_{J,0})_{21} + (m_{J,0})_{22} r_R e^{2ik_z L_z}}{(m_{J,0})_{11} + (m_{J,0})_{12} r_R e^{2ik_z L_z}}. \quad (3.33)$$

Podobny związek można otrzymać dla współczynników odbicia od lewej granicy warstwy:

$$r_L = -\frac{(w_{L,0})_{21}^*}{(w_{L,0})_{22}^*}, \quad r'_L = -\frac{(w'_{L,J})_{21}^*}{(w'_{L,J})_{22}^*}, \quad (3.34)$$

gdzie $w'_{L,J} = w_{L,0} w'_{0,J}$. Dla $0 \leq j \leq J$

$$m'_{j+1,j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} m_{j+1,j}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.35a)$$

stąd również

$$m'_{j,i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} m_{j,i}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.35b)$$

dla $0 \leq i < j \leq J$. Ponieważ $w_{L,0} = w'_{L,0} = w'_{L,J} m'_{J,0}$:

$$r'_L = \frac{(m_{J,0})_{12} + (m_{J,0})_{11} r_L}{(m_{J,0})_{22} + (m_{J,0})_{21} r_L}. \quad (3.36)$$

Z przedstawionych obliczeń wynika, że spełnione jest równanie:

$$r'_L r'_R e^{2ik'_z L'_z} = \frac{(m_{J,0})_{12} + (m_{J,0})_{11} r_L}{(m_{J,0})_{22} + (m_{J,0})_{21} r_L} \frac{(m_{J,0})_{21} + (m_{J,0})_{22} r_R e^{2ik_z L_z}}{(m_{J,0})_{11} + (m_{J,0})_{12} r_R e^{2ik_z L_z}}. \quad (3.37)$$

Równość ta zostanie wykorzystana w rozdziale 4.5.1 przy badaniu związków pomiędzy modami prowadzonymi różnych warstw⁹.

Definicje i wyrażenia wyprowadzone w całym rozdziale 3 stanowią podstawę konstrukcji modelu efektywnego rezonatora (będącej przedmiotem rozdziału 4) lub istotny element dowodów jego własności matematycznych.

⁹ Konkretniej, do pokazania, że mody prowadzone różnych warstw pokrywają się ze sobą.

4. Model efektywnego rezonatora

Atom umieszczony *wewnątrz* kryształu fotonicznego emituje promieniowanie *wewnątrz* konkretnej warstwy, w której się znajduje i dla której można przyjąć indeks $j = 0$. Pozostałe warstwy zadają warunki brzegowe, które wpływają na postać modów struktury, a przez to także na przebieg aktu emisji. Można stwierdzić, że dla emitującego promieniowanie atomu warstwa $j = 0$ jest rezonatorem o zwierciadłach ze współczynnikami odbicia r_L i r_R , zależnymi od częstotliwości i polaryzacji (rys. 4.1), które można obliczyć metodą opisaną w poprzednim rozdziale. Jest to istota modelu efektywnego rezonatora, utworzonego według pomysłu autora rozprawy. Zbliżone podejście było znane już wcześniej i zostało opisane np. w [81, 82], jednak przedstawiony w niniejszej pracy model jest o wiele bogatszy – przede wszystkim wiążą się z nim definicje wielkości charakteryzujących własności fizyczne struktury. Szczegółowy opis tego modelu jest tematem poniższego rozdziału. Został on także opublikowany przez autora rozprawy w pracach [71–73, 75–79].

4.1. Pole elektromagnetyczne we wnęce rezonansowej

Elementarne rozwiązanie równań Maxwella wewnątrz planarnego rezonatora ze zwierciadłami o współczynnikach odbicia r_R z prawej strony i r_L z lewej można znaleźć na drodze następującego rozumowania. Załóżmy, że w rezonatorze pobudzona zostanie fala płaska o wektorze falowym \mathbf{k} , polaryzacji ϵ i natężeniu pola elektrycznego

$$a_0^{(0)} \mathbf{e}_{k\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (4.1)$$

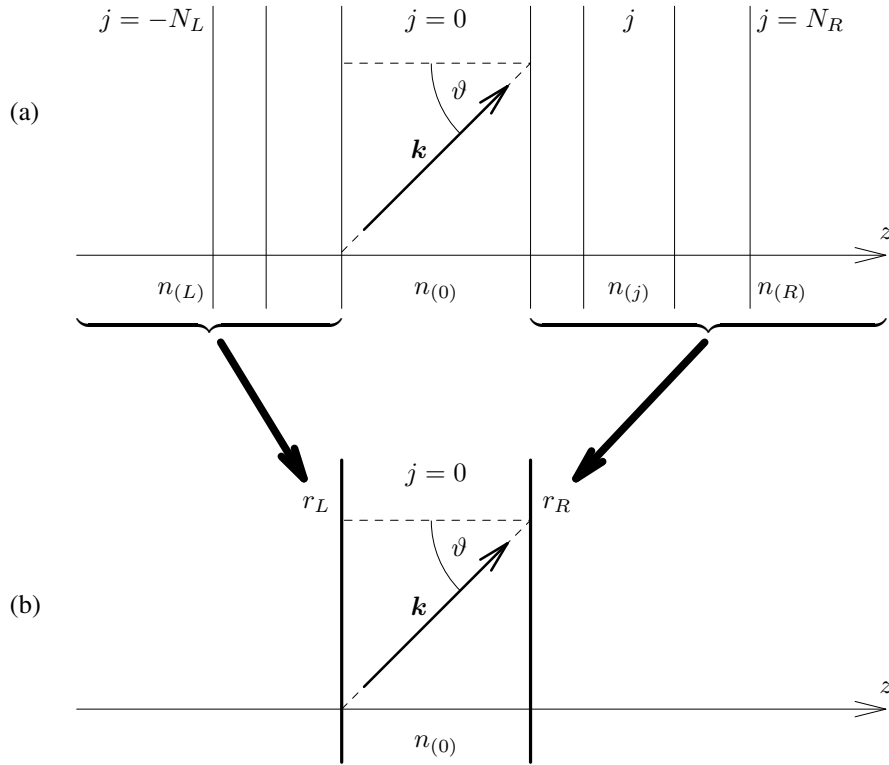
Rozważmy w pierwszej kolejności fale o rzeczywistych wektorach falowych: $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$. Wówczas, aby mogły być spełnione warunki brzegowe, należy uwzględnić kolejne fale odbite od zwierciadeł – złożenie tych fal wraz z falą pobudzoną doprowadzi do szukanego rozkładu pola. Odbicie pierwotnej fali od prawego zwierciadła powoduje pojawienie się fali odbitej

$$b_0^{(0)} \mathbf{e}_{k_*\epsilon} e^{i\mathbf{k}_*\cdot\mathbf{r}}, \quad b_0^{(0)} = r_R a_0^{(0)} e^{2ik_z L_z}. \quad (4.2)$$

Ta fala odbija się z kolei od lewego zwierciadła, co prowadzi do pojawienia się fali¹

$$a_0^{(1)} \mathbf{e}_{k\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad a_0^{(1)} = r_L b_0^{(0)}. \quad (4.3)$$

¹ W wyrażeniu na amplitudę $a_0^{(1)}$ pojawia się współczynnik $r_L(\mathbf{k})$, ponieważ został on zdefiniowany za pomocą macierzy $w_{L,0}(\mathbf{k}_*)$.



Rys. 4.1. Koncepcja modelu efektywnego rezonatora: (a) model struktury wielowarstwowej, (b) efektywna wnęka rezonansowa.

Odbicia te postępują tworząc nieskończony szereg fal płaskich. Nie są to jednak wszystkie przyczynki do całkowitego pola wewnątrz rezonatora, a jedynie połowa. Pozostałe fale płaskie, które należy uwzględnić w sumowaniu, pojawiają się wskutek odbicia pierwotnej fali od lewego zwierciadła. Odbicie to powoduje pojawienie się fali płaskiej

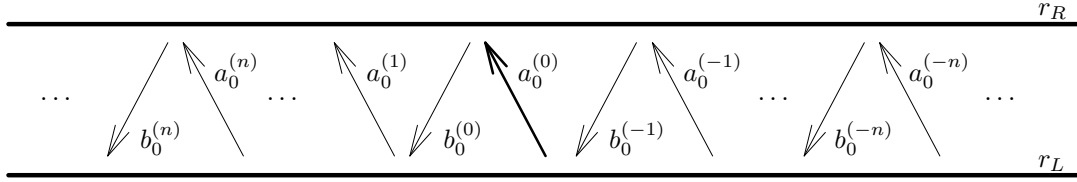
$$b_0^{(-1)} e_{k_* \epsilon} e^{i k_* \cdot r}, \quad b_0^{(-1)} = r_L(\mathbf{k}_*) a_0^{(0)}. \quad (4.4)$$

Następnie, odbicie tej fali płaskiej od prawego zwierciadła wytwarza kolejną falę płaską

$$a_0^{(-1)} e_{k \epsilon} e^{i k \cdot r}, \quad a_0^{(-1)} = r_R(\mathbf{k}_*) b_0^{(-1)} e^{-2i k_z L_z}. \quad (4.5)$$

Dalsze odbicia prowadzą do pozostałych fal płaskich, które należy uwzględnić w sumowaniu – patrz rys. 4.2. Łatwo zauważyć, że amplitudy fal odbitych tworzą szeregi geometryczne i można zapisać ogólnie:

$$\frac{a_0^{(n)}}{a_0^{(0)}} = \begin{cases} \left(r_L r_R e^{2i k_z L_z} \right)^n, & \text{gdy } n \geq 0, \\ \left(r_L^* r_R^* e^{-2i k_z L_z} \right)^n, & \text{gdy } n < 0, \end{cases} \quad \frac{b_0^{(n)}}{a_0^{(0)}} = \begin{cases} r_R e^{2i k_z L_z} a_0^{(n)} / a_0^{(0)}, & \text{gdy } n \geq 0, \\ r_L^* a_0^{(n+1)} / a_0^{(0)}, & \text{gdy } n < 0. \end{cases} \quad (4.6)$$



Rys. 4.2. Fale płaskie we wnętrzu rezonansowej: pobudzająca (wyfuszczona) oraz odbite.

Wszystkie rozważone fale płaskie składają się ostatecznie na rozkład pola postaci

$$a_0 \mathbf{e}_{k\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + b_0 \mathbf{e}_{k^*\epsilon} e^{i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{r}}, \quad (4.7a)$$

gdzie

$$a_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_0^{(n)}, \quad b_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_0^{(n)}. \quad (4.7b)$$

Tak otrzymane pole elektryczne w rezonatorze można przepisać w nieco innej postaci za pomocą dwóch wielkości zdefiniowanych poprzez: współczynnik odbicia, szerokość warstwy L_z i składową k_z . Ponieważ wybór amplitudy początkowej fali jest w zasadzie dowolny i w ośrodku liniowym nie wpływa na postać wyniku, można potraktować ją jako stałą normalizacyjną $a_0^{(0)} = \mathcal{N}_{k\epsilon}$, której wartość zostanie ustalona w dalszej kolejności. Pierwszą z definiowanych wielkości jest *widmo modowe* $\rho_\epsilon(\mathbf{k})$, dane przez wartość amplitudy a_0 :

$$\rho_\epsilon(\mathbf{k}) \equiv a_0 = \mathcal{N}_{k\epsilon} \frac{1 - |r_L r_R|^2}{|1 - r_L r_R e^{2ik_z L_z}|^2}, \quad (4.8a)$$

zaś drugą jest *współczynnik sprzężenia* $\xi_\epsilon(\mathbf{k})$, zdefiniowany jako

$$\xi_\epsilon(\mathbf{k}) \equiv \frac{b_0^*}{a_0^*} = \frac{r_R^* (1 - |r_L|^2) e^{-2ik_z L_z} + r_L (1 - |r_R|^2)}{1 - |r_L r_R|^2}. \quad (4.8b)$$

W ten sposób, w obszarze rezonatora pole elektryczne modu o rzeczywistym wektorze falowym można zapisać jako

$$\rho_\epsilon(\mathbf{k}) \left(\mathbf{e}_{k\epsilon} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \xi_\epsilon^*(\mathbf{k}) \mathbf{e}_{k^*\epsilon} e^{i\mathbf{k}^*\cdot\mathbf{r}} \right). \quad (4.9)$$

Należy teraz rozpatrzeć drugą możliwość, tj. przypadek, gdy wektor falowy fali (4.1) ma urojoną składową prostopadłą do granic warstw: $k_z \in i\mathbb{R}$. W takim przypadku, zgodnie z ustaleniami dokonanyymi w podrozdziale 3.3.2, nie występują fale odbite, w efekcie czego fala pobudzająca jednoznacznie wyznacza pole we wnętrzu. Dla modów tych również można zastosować zapis (4.9), jednakże, z uwagi na brak odbić, widmo modowe pełni w nim wyłącznie rolę stałej normalizacyjnej $\rho_\epsilon(\mathbf{k}) = \mathcal{N}_{k\epsilon}$, a współczynnik sprzężenia $\xi_\epsilon(\mathbf{k}) = 0$.

4.1.1. Normalizacja widma modowego

Z definicji widma modowego wynika, że jest to wielkość proporcjonalna do stosunku amplitud $a_0/a_0^{(0)}$, czyli amplitudy odpowiedzi rezonatora do amplitudy pobudzenia. Widmo modowe odpowiada zatem dobroci rezonatora dla każdego modu z osobna – pozwala określić, czy dla danego modu występuje silny rezonans, tłumienie pola, czy też może wpływ rezonatora jest mało istotny. Jak zauważył Purcell [2], zachodzącemu rezonansowi odpowiada zwiększeniu liczby oscylatorów, tj. gęstości stanów (modów) pola, które biorą udział w procesie relaksacji atomu, dzięki czemu może ona zachodzić znacznie szybciej, niż w wolnej przestrzeni. Interpretacja ta pozwala zatem stwierdzić, że w takim wypadku widmo modowe opisuje ilość stanów pola przypadających na infimezymalny fragment przestrzeni fazowej wokół danego wektora falowego i dla danej polaryzacji. W efekcie, wzorując się na metodzie „zliczania modów” [84], można zapostulować następujący związek pomiędzy gęstością stanów $D(k)$ (przy $k \equiv |\mathbf{k}|$) a widmem modowym:

$$D(k)dk = \left(\sum_{\epsilon} \int d\Omega \rho_{\epsilon}(\mathbf{k}) \right) k^2 dk. \quad (4.10)$$

W nieograniczonej próżni widmo modowe ma stałą wartość równą przyjętej normalizacji $\rho^{\text{fs}} = \mathcal{N}_{k\epsilon}$, zaś gęstość stanów w takim przypadku

$$D^{\text{fs}}(k) = \frac{k^2}{\pi^2}. \quad (4.11)$$

Wyrażenie (4.10) prowadzi do właśnie takiego wyniku, jeżeli przyjąć

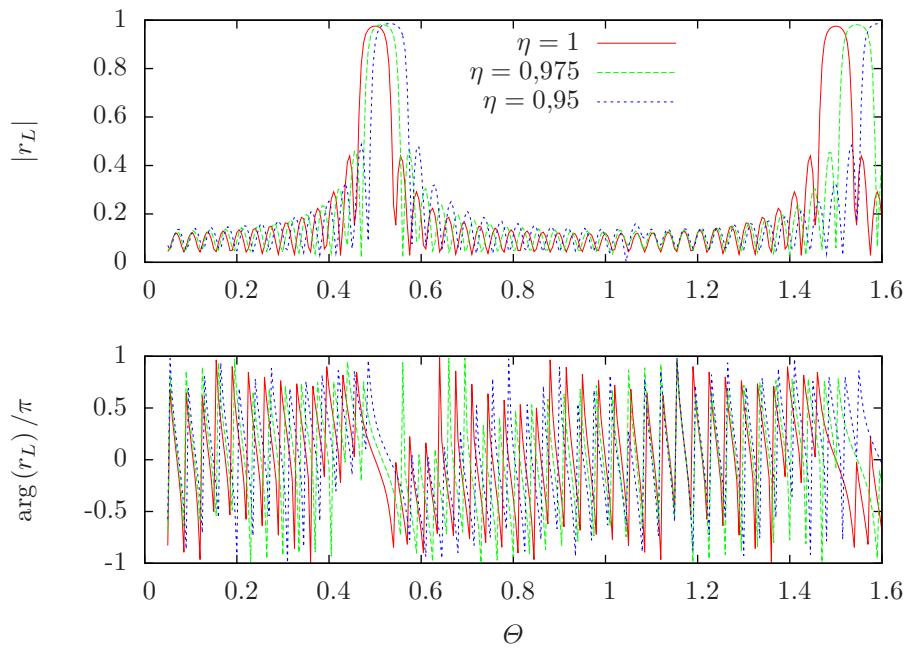
$$\mathcal{N}_{k\epsilon} = \frac{1}{8\pi^3}. \quad (4.12)$$

Wówczas, widmo modowe jest rzeczywiste i spełnia:

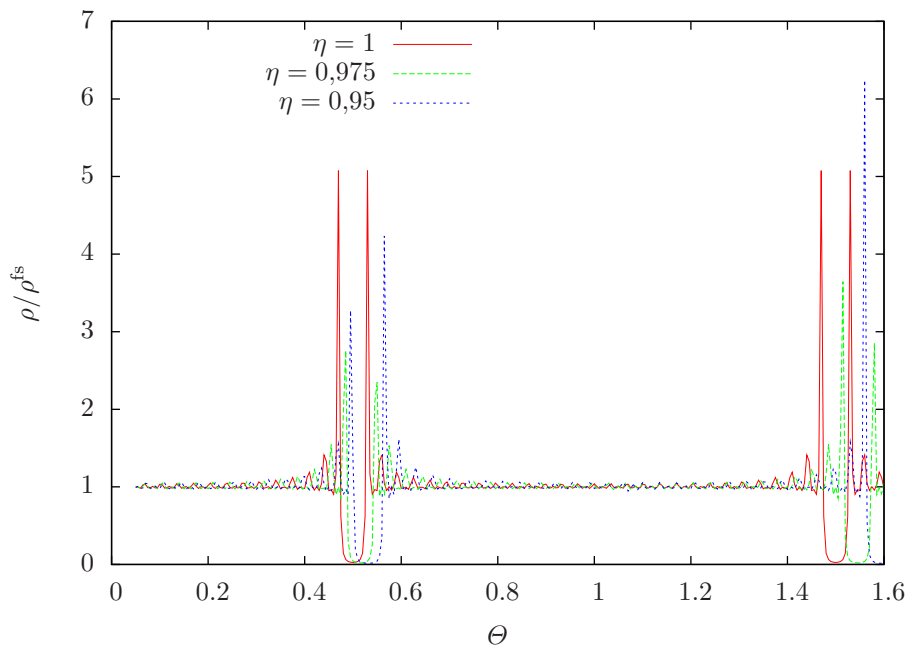
$$\rho_{\epsilon}(\mathbf{k}_*) = \rho_{\epsilon}(\mathbf{k}). \quad (4.13)$$

4.1.2. Widmo modowe a własności kryształu fotonicznego

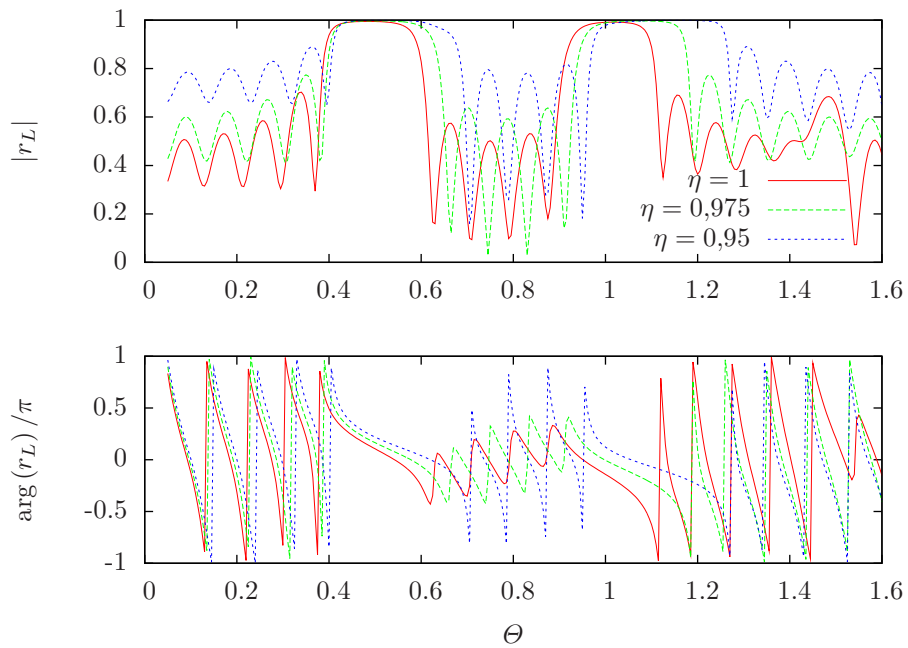
Z wykresów widma modowego można odczytać różne własności jednowymiarowego kryształu fotonicznego. Przede wszystkim, co można zaobserwować na rys. 4.3, rys. 4.4, rys. 4.5 oraz rys. 4.6, w strukturze tego typu występują przedziały częstotliwości, pokrywające się z przedziałami silnego odbicia fali przez granice warstwy, w których widmo modowe przyjmuje niskie wartości, co z kolei oznacza, że pole elektromagnetyczne jest silnie wygaszane – są to przerwy fotoniczne. Wymienione wykresy zostały wykonane dla kilku wartości η . Jak widać, ze zmianą kąta padania zakres przerwy fotonicznej ulega przemieszczeniu, tak samo jak przedziały silnego odbicia. Jest to związane z tym, że przerwy fotoniczne pojawiają się wówczas, gdy w jednym okresie struktury wzdłuż jej osi odkłada się całkowita wielokrotność długości fali Bragga λ_B . Przy normalizacji do szerokości optycznej komórki elementarnej zachodzi



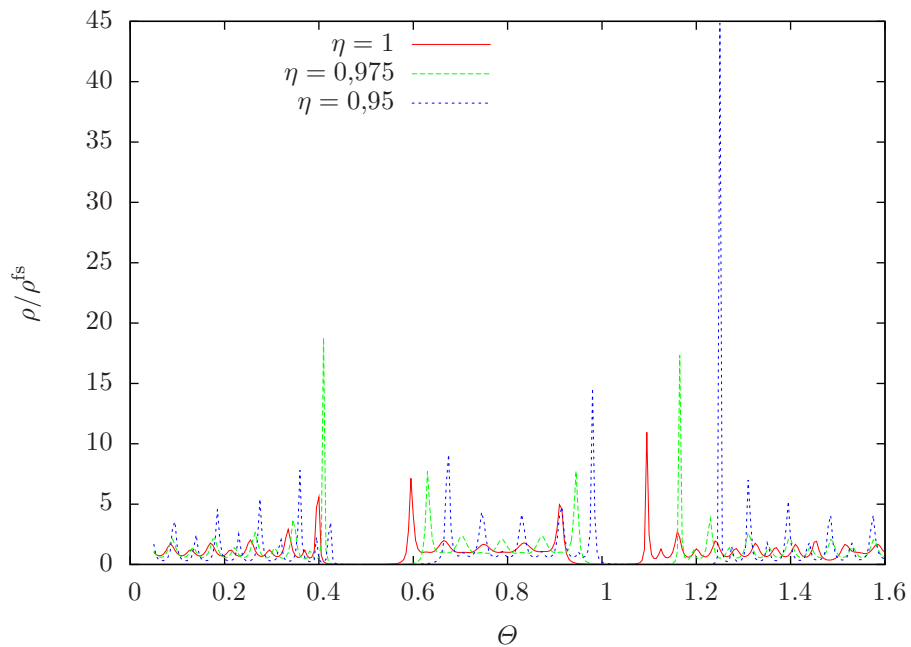
Rys. 4.3. Przykładowe charakterystyki współczynnika odbicia od lewej granicy warstwy dla różnych kątów padania.



Rys. 4.4. Przykładowe widmo modowe warstwy jednowymiarowego kryształu fotonicznego dla różnych kątów padania.



Rys. 4.5. Przykładowe charakterystyki współczynnika odbicia od lewej granicy warstwy dla różnych kątów padania.

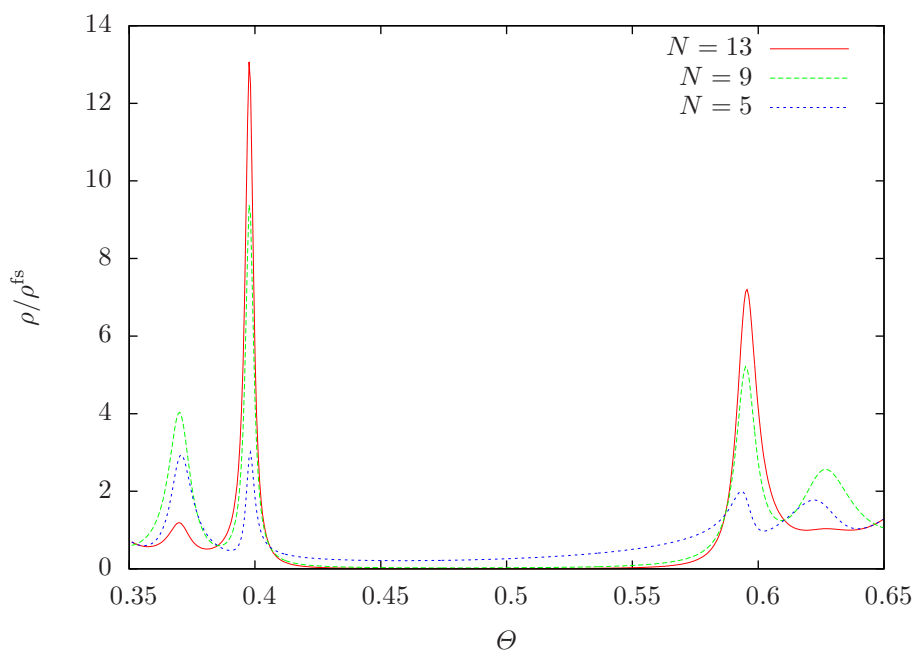


Rys. 4.6. Przykładowe widmo modowe warstwy jednowymiarowego kryształu fonicznego dla różnych kątów padania.

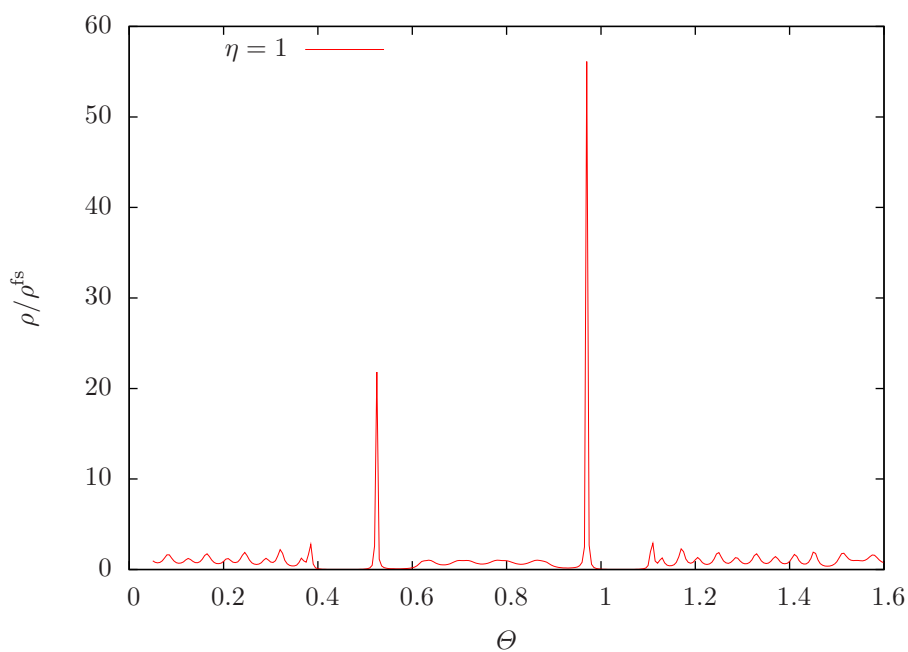
$\lambda_B/\Lambda = 2$, a odpowiadającą jej wartością znormalizowanej częstotliwości jest $\Theta_B = 0,5$. Wiadąc również, że na krańcach przerw fotonicznych wartości widma modowego są wysokie – jest to efekt przypominający „wypychanie” modów pola z przerw fotonicznych. Wykresy na rys. 4.4 zostały wykonane dla struktury o $\Lambda_1/\Lambda = 0,5$ oraz $n_1 = 1,4$ i $n_2 = 1,2$. Rys. 4.6 przedstawia wykresy dla $\Lambda_1/\Lambda = 0,65$ oraz $n_1 = 3$ i $n_2 = 1,6$. Na wykresach tych widać, że wraz ze wzrostem kontrastu współczynników załamania n_1/n_2 przerwy fotoniczne stają się coraz szersze. W szczególności, w strukturze charakteryzowanej na rys. 4.6 kontrast n_1/n_2 jest na tyle wysoki, że dla wszystkich wartości η odpowiadających modom innym niż prowadzone, przerwy fotoniczne częściowo się przekrywają i w efekcie tworzy się przerwa fotoniczna dla wszystkich tych modów. Można zaobserwować również inną ciekawą własność – na rys. 4.4, w przeciwieństwie do rys. 4.6, nie widać przerwy fotonicznej w okolicy $\Theta = 1$. Jest to cecha struktury, w której obydwie warstwy komórki elementarnej mają jednakową szerokość optyczną: $\Lambda_1 = \Lambda_2$, wówczas przerwy fotoniczne pojawiają się tylko w okolicach nieparzystych wielokrotności Θ_B .

Rzeczywiste ośrodki o strukturze kryształu fotonicznego są oczywiście skończonych rozmiarów, muszą zatem składać się ze skończonej liczby warstw. Nie jest więc zaskakujące, iż różne fragmenty struktury charakteryzują się różnymi własnościami. Między innymi, co przedstawiają wykresy na rys. 4.7, widma modowe takich samych warstw (o jednakowych szerokościach i współczynnikach załamania), ale umieszczonych w różnych odległościach od końca struktury, nie są jednakowe. W przypadku warstwy znajdującej się w środku struktury przerwa fotoniczna jest bardzo wyraźna, widmo modowe osiąga w niej bardzo niskie wartości, natomiast wysokie na jej krawędziach. W warstwach położonych bliżej krawędzi struktury wartości widma modowego stają się coraz bliższe wartości próżniowej ρ^{fs} . Wy tłumaczenie tego faktu jest proste – jest tak, gdyż w warstwach położonych blisko krańca struktury współczynnik odbicia od granicy warstwy po stronie bliskiej krańca jest mały, warstwy te są więc wnękami o niskiej dobroci i nie mogą znacząco wpływać na amplitudę pola.

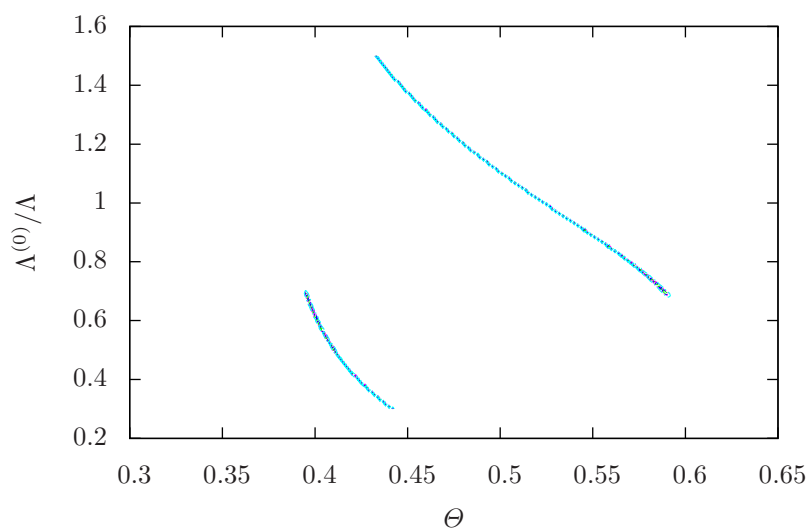
Istotną modyfikacją struktury kryształu fotonicznego jest wprowadzenie defektu do warstwy. Można dokonać tego modyfikując jej szerokość, jej współczynnik załamania lub obydwie te parametry. Widmo modowe struktury, dla której wykonany został wykres na rys. 4.6, ale z szerokością warstwy $j = 0$ taką, że $\Lambda^{(0)}/\Lambda = 1$, przedstawione jest na wykresie na rys. 4.8. Jak widać, efektem wprowadzenia defektu jest pojawienie się w każdej przerwie fotonicznej stanu dozwolonego dla pola, tzw. *modu defektowego*, przy jednoczesnym spadku wartości widma modowego na krańcach przerw. Częstotliwość modu defektowego zmienia się wraz z wielkością defektu (szerokością lub współczynnikiem załamania warstwy). Zależność taka, w przypadku zmiennej szerokości warstwy ($n_{(0)} = \text{const}$), obowiązująca dla struktury, dla której wykonano rys. 4.8, została wykreślona na rys. 4.9. Wykres ten został sporządzony w bardzo prosty sposób jako wykres konturowy widma modowego, który pokazuje tylko maksima odpowiadające modom defektowym. Jednakże, model efektywnego rezonatora, jako model analityczny, umożliwi opracowanie o wiele bardziej zaawansowanych metod badania modów defektowych.



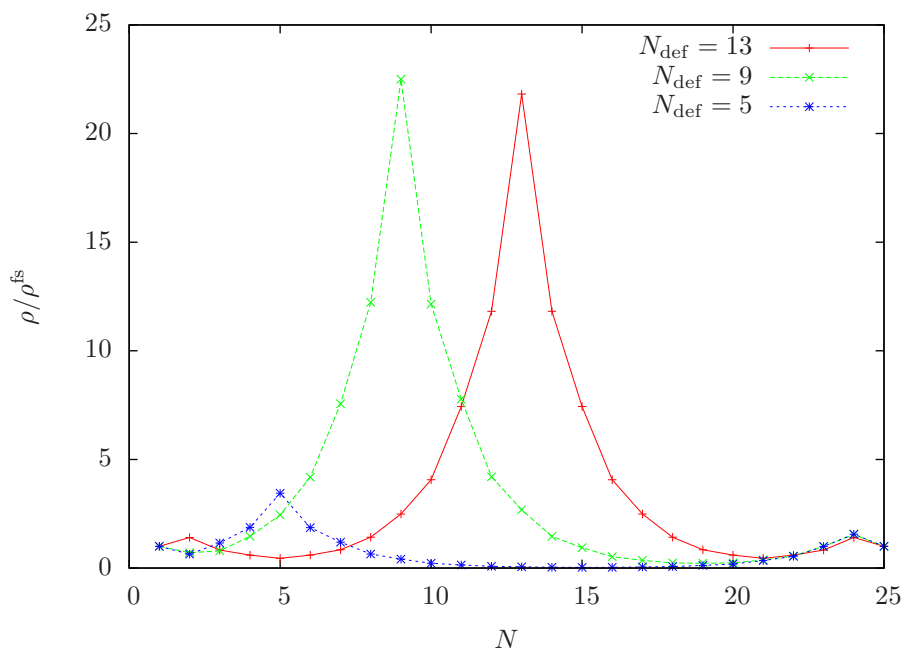
Rys. 4.7. Przykładowe widmo modowe warstw jednowymiarowego kryształu fonicznego w różnych fragmentach struktury (padanie prostopadłe).



Rys. 4.8. Przykładowe widmo modowe warstwy jednowymiarowego kryształu fonicznego z defektem.



Rys. 4.9. Częstotliwość modu defektowego w funkcji szerokości defektu.



Rys. 4.10. Przykładowe widmo modowe jednowymiarowego kryształu fonicznego z defektem w różnych warstwach jednowymiarowego kryształu fonicznego, dla defektu wprowadzonego w różnych warstwach.

Bardzo istotną cechą defektu jest to, że wywiera on wpływ na widmo modowe w pewnym ograniczonym obszarze, jedynie w warstwach położonych odpowiednio blisko warstwy z defektem. Ilustrację tego faktu można znaleźć na rys. 4.10 – widmo modowe przyjmuje wysokie (związane z istnieniem modu defektowego) wartości tylko w pewnej liczbie warstw w pobliżu warstwy zdefektowanej, co odpowiada lokalizacji pola modu wokół defektu. W pozostałych fragmentach struktury wprowadzony defekt nie powoduje istotnych efektów, co w szczególności oznacza brak znaczącej modyfikacji szybkości emisji spontanicznej. Daje się także zauważyć, że maksymalna wartość widma modowego dla modu defektowego znacznie maleje w pobliżu końca struktury – tak samo, jak wartości widma modowego na krańcach przerwy fotonicznej w kryształach bez defektów i z tego samego powodu: maleje moduł współczynnika odbicia po stronie bliższej końca kryształu fotonicznego, zatem maleje także dobroć wnęki (warstwy). Lokalizację pola można także badać studiując wykresy obwiedni pola elektrycznego, jak np. w pracach [82, 95], jednakże widmo modowe jest wygodniejsze do tego celu – szczególnie, w przypadku wielu defektów [95], gdy wpływają one wspólnie na częstotliwości modów defektowych, ponieważ częstotliwości te można odczytać wprost z wykresu widma modowego. Badaniu wpływu defektów za pomocą widma modowego poświęcona jest praca autora niniejszej rozprawy [73].

Poza defektami wprowadzonymi w sposób zamierzony, w rzeczywistej strukturze niechybnie pojawiają się przypadkowe defekty będące wynikiem niedoskonałości technologii jej wytworzenia. Analizę wpływu takich defektów na właściwości struktury przeprowadzoną w oparciu o widmo modowe można znaleźć w pracy autora rozprawy [74].

4.2. Mody pola elektromagnetycznego w modelu efektywnego rezonatora

Otrzymane rozwiązanie dla warstwy $j = 0$ można przedłużyć na całą strukturę za pomocą macierzy warunków ciągłości pola, otrzymując pełen rozkład pola modu. Powtarzając tę procedurę dla wszystkich wektorów falowych prowadzących do fizycznych (tj. normalizowalnych) rozwiązań i we wszystkich warstwach, wyznacza się wszystkie możliwe mody danej struktury. Z tego powodu, ponieważ nie zakłada się z góry jakichkolwiek relacji pomiędzy modami, model efektywnego rezonatora jest najogólniejszym możliwym modelem pola elektromagnetycznego w strukturze warstwowej.

Rozpatrzmy najpierw mody o rzeczywistym wektorze falowym $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Falom płaskim o wektorach falowych \mathbf{k} i \mathbf{k}_* w warstwie $j = 0$ odpowiadają w dowolnej j -tej warstwie fale o wektorach falowych $\mathbf{k}^{(j)}$ i $\mathbf{k}_*^{(j)}$, wyznaczone w sposób podany w roz. 3.2. Można zatem napisać pełne rozwiązanie dla pola elektrycznego w postaci:

$$\psi_{\mathbf{k}\epsilon}(\mathbf{r}) = \rho_\epsilon(\mathbf{k}) \sum_j \chi_j(z) \left(u_{j\mathbf{k}\epsilon} \mathbf{e}_{\mathbf{k}^{(j)}\epsilon} e^{i\mathbf{k}^{(j)} \cdot \mathbf{r}^{(j)}} + v_{j\mathbf{k}_*\epsilon} \mathbf{e}_{\mathbf{k}_*^{(j)}\epsilon} e^{i\mathbf{k}_*^{(j)} \cdot \mathbf{r}^{(j)}} \right). \quad (4.14)$$

Współczynniki $u_{jk\epsilon}$ i $v_{jk_*\epsilon}$ są zdefiniowane za pomocą równania:

$$\begin{pmatrix} u_{jk\epsilon} \\ v_{jk_*\epsilon} \end{pmatrix} = \left(\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(0)}}{n_{(j)}} \right) \begin{Bmatrix} m_{j,0} \\ w_{j,0} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_\epsilon^*(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

gdzie skrótowy zapis z nawiasami klamrowymi należy rozumieć następująco:

$$\begin{Bmatrix} m_{j,0} \\ w_{j,0} \end{Bmatrix} \equiv \begin{cases} m_{j,0}, & \text{dla } j \geq 0, \\ w_{j,0}, & \text{dla } j < 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

W szczególności $u_{0k\epsilon} = 1$ oraz $v_{0k_*\epsilon} = \xi_\epsilon(\mathbf{k})$. Współczynnik sprzężenia $\xi_\epsilon(\mathbf{k})$ pod wpływem transformacji $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_*$ ulega sprzężeniu zespolonemu:

$$\xi_\epsilon(\mathbf{k}_*) = \xi_\epsilon^*(\mathbf{k}), \quad (4.17)$$

zatem także

$$u_{jk_*\epsilon} = u_{jk\epsilon}^*, \quad v_{jk_*\epsilon} = v_{jk\epsilon}^*. \quad (4.18)$$

Pole modu sprzężonego poprzez transformację odbicia $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}_*$ ma zatem postać:

$$\psi_{k_*\epsilon}(\mathbf{r}) = \rho_\epsilon(\mathbf{k}) \sum_j \chi_j(z) \left(u_{jk\epsilon}^* \mathbf{e}_{k_*^{(j)*}\epsilon} e^{i\mathbf{k}_*^{(j)*} \cdot \mathbf{r}^{(j)}} + v_{jk\epsilon} \mathbf{e}_{k^{(j)*}\epsilon} e^{i\mathbf{k}^{(j)*} \cdot \mathbf{r}^{(j)}} \right). \quad (4.19)$$

Pole magnetyczne modu można otrzymać z wynikającego z równań Maxwella wzoru:

$$\boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}^H(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \times \boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}(\mathbf{r})}{i\mu_0\omega_k}, \quad (4.20a)$$

który prowadzi do:

$$\boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}^H(\mathbf{r}) = \frac{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}{\mu_0} \sum_j \chi_j(z) \left| \frac{\mathbf{k}^{(j)}}{\omega_k} \right| \left(u_{jk\epsilon} \mathbf{e}_{k^{(j)}\epsilon}^H e^{i\mathbf{k}^{(j)} \cdot \mathbf{r}^{(j)}} + v_{jk_*\epsilon} \mathbf{e}_{k_*^{(j)}\epsilon}^H e^{i\mathbf{k}_*^{(j)} \cdot \mathbf{r}^{(j)}} \right). \quad (4.20b)$$

Funkcje opisujące rozkłady pól elektrycznego $\boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}$ oraz magnetycznego $\boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}^H$ spełniają związki:

$$\boldsymbol{\psi}_{-k\epsilon}(\mathbf{r}) = -\gamma_\epsilon \boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}^*(\mathbf{r}), \quad \boldsymbol{\psi}_{-k\epsilon}^H(\mathbf{r}) = \gamma_\epsilon \boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}^{H*}(\mathbf{r}). \quad (4.21)$$

W przypadku modów o urojonej składowej k_z wyrażenia (4.14) i (4.20b) pozostają słuszne, jeżeli położyć w nich $\rho_\epsilon(\mathbf{k}) = 1/8\pi^3$ i $\xi_\epsilon(\mathbf{k}) = 0$ – wówczas także $v_{0k_*\epsilon} = 0$.

4.3. Klasyfikacja i właściwości modów

Mody struktury można sklasyfikować na podstawie ich zachowania w zewnętrznych obszarach. Przy dokonanej wyborze parametrów niezależnych fal płaskich wyróżnia się trzy

klasy modów: mody promieniowania, mody podłożowe i mody prowadzone². Obszerne omówienie własności modów poszczególnych klas można znaleźć w pracach autora niniejszej rozprawy [75–78].

4.3.1. Mody promieniowania

Modami promieniowania nazywa się te mody, dla których $k_z^{(L)}, k_z^{(R)} \in \mathbb{R}$, tzn. ich pola w obydwu zewnętrznych obszarach mają postać jednorodnych fal płaskich lub ich złożenia. Dla modów tej klasy $|r_L| < 1$ i $|r_R| < 1$, skąd wynika, że $\rho_\epsilon(\mathbf{k}) > 0$, a także $|\xi_\epsilon(\mathbf{k})| < 1$.

4.3.2. Mody podłożowe

Mody podłożowe stanowią klasę modów, które w jednym z zewnętrznych obszarów mają postać superpozycji fal płaskich, a w drugim – fali zanikającej wykładniczo, tzn.³ $k_z^{(L)} \in \mathbb{R}$, zaś $k_z^{(R)} \in i\mathbb{R}$. Następuje wtedy całkowite odbicie od prawej granicy warstwy, co oznacza, że $|r_R| = 1$, natomiast $|r_L| < 1$. Mody tego typu występują dla kątów padania $\vartheta > \vartheta_S$, gdzie

$$\vartheta_S = \arcsin \frac{n_{(R)}}{n_{(0)}}, \quad (4.22a)$$

ale jednocześnie $\vartheta \leq \vartheta_G$, gdzie

$$\vartheta_G = \arcsin \frac{n_{(L)}}{n_{(0)}}. \quad (4.22b)$$

Oznacza to, że mody tego typu nie występują w zbiorze modów warstwy $j = 0$, gdy $n_{(L)} = n_{(R)}$ lub $n_{(0)} \leq n_{(R)}$. Dla modów podłożowych $\rho_\epsilon(\mathbf{k}) > 0$, natomiast $\xi_\epsilon(\mathbf{k}) = r_R^* e^{-2ik_z L_z}$ i, co za tym idzie, $|\xi_\epsilon(\mathbf{k})| = 1$.

4.3.3. Mody prowadzone

Ostatnią wyróżnianą klasą są mody prowadzone. Mody te mają pola zanikające w obydwu obszarach zewnętrznych, czyli $k_z^{(L)}, k_z^{(R)} \in i\mathbb{R}$. Wymaga to, aby kąt padania $\vartheta > \vartheta_G$. Mody prowadzone mogą występować w warstwie $j = 0$ tylko jeżeli $n_{(0)} > n_{(R)}, n_{(L)}$. Dla tego typu modów całkowite odbicie zachodzi od obydwu granic warstwy: $|r_L| = |r_R| = 1$. Wyznaczenie wartości widma modowego i współczynnika sprzężenia wymaga wykonania przejścia granicznego. Widmo modowe

$$\rho_\epsilon(\mathbf{k}) = \lim_{|r_L|, |r_R| \rightarrow 1} \frac{1}{8\pi^3} \frac{1 - |r_L r_R|^2}{|1 - r_L r_R e^{2ik_z L_z}|^2} = \begin{cases} \infty, & \text{gdy } r_L r_R e^{2ik_z L_z} = 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \quad (4.23a)$$

² Klasyfikacja modu nie zależy od tego, czy pochodzi on od fali jednorodnej, czy niejednorodnej, innymi słowy, jest słuszna także, gdy wektor falowy w warstwie $j = 0$ nie jest rzeczywisty, natomiast wnioski dotyczące widma modowego i innych parametrów są przedstawione przy założeniu, że $k_z \in \mathbb{R}$.

³ Przy założeniu, że $n_{(L)} \geq n_{(R)}$, które narzuca tylko orientację osi z .

Narzuca to warunek na istnienie modu prowadzonego:

$$r_L r_R e^{2ik_z L_z} = 1, \quad (4.23b)$$

gdyż jeżeli równość ta nie zachodzi, widmo modowe przyjmuje wartość 0 i pole elektromagnetyczne jest całkowicie wygaszone. Odpowiada to znanemu faktowi, że mody prowadzone tworzą układ dyskretny⁴. Otrzymane wyrażenie na wartość współczynnika sprzężenia zależy pozornie od kolejności przechodzenia do granicy z modułami współczynników odbicia w (4.23a). Biorąc w pierwszej kolejności granicę $|r_R| \rightarrow 1$ otrzymuje się:

$$\xi_\epsilon(\mathbf{k}) = r_R^* e^{-2ik_z L_z}, \quad (4.24a)$$

natomiast wykonując w pierwszej kolejności przejście $|r_L| \rightarrow 1$ dochodzi się do:

$$\xi_\epsilon(\mathbf{k}) = r_L. \quad (4.24b)$$

Nie ma tu jednak sprzeczności, gdyż warunek istnienia modu prowadzonego powoduje, że wyrażenia te są tożsame. Stąd, dla modów prowadzonych $|\xi_\epsilon(\mathbf{k})| = 1$, tak samo, jak dla modów podłożowych.

4.4. Ortonormalizacja modów wybranej warstwy

Znalezione postacie modów $\psi_{k\epsilon}$ są mało wygodne w obliczeniach, gdyż nie tworzą zbioru ortonormalnego. Należy je zatem przeprowadzić w ortonormalny układ modów $\mathbf{f}_{k\epsilon}$. Ich wyznaczenie pozwala zapisać pole elektryczne w rozważanej strukturze jako:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \mathcal{E}_{k\epsilon}(t) \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) \equiv \sum_{\epsilon} \int_{\text{RSM}} d^3k \mathcal{E}_{k\epsilon}(t) \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) + \sum_{\epsilon} \int d^2k_{\parallel} \sum_{a \in \text{GM}(\mathbf{k}_{\parallel}, \epsilon)} \mathcal{E}_{k_a\epsilon}(t) \mathbf{f}_{k_a\epsilon}(\mathbf{r}), \quad (4.25)$$

gdzie $\mathcal{E}_{k\epsilon}(t)$ są amplitudami pola elektrycznego modów, RSM oznacza zbiór liniowo niezależnych modów promieniowania i podłożowych, $\text{GM}(\mathbf{k}_{\parallel}, \epsilon)$ – zbiór modów prowadzonych dla ustalonego \mathbf{k}_{\parallel} i polaryzacji ϵ , zaś $\mathbf{k}_a = \mathbf{k}_{\parallel} + k_{z,a} \mathbf{e}_z$ są wektorami falowymi modów z tego zbioru. Dla zwięzłości stosowany będzie w dalszej części pracy wprowadzony powyżej symbol „sumocalki”, który zastępować będzie całkę po odpowiednich składowych wektora falowego, sumę po polaryzacjach i modach prowadzonych – wyrażenie (4.25) należy rozumieć jako definicję tego symbolu.

⁴ Mówiąc ściślej, przy ustalonym \mathbf{k}_{\parallel} mody prowadzone występują jedynie dla pewnych wartości składowej k_z , które tworzą zbiór dyskretny.

W ogólności, dla dowolnego rozkładu współczynnika załamania $n(\mathbf{r})$, rozkłady pola $\mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r})$ wyznaczone są przez równanie falowe

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{n^2(\mathbf{r})\omega_k^2}{c^2} \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}). \quad (4.26a)$$

Podążając tokiem pracy [12], wynika stąd, że funkcje $\mathbf{g}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) \equiv n(\mathbf{r})\mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r})$ spełniają równanie

$$\frac{1}{n(\mathbf{r})} \nabla \times \nabla \times \frac{1}{n(\mathbf{r})} \mathbf{g}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\omega_k^2}{c^2} \mathbf{g}_{k\epsilon}(\mathbf{r}). \quad (4.26b)$$

Są to zatem funkcje własne operatora hermitowskiego, stojącego po lewej stronie równania, którym odpowiadają wartości własne ω_k^2/c^2 . Stąd, na mocy twierdzenia spektralnego, jeżeli funkcjom $\mathbf{g}_{k\epsilon}$ i $\mathbf{g}_{q\lambda}$ odpowiadają różne częstotliwości: $\omega_k \neq \omega_q$, wówczas są one ortogonalne. Gdy $\omega_k = \omega_q$, twierdzenie spektralne nie gwarantuje ortogonalności, ale można te funkcje wybrać tak, aby były ortogonalne. Zakładając, że poczyniony został właśnie taki wybór, iloczyn skalarny

$$\int d^3r \mathbf{g}_{q\lambda}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) = \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (4.27)$$

dla ciągłego \mathbf{k} lub \mathbf{q} , w przypadku dyskretnych składowych należy użyć delty Kroneckera w miejsce delty Diraca. Przepisując powyższe wyrażenie tak, aby pojawiły się w nim funkcje $\mathbf{f}_{k\epsilon}$, otrzymuje się definicję iloczynu skalarnego właściwego tymże rozkładom pola. Dla rozważanej struktury definicja ta przyjmuje postać:

$$\langle \mathbf{f}_{q\lambda}, \mathbf{f}_{k\epsilon} \rangle \equiv \int d^3r n^2(\mathbf{r}) \mathbf{f}_{q\lambda}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}), \quad (4.28)$$

zaś warunek ortonormalizacji:

$$\langle \mathbf{f}_{q\lambda}, \mathbf{f}_{k\epsilon} \rangle = \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (\text{mody promieniowania i podłożowe}), \quad (4.29a)$$

$$\langle \mathbf{f}_{q_b\lambda}, \mathbf{f}_{q_a\epsilon} \rangle = \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \delta_{ab} \quad (\text{mody prowadzone}). \quad (4.29b)$$

Z powyższego zapisu wynika w oczywisty sposób, że mody różnych typów są ortogonalne.

Aby wyznaczyć $\mathbf{f}_{k\epsilon}$ przez rozkłady $\psi_{k\epsilon}$ można posłużyć się metodą opisaną przez autora rozprawy w pracach [76, 77]. W tym celu, należy najpierw obliczyć iloczyn skalarny $\langle \psi_{q\lambda}, \psi_{k\epsilon} \rangle$. Wstawiając jawne wyrażenia na rozkłady pola otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{q\lambda}, \psi_{k\epsilon} \rangle &= 4\pi^2 \rho_\epsilon(\mathbf{k}) \rho_\lambda(\mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \sum_j n_{(j)}^2 \int_{(j)} dz \\ &\times \left(u_{jq\lambda}^* u_{jk\epsilon} \mathbf{e}_{q^{(j)\lambda}}^* \cdot \mathbf{e}_{k^{(j)\epsilon}} e^{i(k_z^{(j)} - q_z^{(j)*})z} + u_{jq\lambda}^* v_{jk\epsilon} \mathbf{e}_{q^{(j)\lambda}}^* \cdot \mathbf{e}_{k_*^{(j)\epsilon}} e^{-i(k_z^{(j)} + q_z^{(j)*})z} \right. \\ &\left. + v_{jq\lambda} u_{jk\epsilon} \mathbf{e}_{q_*^{(j)\lambda}} \cdot \mathbf{e}_{k^{(j)\epsilon}} e^{i(k_z^{(j)} + q_z^{(j)*})z} + v_{jq\lambda} v_{jk\epsilon} \mathbf{e}_{q_*^{(j)\lambda}} \cdot \mathbf{e}_{k_*^{(j)\epsilon}} e^{i(q_z^{(j)*} - k_z^{(j)})z} \right), \quad (4.30) \end{aligned}$$

gdzie wykonane już zostało całkowanie po kierunkach, w których struktura jest jednorodna⁵, zaś (j) przy znaku całki oznacza, że całkowanie odbywa się po j -tej warstwie, w jej lokalnym układzie współrzędnych. Z uwagi na obecną deltę Diraca, całkowanie po z można przeprowadzić przyjmując $\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel}$. Ponieważ składowa równoległa wektora falowego wyznacza płaszczyznę padania, powyższe wyrażenie nie znika tylko wtedy, gdy polaryzacje są jednakowe. W przeciwnym przypadku pole jednej z fal byłoby równoległe do płaszczyzny padania, drugiej – prostopadłe, a iloczyn skalarny takich wektorów jest równy 0. Rozpisując jawnie wersory polaryzacji:

$$\mathbf{e}_{k^{(j)\text{TE}}} = \frac{k_y \mathbf{e}_x - k_x \mathbf{e}_y}{k_{\parallel}}, \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{e}_{k^{(j)\text{TM}}} = \frac{-k_x k_z^{(j)} \mathbf{e}_x - k_y k_z^{(j)} \mathbf{e}_y + k_{\parallel}^2 \mathbf{e}_z}{k_{\parallel} |\mathbf{k}|}, \quad (4.31b)$$

można wyprowadzić następujące dwa związki zachodzące przy $\mathbf{q}_{\parallel} = \mathbf{k}_{\parallel}$:

$$\mathbf{e}_{q^{(j)\text{TE}}}^* \cdot \mathbf{e}_{k^{(j)\text{TE}}} = 1, \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{e}_{q^{(j)\text{TM}}}^* \cdot \mathbf{e}_{k^{(j)\text{TM}}} = \frac{k_z^{(j)} q_z^{(j)*} + k_{\parallel}^2}{|\mathbf{k}| |\mathbf{q}|}. \quad (4.32b)$$

Wynika stąd, że w takim przypadku $\mathbf{e}_{q_*^{(j)\epsilon}}^* \cdot \mathbf{e}_{k_*^{(j)\epsilon}} = \mathbf{e}_{q^{(j)\epsilon}}^* \cdot \mathbf{e}_{k^{(j)\epsilon}}$ oraz $\mathbf{e}_{q_*^{(j)\epsilon}}^* \cdot \mathbf{e}_{k^{(j)\epsilon}} = \mathbf{e}_{q^{(j)\epsilon}}^* \cdot \mathbf{e}_{k_*^{(j)\epsilon}}$. Wyrażenie na iloczyn skalarny $\langle \psi_{q\lambda}, \psi_{k\epsilon} \rangle$ przepisuje się zatem jako:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{q\lambda}, \psi_{k\epsilon} \rangle &= 4\pi^2 \rho_{\epsilon}(\mathbf{k}) \rho_{\epsilon}(\mathbf{q}) \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \sum_j n_{(j)}^2 \int_{(j)} dz \\ &\times \left[\mathbf{e}_{q^{(j)\epsilon}}^* \cdot \mathbf{e}_{k^{(j)\epsilon}} \left(u_{jq\epsilon}^* u_{jk\epsilon} e^{i(k_z^{(j)} - q_z^{(j)*})z} + v_{jq\epsilon} v_{jk\epsilon}^* e^{i(q_z^{(j)*} - k_z^{(j)})z} \right) \right. \\ &\left. + \mathbf{e}_{q^{(j)\epsilon}}^* \cdot \mathbf{e}_{k_*^{(j)\epsilon}} \left(u_{jq\epsilon}^* v_{jk\epsilon}^* e^{-i(k_z^{(j)} + q_z^{(j)*})z} + v_{jq\epsilon} u_{jk\epsilon} e^{i(k_z^{(j)} + q_z^{(j)*})z} \right) \right]. \quad (4.33) \end{aligned}$$

Z twierdzenia spektralnego wynika, że mody o różnych częstotliwościach są ortogonalne, zatem powyższe wyrażenie nie znika tylko jeżeli $q_z^{(j)} = \pm k_z^{(j)}$. Dalsze postępowanie należy przeprowadzić osobno dla modów każdego typu.

4.4.1. Mody promieniowania

Dla modów promieniowania (4.33) albo znika, albo rozbiega się do ∞ . Za odpowiedzialne są wyrazy, które można przestawić w postaci delt Diraca, a zatem to one

⁵ Całkowania po x i y dają w wyniku delty Diraca, zgodnie ze wzorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{i\alpha x} = 2\pi \delta(\alpha).$$

są istotne przy normalizacji modu. Wyrazy te pochodzą od całek po zewnętrznych obszarach. Ponieważ⁶

$$\int_0^{\pm\infty} dz e^{i\alpha z} = \pi\delta(\alpha) \pm \mathcal{P}\frac{i}{\alpha}, \quad (4.34)$$

pomijając drugi wyraz, który prowadzi do skończonej, a więc nieistotnej wartości, otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{q\lambda}, \psi_{k\epsilon} \rangle &= 4\pi^3 \rho_\epsilon^2(\mathbf{k}) \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \\ &\times \left[n_{(L)}^2 \left((|u_{Lk\epsilon}|^2 + |v_{Lk\epsilon}|^2) \delta(k_z^{(L)} - q_z^{(L)}) + 2u_{Lk\epsilon} v_{Lk\epsilon}^* \delta(k_z^{(L)} + q_z^{(L)}) \right) \right. \\ &\left. + n_{(R)}^2 \left((|u_{Rk\epsilon}|^2 + |v_{Rk\epsilon}|^2) \delta(k_z^{(R)} - q_z^{(R)}) + 2u_{Rk\epsilon} v_{Rk\epsilon}^* \delta(k_z^{(R)} + q_z^{(R)}) \right) \right]. \quad (4.35) \end{aligned}$$

Korzystając ze wzoru:

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{\left| \frac{df}{dx} \right|}, \quad (4.36)$$

gdzie x_i oznaczają miejsca zerowe funkcji $f(x)$, można przekształcić

$$\delta(q_z^{(R,L)} \pm k_z^{(R,L)}) = \frac{n_{(0)}^2}{n_{(R,L)}^2} \left| \frac{k_z^{(R,L)}}{k_z} \right| \times \begin{cases} \delta(q_z \pm k_z), & \text{gdy } k_z, q_z \in \mathbb{R}, \\ \delta(\text{Im}\{q_z\} \pm \text{Im}\{k_z\}), & \text{gdy } k_z, q_z \in i\mathbb{R}, \\ 0, & \text{gdy } k_z q_z \in i\mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.37)$$

a zatem ostateczny wynik można zapisać w jednolitej postaci, rozumiejąc, że gdy składowe k_z i q_z są urojone, wówczas należy w deltach Diraca wstawić ich części urojone:

$$\langle \psi_{q\lambda}, \psi_{k\epsilon} \rangle = \rho_\epsilon^2(\mathbf{k}) \delta_{\epsilon\lambda} \left(F_{k\epsilon} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \tilde{F}_{k\epsilon} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}_*) \right), \quad (4.38)$$

gdzie:

$$F_{k\epsilon} = 4\pi^3 n_{(0)}^2 \left((|u_{Lk\epsilon}|^2 + |v_{Lk\epsilon}|^2) \left| \frac{k_z^{(L)}}{k_z} \right| + (|u_{Rk\epsilon}|^2 + |v_{Rk\epsilon}|^2) \left| \frac{k_z^{(R)}}{k_z} \right| \right), \quad (4.39a)$$

$$\tilde{F}_{k\epsilon} = 8\pi^3 n_{(0)}^2 \left(u_{Lk\epsilon} v_{Lk\epsilon}^* \left| \frac{k_z^{(L)}}{k_z} \right| + u_{Rk\epsilon} v_{Rk\epsilon}^* \left| \frac{k_z^{(R)}}{k_z} \right| \right). \quad (4.39b)$$

Dla modów o rzeczywistych wektorach falowych powyższe wyrażenia dają się znacznie uprościć. Po skorzystaniu z definicji (4.15), (3.28a), (3.28b) i własności (3.25), współczynniki $F_{k\epsilon}$

⁶ Związek (4.34) jest równością dystrybucyjną, w której \mathcal{P} oznacza wartość główną całki. Drugi wyraz (pomijając jedność urojoną) jest więc funkcjonałem, zdefiniowanym poprzez działanie na funkcję próbną $\varphi(\alpha)$:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} + \int_{\varepsilon}^{\infty} d\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} \right).$$

i $\tilde{F}_{k\epsilon}$ można przepisać w wyjątkowo prostej postaci za pomocą widma modowego i współczynnika sprzężenia:

$$F_{k\epsilon} = \frac{n_{(0)}^2}{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}, \quad \tilde{F}_{k\epsilon} = \frac{n_{(0)}^2 \xi_\epsilon^*(\mathbf{k})}{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}. \quad (4.39c)$$

Wynika stąd, że można napisać

$$\boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) = r_{k\epsilon} \left(\mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) + s_{k\epsilon} \mathbf{f}_{k^*\epsilon}(\mathbf{r}) \right), \quad (4.40)$$

gdzie $r_{k\epsilon} \in \mathbb{R}$, $r_{k^*\epsilon} = r_{k\epsilon} > 0$, zaś $s_{k^*\epsilon} = s_{k\epsilon}^*$. Porównując obliczony iloczyn skalarny z iloczynem skalarnym tak zdefiniowanych $\boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}$ otrzymuje się⁷:

$$r_{k\epsilon} = \rho_\epsilon(\mathbf{k}) \sqrt{\frac{F_{k\epsilon}}{1 + |s_{k\epsilon}|^2}}, \quad (4.41a)$$

$$s_{k\epsilon} = \begin{cases} \left(F_{k\epsilon} - \sqrt{F_{k\epsilon}^2 - |\tilde{F}_{k\epsilon}|^2} \right) / \tilde{F}_{k\epsilon}^*, & \text{gdym } \tilde{F}_{k\epsilon} \neq 0, \\ 0, & \text{gdym } \tilde{F}_{k\epsilon} = 0. \end{cases} \quad (4.41b)$$

Wynika stąd wprost wyrażenie na $\mathbf{f}_{k\epsilon}$:

$$\mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r_{k\epsilon}} \frac{\boldsymbol{\psi}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) - s_{k\epsilon} \boldsymbol{\psi}_{k^*\epsilon}(\mathbf{r})}{1 - |s_{k\epsilon}|^2}. \quad (4.42)$$

Powyższe wyrażenia na współczynniki $r_{k\epsilon}$ i $s_{k\epsilon}$ oraz mody $\mathbf{f}_{k\epsilon}$ są prawidłowe także wówczas, gdy składowa $k_z \in i\mathbb{R}$. Dla rzeczywistego wektora falowego $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, korzystając z wyrażeń (4.39c) otrzymuje się:

$$r_{k\epsilon} = n_{(0)} \sqrt{\frac{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}{1 + |s_{k\epsilon}|^2}}, \quad (4.43a)$$

$$s_{k\epsilon} = \frac{1 - \sqrt{1 - |\xi_\epsilon(\mathbf{k})|^2}}{\xi_\epsilon(\mathbf{k})}. \quad (4.43b)$$

⁷ Współczynnik $s_{k\epsilon}$ jest rozwiązaniem równania

$$\frac{2s_{k\epsilon}}{1 + |s_{k\epsilon}|^2} = \frac{\tilde{F}_{k\epsilon}}{F_{k\epsilon}},$$

które przy $\tilde{F}_{k\epsilon} \neq 0$ ma dwa rozwiązania:

$$s_{k\epsilon} = \frac{F_{k\epsilon} \pm \sqrt{F_{k\epsilon}^2 - |\tilde{F}_{k\epsilon}|^2}}{\tilde{F}_{k\epsilon}^*}.$$

Prowadzą one jednak do takich samych zbiorów modów ortonormalnych $\mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r})$, co zostało pokazane w pracy autora rozprawy [79].

Na podstawie otrzymanych wyników można zauważyć, że ponieważ amplituda rozkładu pola $\psi_{k\epsilon}$ w warstwie $j = 0$ jest proporcjonalna do $\rho_\epsilon(\mathbf{k})$, zatem amplituda modu znormalizowanego $\mathbf{f}_{k\epsilon}$ jest w tej warstwie proporcjonalna do $\sqrt{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}$.

4.4.2. Mody podłożowe

Dla modów podłożowych zachowanie się całki (4.33) jest takie same jak dla modów promieniowania. Wyrazy rozbieżne również można przedstawić jako delty Diraca i na ich podstawie przeprowadzić normalizację modu. Jednak, ponieważ $k_z^{(R)} \in i\mathbb{R}$, fala w obszarze z prawej strony zanika wykładniczo i całka po tym obszarze ma skończoną wartość. Zatem, jedynie wyraz pochodzący od granicy całki w $-\infty$ ma wpływ na normalizację. Rachunki dla modów prowadzonych dają się tu powtórzyć, z tą różnicą, że nie będą w nich obecne wyrazy związane z obszarem z prawej strony. Stąd, dla modów podłożowych:

$$\langle \psi_{q\lambda}, \psi_{k\epsilon} \rangle = \rho_\epsilon^2(\mathbf{k}) \delta_{\epsilon\lambda} \left(F_{k\epsilon} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) + \tilde{F}_{k\epsilon} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}^*) \right), \quad (4.44)$$

gdzie:

$$F_{k\epsilon} = 4\pi^3 n_{(0)}^2 \left(|u_{Lk\epsilon}|^2 + |v_{Lk\epsilon}|^2 \right) \left| \frac{k_z^{(L)}}{k_z} \right|, \quad (4.45a)$$

$$\tilde{F}_{k\epsilon} = 8\pi^3 n_{(0)}^2 u_{Lk\epsilon} v_{Lk\epsilon}^* \left| \frac{k_z^{(L)}}{k_z} \right|. \quad (4.45b)$$

Dla rzeczywistego wektora \mathbf{k} definicje (4.15), (3.28a), (3.28b) i własność (3.25) pozwalają przepisać te współczynniki za pomocą wzorów o postaci identycznej, jak w przypadku modów promieniowania:

$$F_{k\epsilon} = \frac{n_{(0)}^2}{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}, \quad \tilde{F}_{k\epsilon} = \frac{n_{(0)}^2 \xi_\epsilon^*(\mathbf{k})}{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}. \quad (4.45c)$$

Również, podobnie jak dla modów promieniowania:

$$\psi_{k\epsilon}(\mathbf{r}) = r_{k\epsilon} \left(\mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) + s_{k\epsilon} \mathbf{f}_{k^*\epsilon}(\mathbf{r}) \right), \quad (4.46)$$

jednak w tym przypadku $|s_{k\epsilon}| = 1$ i równanie to nie daje się wprost odwrócić. Jednakże można zauważyć, że $s_{k\epsilon} \mathbf{f}_{k^*\epsilon}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r})$, co oznacza, że obydwa rozwiązania opisują ten sam mod⁸.

W efekcie:

$$\mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\psi_{k\epsilon}(\mathbf{r})}{2r_{k\epsilon}}, \quad (4.47)$$

gdzie

$$r_{k\epsilon} = \rho_\epsilon(\mathbf{k}) \frac{\sqrt{F_{k\epsilon}}}{2}, \quad (4.48a)$$

⁸ Jest to wspólna cecha wszystkich modów, dla których $|s_{k\epsilon}| = 1$, co zostało udowodnione w pracy autora rozprawy [79].

co przy $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ można przepisać jako:

$$r_{k\epsilon} = \frac{n_{(0)}\sqrt{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}}{2}. \quad (4.48b)$$

Wynika stąd, tak samo jak w przypadku modów promieniowania, że amplituda pola elektrycznego związanego ze znormalizowanym modem podłożowym $\mathbf{f}_{k\epsilon}$ jest w warstwie $j = 0$ proporcjonalna do $\sqrt{\rho_\epsilon(\mathbf{k})}$.

4.4.3. Mody prowadzone

W przypadku modów prowadzonych obydwie całki po obszarach zewnętrznych są zbieżne, gdyż fale w nich zanikają wykładniczo. Wynika stąd, że całki w wyrażeniu (4.33) dają w sumie skończoną wartość, jednak jest ona niezerowa tylko gdy $q_z = \pm k_z$. Co więcej, dla każdego modu prowadzonego $|s_{k_a\epsilon}| = 1$, zatem wystarczy obliczyć jedynie $F_{k_a\epsilon}$, które można znaleźć licząc (4.33) dla jednakowych składowych wektora falowego $q_{z,a} = k_{z,a}$. Stąd

$$\langle \psi_{q_b\lambda}, \psi_{k_a\epsilon} \rangle = \rho_\epsilon^2(\mathbf{k}_a) \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k}_{\parallel} - \mathbf{q}_{\parallel}) \delta_{ab} F_{k_a\epsilon}, \quad (4.49)$$

gdzie

$$\begin{aligned} F_{k_a\epsilon} = & \frac{4\pi^2 n_{(L)}^2 |u_{Lk_a\epsilon}|^2}{2 |k_{z,a}^{(L)}|} + \frac{4\pi^2 n_{(R)}^2 |u_{Rk_a\epsilon}|^2}{2 |k_{z,a}^{(R)}|} + 4\pi^2 \sum_{-N_L < j < N_R} n_{(j)}^2 L_z^{(j)} \\ & \times \left[\left(|u_{jk_a\epsilon}|^2 e^{-\text{Im}\{k_{z,a}^{(j)}\} L_z^{(j)}} + |v_{jk_a\epsilon}|^2 e^{\text{Im}\{k_{z,a}^{(j)}\} L_z^{(j)}} \right) \frac{\sinh\left(\text{Im}\{k_{z,a}^{(j)}\} L_z^{(j)}\right)}{\text{Im}\{k_{z,a}^{(j)}\} L_z^{(j)}} \right. \\ & \left. + 2\text{Re} \left\{ u_{jk_a\epsilon} v_{jk_a\epsilon} e_{k_a^{(j)\epsilon}}^* \cdot e_{k_a^{(j)\epsilon}} e^{i\text{Re}\{k_{z,a}^{(j)}\} L_z^{(j)}} \right\} \frac{\sin\left(\text{Re}\{k_{z,a}^{(j)}\} L_z^{(j)}\right)}{\text{Re}\{k_{z,a}^{(j)}\} L_z^{(j)}} \right], \quad (4.50) \end{aligned}$$

a mody znormalizowane są dane wyrażeniem takiej postaci jak dla modów podłożowych.

4.5. Związki między modami różnych warstw

Konstrukcja zbiorów liniowo niezależnych i ortonormalnych modów wybranej warstwy jest jednym z najistotniejszych punktów niniejszej rozprawy, jednak nie należy jeszcze uznawać modelu efektywnego rezonatora za kompletny, dopóki nie rozpatrzy się związków pomiędzy takimi zbiorami utworzonymi dla różnych warstw. Jest to ważne, gdyż nie zakłada się z góry takich związków, a pominięcie tego kroku nie pozwala wykorzystać zalet modelu efektywnego rezonatora do opisu oddziaływania atomów znajdujących się w różnych warstwach struktury. Niniejszy podrozdział stanowi zatem zwieńczenie konstrukcji modelu. W przedstawionych w nim obliczeniach, dla ustalenia uwagi i bez utraty ogólności można skoncentrować się na dowolnie wybranych warstwach 0-wej i J -tej, przyjmując też $J > 0$. Dla warstwy 0-wej za-

chowane zostają uprzednio stosowane oznaczenia, natomiast mody, wyrażenia oraz wielkości związane z J -tą warstwą oznaczane będą primem. Rozważania w tym podrozdziale prowadzone są przy założeniu, że wektory falowe $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbb{R}^3$.

Przed rozpatrzeniem kolejno różnych klas modów, można poczynić następujące dwie uwagi. Mody J -tej warstwy $\mathbf{f}'_{k'\epsilon}$ spełniają równanie falowe:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{f}'_{k'\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{n^2(\mathbf{r})\omega_{k'}^2}{c^2} \mathbf{f}'_{k'\epsilon}(\mathbf{r}), \quad (4.51)$$

z pulsacją

$$\omega'_{k'} = \frac{c}{n_{(J)}} \sqrt{\mathbf{k}'^2}. \quad (4.52)$$

Ponadto, widmo modowe J -tej warstwy i współczynnik sprzężenia w tej warstwie dla $k'_z = k_z^{(J)}$ i $k_z, k'_z \in \mathbb{R}$, kiedy to można skorzystać ze związków (3.25), wyrażają się w następujący sposób przez widmo modowe i współczynnik sprzężenia warstwy $j = 0$:

$$\rho'_\epsilon(\mathbf{k}') = \rho_\epsilon(\mathbf{k}) \left(1 + \frac{2 |(m_{J,0})_{12}|^2}{\det m_{J,0}} \left(1 + \operatorname{Re} \left\{ \frac{(m_{J,0})_{11}}{(m_{J,0})_{12}} \xi_\epsilon(\mathbf{k}) \right\} \right) \right), \quad (4.53a)$$

$$\xi'_\epsilon(\mathbf{k}') = \frac{\rho_\epsilon(\mathbf{k}) (m_{J,0})_{11}^2 \xi_\epsilon(\mathbf{k}) + (m_{J,0})_{12}^2 \xi_\epsilon^*(\mathbf{k}) + 2(m_{J,0})_{11} (m_{J,0})_{12}}{\rho'_\epsilon(\mathbf{k}') \det m_{J,0}}, \quad (4.53b)$$

co oznacza, że model efektywnego rezonatora pozwala badać najważniejsze właściwości różnych warstw i związki pomiędzy nimi za pomocą tych dwóch skalarnych wielkości, w ogóle nie odwołując się do rozkładów pola.

4.5.1. Mody prowadzone

Dla modu prowadzonego w 0-wej warstwie $r_L r_R e^{2ik_z L_z} = 1$. Związek (3.37) wskazuje, że jeżeli $\mathbf{k}' = \mathbf{k}^{(J)} \in \mathbb{R}^3$, wówczas również $r'_L r'_R e^{2ik'_z L'_z} = 1$, co oznacza, że w J -tej warstwie także istnieje mod prowadzony o identycznej polaryzacji, częstotliwości i stałej propagacji.

Dla modów prowadzonych można przyjąć $k_z, k'_z \geq 0$. Przy równych częstotliwościach: $\omega_k = \omega'_{k'}$, zachodzi także $|k_z^{(j)}| = |k'^{(j)}_z|$. Wówczas, gdy $k_z^{(j)} \in \mathbb{R}$ wtedy $k'^{(j)}_z = k_z^{(j)}$, zaś jeżeli $k_z^{(j)} \in i\mathbb{R}$, odpowiednio: $k'^{(j)}_z = k_z^{(j)}$ przy $j \leq 0$ lub $j \geq J$ oraz $k'^{(j)}_z = -k_z^{(j)}$ przy $0 < j < J$. W zwięzłej formie, można napisać:

$$\mathbf{k}'^{(j)} = \begin{cases} \mathbf{k}^{(j)} & \text{gdy } j \leq 0 \text{ lub } j \geq J, \\ \mathbf{k}^{(j)*} & \text{gdy } 0 < j < J. \end{cases} \quad (4.54)$$

Dla modu prowadzonego $\xi_\epsilon(\mathbf{k}) = r_L = r_R^* \exp(-2ik_z L_z)$. Wynika stąd, że:

$$\begin{pmatrix} u_{jk\epsilon} \\ v_{jk\epsilon}^* \end{pmatrix} = \left(\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(0)}}{n_{(j)}} \right) \begin{Bmatrix} m_{j,0} \\ w_{j,0} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_L^* \end{pmatrix} \quad (4.55a)$$

oraz

$$\begin{pmatrix} u'_{jk'\epsilon} \\ v'_{jk'\epsilon} \end{pmatrix} = \left(\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(J)}}{n_{(j)}} \right) \begin{Bmatrix} m'_{j,J} \\ w'_{j,J} \end{Bmatrix}' \begin{pmatrix} 1 \\ r_L^* \end{pmatrix}, \quad (4.55b)$$

gdzie

$$\begin{Bmatrix} m'_{j,J} \\ w'_{j,J} \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} m'_{j,0} \\ w'_{j,0} \end{Bmatrix} w'_{0,J}, \quad (4.56)$$

zaś

$$w'_{0,J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} w_{0,J}^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Z powyższych równań otrzymuje się związek:

$$\begin{pmatrix} u'_{jk'\epsilon} \\ v'_{jk'\epsilon} \end{pmatrix} = \frac{\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(J)}}{n_{(j)}}}{\left(m_{J,0}^* \right)_{22} + \left(m_{J,0}^* \right)_{21} r_L^*} \begin{Bmatrix} m'_{j,0} \\ w'_{j,0} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ r_L^* \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

Poprzez porównanie z (4.55a) dochodzi się do wniosku, że w przypadku, gdy $j \leq 0$ lub gdy $j \geq J$, kiedy to $u_{Jk\epsilon} = s_{k\epsilon} v_{Jk\epsilon}$ i $s_{k\epsilon} = r_L^*$, związek ten przyjmuje postać:

$$\begin{pmatrix} u'_{jk'\epsilon} \\ v'_{jk'\epsilon} \end{pmatrix} = \frac{\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}}}{\left(m_{J,0}^* \right)_{22} + \left(m_{J,0}^* \right)_{21} r_L^*} \begin{pmatrix} u_{jk\epsilon} \\ v_{jk\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (4.59a)$$

zaś jeżeli $0 < j < J$:

$$\begin{pmatrix} u'_{jk'\epsilon} \\ v'_{jk'\epsilon} \end{pmatrix} = \frac{\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}}}{\left(m_{J,0}^* \right)_{22} + \left(m_{J,0}^* \right)_{21} r_L^*} r_L^* \begin{pmatrix} v_{jk\epsilon} \\ u_{jk\epsilon} \end{pmatrix}. \quad (4.59b)$$

Porównując rozkłady modów prowadzonych $\psi_{k\epsilon}$ z $\psi'_{k'\epsilon}$ daje się zauważyć, że

$$\psi'_{k'\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}}}{\left(m_{J,0}^* \right)_{22} + \left(m_{J,0}^* \right)_{21} r_L^*} \psi_{k\epsilon}(\mathbf{r}), \quad (4.60)$$

i w rezultacie

$$\mathbf{f}'_{k'\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}}}{\left(m_{J,0}^* \right)_{22} + \left(m_{J,0}^* \right)_{21} r_L^*} \sqrt{\frac{F_{k\epsilon}}{F_{k'\epsilon}}} \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}). \quad (4.61)$$

Wynik ten dowodzi, że jeżeli wektorom falowym \mathbf{k} i $\mathbf{k}' = \mathbf{k}^{(J)}$ odpowiadają mody prowadzone warstw 0-wej i J -tej, to *mody te są opisane jednakowymi, z dokładnością do czynnika multiplikatywnego, rozkładami*.

4.5.2. Mody podłożowe

W przypadku modów podłożowych założenia, rachunki i ostateczny wynik są identyczne jak dla modów prowadzonych, z tą różnicą, że dla modów podłożowych zachodzi jedynie

$\xi_\epsilon(\mathbf{k}) = r_R^* \exp(-2ik_z L_z)$, zaś $\xi_\epsilon(\mathbf{k}) \neq r_L$. Należy zatem w mianowniku (4.61) zastąpić r_L^* przez $r_R \exp(2ik_z L_z)$, otrzymując:

$$\mathbf{f}'_{k'\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\delta_{\epsilon\text{TE}} + \delta_{\epsilon\text{TM}} \frac{n(J)}{n(0)}}{\left(m_{J,0}^*\right)_{22} + \left(m_{J,0}^*\right)_{21} r_R \exp(2ik_z L_z)} \sqrt{\frac{F_{k\epsilon}}{F'_{k'\epsilon}}} \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}). \quad (4.62)$$

Relacje pomiędzy modami podłożowymi różnych warstw struktury są zatem takie same, jak w przypadku modów prowadzonych.

4.5.3. Mody promieniowania

Dla modów promieniowania w ogólności $\xi_\epsilon(\mathbf{k}) \neq r_L$, a więc rachunek przeprowadzony dla modów prowadzonych nie znajduje tu zastosowania. Warunki ciągłości pola wskazują, że jeżeli mod promieniowania warstwy J -tej $\psi'_{k'\epsilon}$ wyraża się poprzez mody warstwy 0-wej, to jedynie przez mody z taką samą składową \mathbf{k}_\parallel i częstotliwością. Najogólniejsza możliwa postać takiego związku przyjmuje więc formę kombinacji liniowej:

$$\psi'_{k'\epsilon}(\mathbf{r}) = \alpha_{k\epsilon} \psi_{k\epsilon}(\mathbf{r}) + \beta_{k\epsilon} \psi_{k^*\epsilon}(\mathbf{r}). \quad (4.63)$$

Można pokazać, że taki związek faktycznie zachodzi, znajdując bezpośrednim rachunkiem współczynniki $\alpha_{k\epsilon}$ i $\beta_{k\epsilon}$. Z porównania postaci pól modów $\psi_{k\epsilon}$, $\psi_{k^*\epsilon}$ i $\psi'_{k'\epsilon}$ w J -tej warstwie wynika, że współczynniki te musiałyby spełniać związek, który wygodnie jest zapisać w postaci macierzowej:

$$\frac{\rho'_\epsilon(\mathbf{k}')}{\rho_\epsilon(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi'^*_\epsilon(\mathbf{k}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{Jk\epsilon} & v_{Jk\epsilon} \\ v^*_{Jk\epsilon} & u^*_{Jk\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{k\epsilon} \\ \beta_{k\epsilon} \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

skąd wynika następujące wyrażenie na współczynniki $\alpha_{k\epsilon}$ i $\beta_{k\epsilon}$:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k\epsilon} \\ \beta_{k\epsilon} \end{pmatrix} = \frac{\rho'_\epsilon(\mathbf{k}')}{\rho_\epsilon(\mathbf{k})} \begin{pmatrix} u_{Jk\epsilon} & v_{Jk\epsilon} \\ v^*_{Jk\epsilon} & u^*_{Jk\epsilon} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \xi'^*_\epsilon(\mathbf{k}') \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

Przy tak określonych wartościach tych współczynników, wyrażenie z prawej strony (4.63) opisuje w warstwie J -tej pole elektryczne będące superpozycją dwóch fal płaskich o takich samych amplitudach, jak fale płaskie składające się na pole elektryczne modu $\psi'_{k'\epsilon}$ w tej warstwie. Ponieważ warunki brzegowe mają charakter uniwersalny i nie zależą od wyboru warstwy, z której rozpoczęto obliczenia rozkładu pola, zapewniają one, że związek (4.63) musi być spełniony wszędzie.

Można łatwo przekonać się, że $\alpha_{k^*\epsilon} = \alpha_{k\epsilon}^*$ i $\beta_{k^*\epsilon} = \beta_{k\epsilon}^*$. Zapisując jawnie macierz odwrotną w (4.65) i wykonując mnożenie otrzymuje się:

$$\alpha_{k\epsilon} = \frac{\rho'_\epsilon(\mathbf{k}') u^*_{Jk\epsilon} - v_{Jk\epsilon} \xi'^*_\epsilon(\mathbf{k}')}{\rho_\epsilon(\mathbf{k}) (|u_{Jk\epsilon}|^2 - |v_{Jk\epsilon}|^2)}, \quad (4.66a)$$

$$\beta_{k\epsilon} = -\frac{\rho'_\epsilon(\mathbf{k}') v_{Jk\epsilon}^* - u_{Jk\epsilon} \xi_{\epsilon}^{\prime*}(\mathbf{k}')}{\rho_\epsilon(\mathbf{k}) (|u_{Jk\epsilon}|^2 - |v_{Jk\epsilon}|^2)}, \quad (4.66b)$$

a stąd:

$$\psi'_{k'\epsilon}(\mathbf{r}) = \frac{\rho'_\epsilon(\mathbf{k}') (u_{Jk\epsilon}^* - v_{Jk\epsilon} \xi_{\epsilon}^{\prime*}(\mathbf{k}')) \psi_{k\epsilon}(\mathbf{r}) - (v_{Jk\epsilon}^* - u_{Jk\epsilon} \xi_{\epsilon}^{\prime*}(\mathbf{k}')) \psi_{k^*\epsilon}(\mathbf{r})}{\rho_\epsilon(\mathbf{k}) (|u_{Jk\epsilon}|^2 - |v_{Jk\epsilon}|^2)}. \quad (4.66c)$$

Ostatecznie, związek pomiędzy modami promieniowania ze zbiorów ortonormalnych ma postać:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_{k'\epsilon} = & \frac{1}{1 - |s'_{k'\epsilon}|^2} \frac{1}{|u_{Jk\epsilon}|^2 - |v_{Jk\epsilon}|^2} \sqrt{\frac{F_{k\epsilon}}{F'_{k'\epsilon}} \frac{1 + |s'_{k'\epsilon}|^2}{1 + |s_{k\epsilon}|^2}} \\ & \times \left[\left((1 - s'_{k'\epsilon} \xi'_{\epsilon}(\mathbf{k}')) (u_{Jk\epsilon}^* + s_{k\epsilon}^* v_{Jk\epsilon}^*) + (s'_{k'\epsilon} - \xi_{\epsilon}^{\prime*}(\mathbf{k}')) (v_{Jk\epsilon} + s_{k\epsilon}^* u_{Jk\epsilon}) \right) \mathbf{f}_{k\epsilon} \right. \\ & \left. - \left[(1 - s'_{k'\epsilon} \xi'_{\epsilon}(\mathbf{k}')) (v_{Jk\epsilon}^* + s_{k\epsilon} u_{Jk\epsilon}^*) + (s'_{k'\epsilon} - \xi_{\epsilon}^{\prime*}(\mathbf{k}')) (u_{Jk\epsilon} + s_{k\epsilon} v_{Jk\epsilon}) \right] \mathbf{f}_{k^*\epsilon} \right]. \quad (4.67) \end{aligned}$$

Dla kompletności rozważań można zaznaczyć, że iloczyn skalarny modów promieniowania warstwy J -tej jest dany wyrażeniem

$$\langle \mathbf{f}'_{q'\lambda}, \mathbf{f}'_{k'\epsilon} \rangle = \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q}') = \frac{n_{(0)}^2}{n_{(J)}^2} \frac{k'_z}{k_z} \delta_{\epsilon\lambda} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}), \quad (4.68)$$

skąd wynikają dwie następujące tożsamości:

$$\begin{aligned} & \left[(v_{Jk\epsilon}^* + s_{k\epsilon} u_{Jk\epsilon}^*) - s'_{k'\epsilon} (u_{Jk\epsilon} + s_{k\epsilon} v_{Jk\epsilon}) \right] \\ & \quad \times \left[(u_{Jk\epsilon}^* + s_{k\epsilon}^* v_{Jk\epsilon}^*) - s'_{k'\epsilon} (v_{Jk\epsilon} + s_{k\epsilon}^* u_{Jk\epsilon}) \right] = 0 \quad (4.69a) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} & |(u_{Jk\epsilon}^* + s_{k\epsilon}^* v_{Jk\epsilon}^*) - s'_{k'\epsilon} (v_{Jk\epsilon} + s_{k\epsilon}^* u_{Jk\epsilon})|^2 + |(v_{Jk\epsilon}^* + s_{k\epsilon} u_{Jk\epsilon}^*) - s'_{k'\epsilon} (u_{Jk\epsilon} + s_{k\epsilon} v_{Jk\epsilon})|^2 = \\ & \quad 4 \frac{n_{(0)}^2}{n_{(J)}^2} \frac{k'_z}{k_z} \frac{s'_{k'\epsilon}}{\xi_{\epsilon}^{\prime*}(\mathbf{k}')} \frac{s_{k\epsilon}}{\xi_{\epsilon}^*(\mathbf{k})} (|u_{Jk\epsilon}|^2 - |v_{Jk\epsilon}|^2)^2 \frac{F'_{k'\epsilon}}{F_{k\epsilon}}. \quad (4.69b) \end{aligned}$$

4.6. Równoważność modów różnych warstw

Wyprowadzone w poprzednim podrozdziale wyrażenia (4.67), (4.62) i (4.61), wiążące mody różnych warstw, są dobrze zdefiniowane przy założeniu, że występujące w nich po obydwu stronach mody istnieją i są tego samego typu. Oznaczmy zbiór wszystkich modów j -tej warstwy przez $\mathcal{M}(j)$. Można formalnie zdefiniować:

Definicja 1. (równoważność modów) Niech $\mathbf{f}_{k\epsilon} \in \mathcal{M}(i)$, $\mathbf{f}'_{k'\epsilon} \in \mathcal{M}(j)$, nie wykluczając przy-

padku $i = j$. Mody $f_{k\epsilon}$ i $f'_{k'\epsilon}$ nazywamy równoważnymi, jeżeli można wyrazić $f'_{k'\epsilon}$ przez kombinację liniową $f_{k\epsilon}$ i $f_{k_*\epsilon}$ oraz jeżeli można ten związek odwrócić.

Tak zdefiniowana relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia, zatem jest poprawnie zdefiniowaną relacją równoważności. Następnie, można zdefiniować relację równoważności dla zbiorów modów:

Definicja 2. (równoważność zbiorów modów) Dwa dowolne zbiory modów nazywamy równoważnymi, jeżeli dla każdego modu z każdego z tych zbiorów można w drugim zbiorze wskazać mod do niego równoważny.

Zbiory wszystkich modów dowolnych dwóch warstw są równoważne, co można uzasadnić w następujący sposób. Niech wektory falowe modów $f_{k\epsilon} \in \mathcal{M}(0)$ i $f'_{k'\epsilon} \in \mathcal{M}(J)$ mają jednakowe składowe równoległe k_{\parallel} i mody te mają jednakowe częstotliwości. W pierwszej kolejności można rozpatrzeć mody o rzeczywistych wektorach falowych. Wówczas, zachodzą wyprowadzone w poprzednim podrozdziale związki, zatem mody te są równoważne. Następnie, niech $k'_z \in i\mathbb{R}$. Wówczas, pole modu $f_{k\epsilon}$ ma w J -tej warstwie postać fali niejednorodnej lub superpozycji takich fal. Fale te przynależą także do odpowiednich z modów $f'_{k'\epsilon}$ i $f'_{k_*\epsilon}$, dla których jednoznacznie zadają pole w całej strukturze. Warunki brzegowe zapewniają, że złożenie pól tych modów, z takimi amplitudami, jak fale modu $f_{k\epsilon}$, odtwarzają ten mod. Wynika stąd, że mody te są równoważne, a ponieważ ich wybór był dowolny – równoważne są także zbiory wszystkich modów warstw.

Można również rozważyć, w jakich warunkach zbiory modów o rzeczywistych wektorach falowych dwóch dowolnych warstw są równoważne. Warto zastanowić się nad tą kwestią, z uwagi na to, że tylko dla takich modów widmo modowe jest nietrywialne.

W pierwszej kolejności rozpatrzmy mody promieniowania. Związek (4.67) zachodzi tylko wtedy, gdy zarówno $f_{k\epsilon}$ jak i $f'_{k'\epsilon}$ są modami promieniowania. Mody promieniowania w j -tej warstwie występują dla kątów padania $\vartheta^{(j)}$ takich, że $|\vartheta^{(j)}| \leq \vartheta_S^{(j)}$, gdzie

$$\vartheta_S^{(j)} = \begin{cases} \arcsin \frac{n_{(R)}}{n_{(j)}}, & \text{gdy } n_{(j)} > n_{(R)}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{gdy } n_{(j)} \leq n_{(R)}. \end{cases} \quad (4.70)$$

Mody promieniowania z warstwy $j = 0$ o kącie padania $\vartheta \equiv \vartheta^{(0)}$ związane są z modami J -tej warstwy o kącie padania ϑ' jeżeli spełniają one prawo Snella:

$$n_{(0)} \sin \vartheta = n_{(J)} \sin \vartheta'. \quad (4.71)$$

Stąd, kątowi $\vartheta = 0$ zawsze odpowiada kąt $\vartheta' = 0$. Kwestię górnych granic przedziałów modów promieniowania należy rozpatrzyć w trzech przypadkach:

1. $n_{(0)}, n_{(J)} \geq n_{(R)}$, wówczas $\vartheta_S, \vartheta'_S < \frac{\pi}{2}$. Łatwo sprawdzić, że w tym przypadku kąty ϑ_S i ϑ'_S spełniają prawo Snella, a co za tym idzie – zbiory modów promieniowania $f_{k\epsilon}$ i $f'_{k'\epsilon}$ są równoważne.
2. $n_{(0)} > n_{(R)} > n_{(J)}$, wtedy $\vartheta_S < \vartheta'_S = \frac{\pi}{2}$. Wstawiając w prawie Snella $\vartheta' = \vartheta'_S = \frac{\pi}{2}$ otrzymuje się odpowiadający mu kąt graniczny $\vartheta_{J,0} = \arcsin \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}} < \vartheta_S$. Oznacza to, że wprawdzie wszystkie mody promieniowania J -tej warstwy można wyrazić przez mody promieniowania warstwy $j = 0$, lecz mody promieniowania warstwy $j = 0$ dla $\vartheta_{J,0} < \vartheta \leq \vartheta_S$ nie wyrażają się przez mody promieniowania J -tej warstwy.
3. $n_{(R)} > n_{(0)} \geq n_{(J)}$, której to sytuacji odpowiada $\vartheta_S = \vartheta'_S = \frac{\pi}{2}$. Otrzymuje się ponownie kąt graniczny $\vartheta_{J,0} = \arcsin \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}} < \frac{\pi}{2}$, skąd wynika, że mody promieniowania warstwy $j = 0$ o kątach padania $\vartheta > \vartheta_{J,0}$ nie dają się wyrazić przez mody promieniowania J -tej warstwy.

Wynika stąd, że zbiory modów promieniowania dwóch warstw są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki załamania tych warstw są równe lub nie mniejsze niż $n_{(R)}$.

Następnie, rozpatrzmy mody podłożowe. Występują one w j -tej warstwie dla kątów padania $\vartheta^{(j)}$ z przedziału $\vartheta_S^{(j)} < \vartheta^{(j)} \leq \vartheta_G^{(j)}$, gdzie

$$\vartheta_G^{(j)} = \begin{cases} \arcsin \frac{n_{(L)}}{n_{(j)}}, & \text{gdy } n_{(j)} > n_{(L)}, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{gdy } n_{(j)} \leq n_{(L)}, \end{cases} \quad (4.72)$$

tj. tylko wówczas, gdy $n_{(j)} > n_{(R)}$ i $n_{(L)} > n_{(R)}$. Mod podłożowy warstwy $j = 0$ o kącie padania ϑ i mod podłożowy J -tej warstwy o kącie padania $\vartheta^{(J)}$, które spełniają prawo Snella, są do siebie proporcjonalne, zgodnie z (4.62), a zatem są równoważne. Należy sprawdzić kiedy ma to miejsce. Możliwości są następujące:

1. $n_{(0)}, n_{(J)} > n_{(L)}$, wtedy $\vartheta_G, \vartheta_G^{(J)} < \frac{\pi}{2}$. Para tych kątów spełnia prawo Snella, zatem w tym przypadku zbiory modów podłożowych rozpatrywanych warstw są równoważne.
2. $n_{(0)} > n_{(L)} \geq n_{(J)} > n_{(R)}$, wówczas $\vartheta_G < \vartheta_G^{(J)} = \frac{\pi}{2}$. Wynikający z prawa Snella kąt graniczny to $\vartheta_{J,0} = \arcsin \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}} \leq \vartheta_G$, zatem mody podłożowe warstwy $j = 0$, dla których $\vartheta_{J,0} < \vartheta \leq \vartheta_G$ nie mają odpowiedników w J -tej warstwie.
3. $n_{(L)} \geq n_{(0)} \geq n_{(J)} > n_{(R)}$, wówczas $\vartheta_G = \vartheta_G^{(J)} = \frac{\pi}{2}$. W tym przypadku jest podobnie jak w poprzednim: kąt graniczny $\vartheta_{J,0} = \arcsin \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}} \leq \frac{\pi}{2}$, a odpowiedników w J -tej warstwie nie mają mody podłożowe warstwy $j = 0$, dla których $\vartheta > \vartheta_{J,0}$.

Stąd, zbiory modów podłożowych warstw $j = 0$ i J -tej są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki załamania tych warstw są sobie równe lub nie mniejsze niż $n_{(L)}$.

Do rozpatrzenia pozostały jedynie mody prowadzone. Mody tego typu występują w j -tej warstwie dla kątów padania $\vartheta^{(j)} > \vartheta_G^{(j)}$, przy których spełniony jest warunek (4.23b). Jak wynika ze wzoru (3.37), warunek ten jest zawsze jednocześnie spełniony we wszystkich warstwach, w których mod o wynikającym z prawa Snella kącie padania byłby typu prowadzonego. Wystarczy więc sprawdzić, kiedy prawo Snella może być spełnione, a jedyna możliwość wystąpienia modów prowadzonych pojawia się przy $n_{(0)} \geq n_{(J)} > n_{(L)}$. Kąt graniczny

$\vartheta_{J,0} = \arcsin \frac{n_{(J)}}{n_{(0)}} \leq \frac{\pi}{2}$ określa maksymalny kąt padania, przy którym mod prowadzony z warstwy $j = 0$ może być równoważny pewnemu modowi z J -tej warstwy, a dla $\vartheta > \vartheta_{J,0}$ taki odpowiednik nie istnieje. Zatem, zbiory modów prowadzonych dwóch warstw są równoważne jeżeli współczynniki załamania tych warstw są równe lub warstwa o wyższym współczynniku załamania nie ma modów prowadzonych o kątach padania większych niż, odpowiednio, $\vartheta_{J,0}$ lub $\vartheta_{0,J}$.

Podsumowując, można wskazać tylko dwa przypadki, w których zbiory wszystkich modów o rzeczywistych wektorach falowych dwóch warstw są równoważne:

1. Współczynniki załamania tych warstw są sobie równe.
2. Współczynniki załamania tych warstw są nie mniejsze niż $n_{(L)}$ i w warstwie o wyższym współczynniku załamania nie występuje mod prowadzony, którego kąt padania jest na tyle duży, aby nie było możliwe spełnienie prawa Snella dla tych dwóch warstw.

We wszystkich pozostałych przypadkach równoważne mogą być co najwyżej pewne podzbiory modów o rzeczywistych wektorach falowych tych warstw.

4.7. Związek modelu efektywnego rezonatora z modelem Carnigli-Mandela

W modelu Carnigli-Mandela rozkłady pola w strukturze wielowarstwowego falowodu płanarnego otrzymuje się jako superpozycję pól pochodzących od fali padającej z lewej strony i fali padającej z prawej strony (mody promieniowania) lub tylko jednej z fal, padającej pod odpowiednio dużym kątem z zewnętrznego obszaru o większym współczynniku załamania (mody podłożowe)⁹. Fale te można w następujący sposób przedstawić za pomocą notacji przyjętej w modelu efektywnego rezonatora:

$$\mathbf{h}_{Rk\epsilon}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{f}_{k\epsilon}^{(R)}(\mathbf{r}), \quad \text{dla } k_z \leq 0, \quad (4.73a)$$

$$\mathbf{h}_{Lk\epsilon}(\mathbf{r}) \equiv \mathbf{f}_{k\epsilon}^{(L)}(\mathbf{r}), \quad \text{dla } k_z \geq 0, \quad (4.73b)$$

gdzie $\mathbf{f}_{k\epsilon}^{(R,L)}$ oznacza mod pochodzący od fali w odpowiednim obszarze zewnętrznym. Wektory falowe powyższych modów są wyłącznie rzeczywiste. Przy założeniu $n_{(L)} \geq n_{(R)}$ wszystkie mody $\mathbf{h}_{Rk\epsilon}$ są modami promieniowania, natomiast wśród modów $\mathbf{h}_{Lk\epsilon}$ występują mody promieniowania oraz także mody podłożowe, gdy $n_{(L)} > n_{(R)}$. Z warunków równoważności dla modów promieniowania o wektorach rzeczywistych wynika, że zbiory wszystkich modów promieniowania $\mathbf{h}_{Rk\epsilon}$ i $\mathbf{h}_{Lk\epsilon}$ przy $k_z \geq 0$ są zawsze równoważne, co oznacza, że można za ich pomocą odtworzyć pełen zbiór wszystkich modów promieniowania modelu efektywnego rezonatora w dowolnym obszarze zewnętrznym i w dowolnej warstwie. Mody promieniowania z modelu Carnigli-Mandela można powiązać z modami promieniowania w modelu efektywnego

⁹ Model ten należy także uzupełnić o mody prowadzone, identyczne jak w modelu efektywnego rezonatora.

rezonatora za pomocą związku (4.67). Z przeprowadzonej w poprzednim podrozdziale dyskusji wynika również, że mody podłożowe w modelu Carnigli-Mandela pozwalają odtworzyć mody podłożowe dowolnej warstwy, które można otrzymać z (4.62). Mody prowadzone również są jednakowe w obydwu modelach, co wynika wprost ze sposobu, w jaki model Carnigli-Mandela został o nie uzupełniony – są to mody prowadzone warstwy o najwyższym współczynniku załamania. Zatem, model Carnigli-Mandela uzupełniony o mody prowadzone i model efektywnego rezonatora są sobie równoważne, tzn. zbiory modów Carnigli-Mandela i modów dowolnej warstwy falowodu planarnego wyznaczone w modelu efektywnego rezonatora są równoważne. Ponieważ, jak zostało uzasadnione, model efektywnego rezonatora jest najogólniejszym możliwym modelem pola elektromagnetycznego w strukturze warstwowej, model Carnigli-Mandela, będąc mu równoważnym, również poprawnie opisuje pole elektromagnetyczne w takiej strukturze. Ponieważ w niniejszej pracy nie została rozpatrzona struktura zbudowana z materiałów stratnych, wniosek ten nie musi być prawdziwy w przypadku struktury zbudowanej z materiałów stratnych. W strukturze takiej pole elektromagnetyczne zanika w trakcie propagacji, zatem można spodziewać się, że fale padające z zewnątrz nie będą w stanie odtworzyć rozkładu pola pochodzącego od fali w środku struktury. W takiej sytuacji, model Carnigli-Mandela nie byłby poprawnym modelem i należałoby stosować jedynie model efektywnego rezonatora.

5. Teoria emisji spontanicznej

W rozdziale tym przedstawiona jest teoria emisji spontanicznej fotonu przez pojedynczy atom w ośrodku o strukturze jednowymiarowego kryształu fotonicznego. Teoria ta jest oparta na kwantowym formalizmie, opisanym np. w [10, 12, 96, 97], który prowadzi do wyrażenia opisującego szybkość relaksacji atomu w ogólnym przypadku. Stosując opis pola elektromagnetycznego za pomocą modelu efektywnego rezonatora otrzymuje się następnie wkłady do szybkości relaksacji od modów poszczególnych typów w rozważanej strukturze. Z dokonanego wyprowadzenia wynika, że wkłady modów do szybkości emisji spontanicznej oraz prawdopodobieństwo emisji do konkretnego modu są wprost proporcjonalne do widma modowego, otrzymuje się zatem wygodny opis zjawiska, który autor rozprawy przedstawił także w publikacji [80].

5.1. Hamiltonian swobodnego pola elektromagnetycznego i układu atomowego

Swobodne pole elektromagnetyczne w obszarze wypełnionym dielektrykami, w teorii kwantowej opisywane jest za pomocą hamiltonianu [12]

$$\hat{H}_{\text{em}} = \frac{1}{2} \int d^3r : \left(\varepsilon_0 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^2(\mathbf{r}) + \frac{(\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{\mu_0} \right) :, \quad (5.1)$$

w którym \mathbf{E} i \mathbf{A} są operatorami pola elektrycznego i potencjału wektorowego, a para dwukropków oznacza uporządkowanie normalne operatorów¹, które się pomiędzy nimi znajdują. W dielektryku na operatory \mathbf{E} i \mathbf{A} nakłada się regułę komutacyjną [12]:

$$[A^i(\mathbf{r}), E^j(\mathbf{r}')] = -\frac{i\hbar}{\varepsilon_0} \delta_{\varepsilon\perp}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \quad (5.2)$$

gdzie $\delta_{\varepsilon\perp}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ jest dielektrycznym odpowiednikiem poprzecznej delty Diraca, tj. funkcjonalem o następującym działaniu²:

$$\int d^3r' \varepsilon(\mathbf{r}') \delta_{\varepsilon\perp}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f_{k\varepsilon}^j(\mathbf{r}') = f_{k\varepsilon}^i(\mathbf{r}). \quad (5.3)$$

¹ Uporządkowanie normalne tyczy się kolejności występowania w wyrażeniu operatorów kreacji i anihilacji – operatory kreacji umieszczane są z lewej strony, a anihilacji z prawej.

² Celem uzyskania zwięzłości zapisu, od tej pory dla górnych indeksów stosowana będzie konwencja sumacyjna, tj. sumowanie po wszystkich indeksach, które powtarzają się w danym wyrażeniu.

Dla tak zdefiniowanego funkcjonału można podać reprezentację³:

$$\delta_{\varepsilon\perp}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{k}, \varepsilon} f_{\mathbf{k}\varepsilon}^i(\mathbf{r}) f_{\mathbf{k}\varepsilon}^{j*}(\mathbf{r}'), \quad (5.4)$$

po czym łatwo jest sprawdzić, że jest to funkcjonał rzeczywisty:

$$\delta_{\varepsilon\perp}^{ij*}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{\varepsilon\perp}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (5.5a)$$

oraz, że

$$\delta_{\varepsilon\perp}^{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta_{\varepsilon\perp}^{ji}(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \quad (5.5b)$$

Operatory \mathbf{A} i \mathbf{E} można rozwinąć w układzie modów warstwy, w której znajduje się promieniujący atom (przyjmując dla ustalenia uwagi dla tej warstwy indeks $j = 0$):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}, \varepsilon} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{\mathbf{k}}}} (a_{\mathbf{k}\varepsilon} \mathbf{f}_{\mathbf{k}\varepsilon}(\mathbf{r}) + a_{\mathbf{k}\varepsilon}^\dagger \mathbf{f}_{\mathbf{k}\varepsilon}^*(\mathbf{r})), \quad (5.6a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}, \varepsilon} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0}} (a_{\mathbf{k}\varepsilon} \mathbf{f}_{\mathbf{k}\varepsilon}(\mathbf{r}) - a_{\mathbf{k}\varepsilon}^\dagger \mathbf{f}_{\mathbf{k}\varepsilon}^*(\mathbf{r})). \quad (5.6b)$$

gdzie $a_{\mathbf{k}\varepsilon}$ i $a_{\mathbf{k}\varepsilon}^\dagger$ są operatorami anihilacji i kreacji fotonu, spełniającymi bozonowe reguły komutacyjne:

$$[a_{\mathbf{k}\varepsilon}, a_{\mathbf{q}\lambda}] = [a_{\mathbf{k}\varepsilon}^\dagger, a_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger] = 0, \quad (5.7a)$$

$$[a_{\mathbf{k}\varepsilon}, a_{\mathbf{q}\lambda}^\dagger] = \delta_{\varepsilon\lambda} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \quad (\text{mody promieniowania i podłożowe}), \quad (5.7b)$$

$$[a_{\mathbf{k}_a\varepsilon}, a_{\mathbf{q}_b\lambda}^\dagger] = \delta_{\varepsilon\lambda} \delta(k_x - q_x) \delta(k_y - q_y) \delta_{ab} \quad (\text{mody prowadzone}). \quad (5.7c)$$

Hamiltonian pola elektromagnetycznego przyjmuje wtedy postać charakterystyczną dla hamiltonianu układu niezależnych oscylatorów harmoniczych:

$$\hat{H}_{\text{em}} = \sum_{\mathbf{k}, \varepsilon} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \hat{N}_{\mathbf{k}\varepsilon}. \quad (5.8)$$

Operator

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\varepsilon} = a_{\mathbf{k}\varepsilon}^\dagger a_{\mathbf{k}\varepsilon} \quad (5.9a)$$

jest operatorem liczby obsadzeń modu (fotonów w tym modzie) o stanach własnych $|\dots n_{\mathbf{k}\varepsilon} \dots\rangle$:

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\varepsilon} |\dots n_{\mathbf{k}\varepsilon} \dots\rangle = n_{\mathbf{k}\varepsilon} |\dots n_{\mathbf{k}\varepsilon} \dots\rangle. \quad (5.9b)$$

Jego wartości własne $n_{\mathbf{k}\varepsilon} = 0, 1, 2, \dots$ odpowiadają liczbie fotonów w modzie pola o wektorze falowym \mathbf{k} i polaryzacji ε . Operatory anihilacji i kreacji w działaniu na te stany wytwarzają

³ Operator „sumocałki” zdefiniowany został w wyrażeniu (4.25) na stronie 44.

stany o liczbie fotonów w odpowiednim modzie różniące się o 1:

$$a_{k\epsilon} |\dots n_{k\epsilon} \dots\rangle = \sqrt{n_{k\epsilon}} |\dots (n_{k\epsilon} - 1) \dots\rangle, \quad (5.10a)$$

$$a_{k\epsilon}^\dagger |\dots n_{k\epsilon} \dots\rangle = \sqrt{n_{k\epsilon} + 1} |\dots (n_{k\epsilon} + 1) \dots\rangle. \quad (5.10b)$$

Stany te są stanami własnymi hamiltonianu \hat{H}_{em} i tworzą wygodną bazę przestrzeni Hilberta dla opisu pola elektromagnetycznego, tzw. bazę Focka.

Dla układu atomowego należy zdefiniować hamiltonian \hat{H}_{at} . Ponieważ celem pracy jest zbadanie wpływu struktury, można przyjąć najprostszą postać, tj. nierelatywistycznego hamiltonianu wielu elektronów w potencjale nieskończenie ciężkich jąder atomowych:

$$\hat{H}_{at} = \sum_a \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m} + \hat{V}, \quad (5.11a)$$

gdzie m jest masą elektronu, \mathbf{p}_a jest operatorem pędu a -tego elektronu, a \hat{V} operatorem energii potencjalnej, opisującym kulombowskie oddziaływania elektronów z jądrami atomowymi i pomiędzy sobą. Formalnie, jeżeli przez $|\Psi_i\rangle$ oznaczyć stany własne \hat{H}_{at} o energiach E_i , można napisać:

$$\hat{H}_{at} = \sum_i E_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|. \quad (5.11b)$$

Hamiltoniany \hat{H}_{at} i \hat{H}_{em} komutują: $[\hat{H}_{at}, \hat{H}_{em}] = 0$, ponieważ operują na różnych podprzestrzeniach, rozpiętych przez swoje stany własne. Wynika stąd, że można całą przestrzeń Hilberta rozpiąć na stanach będących iloczynami tensorowymi $|\Psi_i\rangle |\dots n_{k\epsilon} \dots\rangle \equiv |\Psi_i\rangle \otimes |\dots n_{k\epsilon} \dots\rangle$, które są jednocześnie stanami własnymi obydwu tych operatorów. Wektor stanu całego układu (pola i układu atomowego) można zatem zapisać jako:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i \sum_{(\dots n_{k\epsilon} \dots)} C_{i(\dots n_{k\epsilon} \dots)}(t) |\Psi_i\rangle |\dots n_{k\epsilon} \dots\rangle. \quad (5.12)$$

5.2. Oddziaływanie pola elektromagnetycznego z układem atomowym

Do opisu układu złożonego z pola elektromagnetycznego oddziaływającego z atomem lub cząsteczką należy zastosować hamiltonian postaci

$$\hat{H} = \hat{H}_{em} + \hat{H}_{at} + \hat{H}_{int}, \quad (5.13)$$

gdzie \hat{H}_{em} i \hat{H}_{at} zostały zdefiniowane powyżej, zaś \hat{H}_{int} jest hamiltonianem oddziaływania, wprowadzenie którego jest przedmiotem tego podrozdziału.

Oddziaływanie pola elektromagnetycznego z elektronem wprowadza się do opisu poprzez *minimalne sprzężenie*, polegające na zastąpieniu pędu elektronu swobodnego \mathbf{p}_a przez pęd kanoniczny elektronu w polu elektromagnetycznym $\boldsymbol{\pi}_a = \mathbf{p}_a - e\mathbf{A}_a$, gdzie $e < 0$ jest ładunkiem

elektronu, zaś $\mathbf{A}_a \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}_a)$ oznacza potencjał wektorowy w położeniu a -tego elektronu. Zatem, w próżni:

$$\hat{H}_{\text{at}} + \hat{H}_{\text{int}}^{\text{vac}} = \sum_a \frac{\boldsymbol{\pi}_a^2}{2m} + \hat{V}. \quad (5.14)$$

Rozpisując $\boldsymbol{\pi}_a^2$ otrzymuje się m.in. wyraz proporcjonalny do \mathbf{A}_a^2 , który można zaniedbać, gdyż wpływa on jedynie na nieznaczne przesunięcie poziomów atomu, a nie na samą szybkość emisji spontanicznej. Wtedy:

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\text{vac}} = -\frac{e}{m} \sum_a \mathbf{A}_a \cdot \mathbf{p}_a. \quad (5.15)$$

Z uwagi na to, że $[r_a^i, p_b^j] = i\hbar\delta_{ab}\delta^{ij}$, pęd \mathbf{p}_a można przepisać jako

$$p_a^i = \frac{m}{i\hbar} [r_a^i, \hat{H}_{\text{at}}], \quad (5.16)$$

wówczas

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\text{vac}} = \frac{ie}{\hbar} \sum_a A_a^i [r_a^i, \hat{H}_{\text{at}}]. \quad (5.17)$$

Następnie, jeżeli przedmiotem zainteresowania są przejścia pomiędzy poziomami atomu stanowiącego domieszkę, można zastosować tzw. *przybliżenie dipolowe*. Można przeprowadzić rachunki także dla elektronów znajdujących się w pasmach obejmujących całą warstwę dielektryczną, jak np. w pracy [98], jednak ponieważ przypadek zlokalizowanych poziomów atomowych jest fizycznie interesujący, gdyż np. w laserach ciała stałego akcja laserowa zachodzi właśnie pomiędzy poziomami atomowymi domieszki, założmy, że badana jest emisja spontaniczna z atomu zlokalizowanego w pewnej małej objętości. Ponieważ długości fal światła są o rzędy wielkości większe, niż średnica atomu, (5.17) można dodatkowo uprościć przyjmując, że pole elektromagnetyczne zmienia się bardzo mało w objętości atomu: $\mathbf{A}_a \approx \mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$, gdzie \mathbf{r}_0 oznacza jego położenie. W tym przybliżeniu⁴

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\text{vac}} = \frac{i}{\hbar} A^i(\mathbf{r}_0) [d^i, \hat{H}_{\text{at}}], \quad (5.18)$$

gdzie operator elektrycznego momentu dipolowego

$$\mathbf{d} = \sum_a e\mathbf{r}_a. \quad (5.19)$$

Elementy macierzowe tego operatora $\mathbf{d}_{ij} = \langle \Psi_i | \mathbf{d} | \Psi_j \rangle$ odpowiadają momentom dipolowym przejść pomiędzy poziomami atomowymi i określają siłę sprzężenia z polem elektromagnetycznym.

⁴ Hamiltonian oddziaływania w tej postaci jest zbliżony do często stosowanego wyrażenia proporcjonalnego do $\mathbf{E} \cdot \mathbf{d}$, które odtwarzałby, gdyby zachodziło $[d, \hat{H}_{\text{int}}^{\text{vac}}] = 0$ – wówczas komutator w (5.18) byłby równoważny pochodnej po czasie, którą można by przenieść (całkując przez części) na potencjał wektorowy, otrzymując w ten sposób pole elektryczne. Jednakże, przy N elektronach, $[d, \hat{H}_{\text{int}}] \approx -i\hbar \frac{Ne^2}{m} \mathbf{A}(\mathbf{r}_0) \neq 0$.

Opis przejść atomowych staje się bardziej przejrzysty, jeżeli zdefiniować *operator relaksacji* R o składowych R^α , których elementy macierzowe

$$\langle \Psi_i | R^\alpha | \Psi_j \rangle = d_{ij}^\alpha \theta(E_j - E_i). \quad (5.20a)$$

Działanie tego operatora odpowiada przejściu na stan o niższej energii, natomiast elementy macierzowe składowych jego sprzężenia hermitowskiego dane są wyrażeniem:

$$\langle \Psi_i | R^{\alpha\dagger} | \Psi_j \rangle = d_{ij}^{\alpha*} \theta(E_i - E_j), \quad (5.20b)$$

a zatem działanie operatora R^\dagger powoduje przejście na stan o wyższej energii. Operator momentu dipolowego można rozpisać jako:

$$\mathbf{d} = R + R^\dagger. \quad (5.21)$$

Wówczas, w hamiltonianie \hat{H}_{int} w dotychczasowej postaci pojawiają się wyrazy typu $a_{k\epsilon}^\dagger R$ i $R^\dagger a_{k\epsilon}$, które odpowiadają przejściu atomu na stan o niższej energii z emisją fotonu oraz absorpcji fotonu ze wzbudzeniem atomu, które opisują zachodzące procesy oddziaływania, a także wyrazy typu $a_{k\epsilon}^\dagger R^\dagger$ i $R a_{k\epsilon}$, które odpowiadają jednoczesnej emisji fotonu i wzbudzeniu atomu lub relaksacji atomu i absorpcji fotonu – opisują one przejścia wirtualne, nie zachowujące liczby cząstek i zostaną w dalszej części wyprowadzenia zaniechane, co odpowiada klasycznemu przybliżeniu wirującej fali. Wtedy:

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\text{vac}} = \frac{i}{\sqrt{2\hbar\epsilon_0}} \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \frac{[R^\dagger, \hat{H}_{\text{at}}] a_{k\epsilon} f_{k\epsilon}^i(\mathbf{r}_0) + a_{k\epsilon}^\dagger f_{k\epsilon}^{i*}(\mathbf{r}_0) [R, \hat{H}_{\text{at}}]}{\sqrt{\omega_k}}. \quad (5.22)$$

W przypadku atomu w dielektryku, należy również uwzględnić, że jego elektrony oddziałują nie z polem makroskopowym, znalezionym jako rozwiązanie równań Maxwella, lecz z mikroskopowym polem lokalnym [12]. Efekt ten można wprowadzić do opisu fenomenologicznie, poprzez czynnik $\mathcal{L}_{\text{diel}}$, zdefiniowany jako stosunek natężenia lokalnego pola elektrycznego do natężenia makroskopowego pola elektrycznego. Ponieważ związek pomiędzy polem elektrycznym i potencjałem wektorowym jest liniowy, równie dobrze można ten czynnik zastosować dla potencjału wektorowego. Ostatecznie, hamiltonian oddziaływania w ośrodku dielektrycznym przyjmuje postać:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \frac{i\mathcal{L}_{\text{diel}}}{\sqrt{2\hbar\epsilon_0}} \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \frac{[R^{i\dagger}, \hat{H}_{\text{at}}] a_{k\epsilon} f_{k\epsilon}^i(\mathbf{r}_0) + a_{k\epsilon}^\dagger f_{k\epsilon}^{i*}(\mathbf{r}_0) [R^i, \hat{H}_{\text{at}}]}{\sqrt{\omega_k}}. \quad (5.23)$$

Na tym etapie nie ma konieczności definiowania $\mathcal{L}_{\text{diel}}$ poprzez konkretne wyrażenie, a ponieważ zależy ono od przyjętej teorii, najwygodniej jest możliwie długo tego unikać. Z równania Schrödingera wynikają więc następujące równania ruchu amplitud prawdopodobieństwa:

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{d}{dt} C_{i(\dots n_{k\epsilon} \dots)}(t) &= \left(E_i + \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \hbar \omega_k n_{k\epsilon} \right) C_{i(\dots n_{k\epsilon} \dots)}(t) - i\mathcal{L}_{\text{diel}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0}} \sum_j \sum_{(\dots n'_{k\epsilon} \dots)} C_{j(\dots n'_{k\epsilon} \dots)}(t) \\
&\times \Omega_{ij} \mathbf{d}_{ij} \cdot \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \left(\sqrt{\frac{n'_{k\epsilon}}{\omega_k}} \langle \dots n_{k\epsilon} \dots | \dots (n'_{k\epsilon} - 1) \dots \rangle \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}_0) \theta(E_i - E_j) \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{\frac{n_{k\epsilon}}{\omega_k}} \langle \dots (n_{k\epsilon} - 1) \dots | \dots n'_{k\epsilon} \dots \rangle \mathbf{f}_{k\epsilon}^*(\mathbf{r}_0) \theta(E_j - E_i) \right), \quad (5.24)
\end{aligned}$$

gdzie $\Omega_{ij} = (E_i - E_j)/\hbar$. W niektórych z dalszych obliczeń wygodniej będzie stosować znormalizowaną częstotliwość przejścia

$$\Theta_{ij} = \frac{\Omega_{ij}}{2\pi f_0} \quad (5.25)$$

w miejsce Ω_{ij} .

5.3. Szybkość emisji spontanicznej z pojedynczego atomu

Emisja spontaniczna to proces, w którym w wyniku przejścia wzbudzonego atomu na poziom o niższej energii emitowany jest pojedynczy foton. Tak więc, do opisu tego zjawiska przestrzeń Hilberta dla \hat{H}_{at} można ograniczyć do jedynie dwóch stanów $|\Psi_0\rangle$ i $|\Psi_1\rangle$ (o energiach $E_1 > E_0$), a przestrzeń Hilberta dla \hat{H}_{em} do stanów $|0\rangle$ – bez fotonów, oraz $|1_{k\epsilon}\rangle$ – z jednym fotonem w modzie o wektorze falowym \mathbf{k} i polaryzacji ϵ . Stanowi wzbudzonemu $|\Psi_1\rangle$ musi towarzyszyć stan bez fotonów $|0\rangle$, zaś stanowi atomu o niższej energii $|\Psi_0\rangle$ – stan z jednym fotonem. Odpowiedni wektor stanu ma więc postać:

$$|\psi(t)\rangle = C_0(t) |\Psi_1\rangle |0\rangle + \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} C_{k\epsilon}(t) |\Psi_0\rangle |1_{k\epsilon}\rangle, \quad (5.26)$$

zaś warunki początkowe, odpowiednie dla emisji spontanicznej, zadane są przez:

$$C_0(t) = 1, \quad C_{k\epsilon}(t) = 0. \quad (5.27)$$

Podążając według wyprowadzenia przedstawionego w [97], po podstawieniach:

$$C_0(t) = b_0(t) \exp\left(-\frac{iE_1 t}{\hbar}\right), \quad (5.28a)$$

$$C_{k\epsilon}(t) = b_{k\epsilon}(t) \exp\left(-i\frac{\hbar\omega_k + E_0}{\hbar} t\right), \quad (5.28b)$$

gdzie $b_0(t)$ i $b_{k\epsilon}(t)$ są amplitudami prawdopodobieństwa w obrazie oddziaływania, równania ruchu przekształcają się do postaci:

$$\frac{db_0}{dt} = \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} g_{k\epsilon} b_{k\epsilon}(t) e^{i(\Omega_{10} - \omega_k)t}, \quad (5.29a)$$

$$\frac{db_{k\epsilon}}{dt} = -g_{k\epsilon}^* b_0(t) e^{i(\omega_k - \Omega_{10})t}, \quad (5.29b)$$

gdzie

$$g_{k\epsilon} = \frac{\langle 0 | \langle \Psi_1 | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi_0 \rangle | k\epsilon \rangle}{i\hbar}. \quad (5.30)$$

W rozpatrywanym przypadku:

$$g_{k\epsilon} = -\frac{\mathcal{L}_{\text{diel}} \Omega_{10} \mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{r}_0)}{\sqrt{2\varepsilon_0 \hbar \omega_k}}. \quad (5.31)$$

Symetria struktury pozwala przyjąć położenie źródła $\mathbf{r}_0 = z_0 \mathbf{e}_z$. Formalne rozwiązanie (5.29b) można znaleźć wykonując całkowanie po czasie:

$$b_{k\epsilon}(t) = -g_{k\epsilon}^* \int_0^t d\tau b_0(\tau) e^{i(\omega_k - \Omega_{10})\tau}, \quad (5.32)$$

wtedy:

$$\frac{db_0}{dt} = -\sum_{\mathbf{k}, \epsilon} |g_{k\epsilon}|^2 \int_0^t d\tau b_0(\tau) e^{i(\Omega_{10} - \omega_k)(t-\tau)}. \quad (5.33)$$

Zakładając, że b_0 zmienia się nieznacznie w przedziale czasu od 0 do t i wyciągając tę amplitudę jako stałą przed całką (przybliżenie procesu Markowa) otrzymuje się:

$$\frac{db_0}{dt} = -\sum_{\mathbf{k}, \epsilon} |g_{k\epsilon}|^2 b_0(t) \int_0^t d\tau e^{i(\Omega_{10} - \omega_k)(t-\tau)}. \quad (5.34)$$

W granicy $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t d\tau e^{i(\Omega_{10} - \omega_k)(t-\tau)} = \pi \delta(\Omega_{10} - \omega_k) - \mathcal{P} \frac{i}{\Omega_{10} - \omega_k}, \quad (5.35)$$

gdzie \mathcal{P} oznacza wartość główną całki. Wyraz z deltą Diraca opisuje rozpad i na jego podstawie należy wyznaczać szybkość emisji spontanicznej. Wyraz z częścią główną opisuje przesunięcie linii $\delta\omega$ i nie będzie dalej rozpatrywany w obliczeniach. W granicy dużego czasu t :

$$\frac{db_0}{dt} = \left(-\frac{\Gamma}{2} + i\delta\omega \right) b_0(t), \quad (5.36)$$

zatem

$$b_0(t) = \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2}\right) e^{i\delta\omega t}, \quad (5.37)$$

gdzie

$$\Gamma = \Gamma_{\text{RM}} + \Gamma_{\text{SM}} + \Gamma_{\text{GM}} \quad (5.38)$$

jest szybkością emisji spontanicznej. Mody różnych typów dają następujące wkłady do Γ :

$$\Gamma_{\text{RM}} = 2\pi \sum_{\epsilon} \int_{\text{RM}} d^3k |g_{k\epsilon}|^2 \delta(\Omega_{10} - \omega_k), \quad (5.39a)$$

$$\Gamma_{\text{SM}} = 2\pi \sum_{\epsilon} \int_{\text{SM}} d^3k |g_{k\epsilon}|^2 \delta(\Omega_{10} - \omega_k), \quad (5.39b)$$

$$\Gamma_{\text{GM}} = 2\pi \sum_{\epsilon} \int d^2k_{\parallel} \sum_{a \in \text{GM}(k_{\parallel}, \epsilon)} |g_{ka\epsilon}|^2 \delta(\Omega_{10} - \omega_{ka}). \quad (5.39c)$$

W próżni wyrażenie na Γ sprowadza się do wyrażenia otrzymanego po raz pierwszy przez Weisskopfa i Wignera [11]:

$$\Gamma^{\text{fs}} = \frac{\mu_0 \Omega_{10}^3 |\mathbf{d}_{10}|^2}{3\pi \hbar c}. \quad (5.40)$$

Znając b_0 , można podać również rozwiązanie na $b_{k\epsilon}$, które w granicy $t \rightarrow \infty$ prowadzi do:

$$|b_{k\epsilon}(t)|^2 = \frac{|g_{k\epsilon}|^2}{(\omega_k + \delta\omega - \Omega_{10})^2 + \Gamma^2/4}. \quad (5.41)$$

W pobliżu rezonansu wyrażenie to dobrze odtwarza lorentzowski kształt linii. Ważnym wnioskiem jest spostrzeżenie, iż prawdopodobieństwo znalezienia wyemitowanego fotonu w modzie o wektorze falowym \mathbf{k} i polaryzacji ϵ jest proporcjonalne do $|g_{k\epsilon}|^2$, tak samo, jak wkład tego modu do Γ . Można zatem wymiennie mówić o prawdopodobieństwie emisji do konkretnego modu lub jego wkładzie do szybkości relaksacji.

5.4. Emisja spontaniczna w jednowymiarowym kryształach fonicznych

Po wyprowadzeniu wzorów (5.39) można zastosować otrzymane w modelu efektywnego rezonatora rozkłady pól, uzyskując w ten sposób opis emisji spontanicznej właściwy temu modelowi. Opis taki, opublikowany w pracy autora niniejszej rozprawy [80], jest bardzo wygodny, gdyż wkład do Γ od każdego modu okazuje się być proporcjonalny do widma modowego. Dzięki temu, widmo modowe stanowi wielkość charakteryzującą emisję w dowolnej warstwie, co pozwala na prostą analizę tej własności struktury. Stanowi to przewagę tego opisu nad opartym na gęstości stanów, np. jak w pracy [83], gdyż informacja o właściwościach struktury ukryta jest tylko w jednej wielkości (widmie modowym), podczas gdy gęstość stanów niesie ze sobą tylko informację o strukturze jako całości, zaś analiza poszczególnych jej fragmentów wymaga dodatkowo liczenia rozkładów pola i operacji na nich.

Całkowanie $|g_{k\epsilon}|^2$ niezbędne do obliczenia wartości Γ w jednowymiarowym kryształach fonicznych najłatwiej jest wykonać w układzie sferycznym (k, ϑ, φ) , gdzie ϑ oznacza kąt padania, zaś φ – kąt azymutalny. Całkowanie po kącie φ daje się wykonać bardzo łatwo. Pole każdego modu $\mathbf{f}_{k\text{TE}}$ leży w płaszczyźnie xy i daje się zapisać w funkcji φ jako:

$$\mathbf{f}_{k\text{TE}} = P_k (\mathbf{e}_y \cos\varphi - \mathbf{e}_x \sin\varphi), \quad (5.42)$$

gdzie

$$P_k = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{f}_{k\text{TE}} \Big|_{\varphi=0}. \quad (5.43)$$

Moment dipolowy przejścia można rozpisać na składowe równoległą i prostopadłą do granic warstw:

$$\mathbf{d}_{10} = \mathbf{d}_{\parallel} + d_z \mathbf{e}_z, \quad (5.44)$$

Wtedy:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi |\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{f}_{k\text{TE}}|^2 = \pi |\mathbf{d}_{\parallel}|^2 |P_k|^2. \quad (5.45)$$

Pole elektryczne każdego modu $\mathbf{f}_{k\text{TM}}$ leży w płaszczyźnie padania i można je zapisać w funkcji φ jako:

$$\mathbf{f}_{k\text{TM}} = Q_{k\parallel} (\mathbf{e}_x \cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\varphi) + Q_{k\perp} \mathbf{e}_z, \quad (5.46)$$

gdzie

$$Q_{k\parallel} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_{k\text{TM}} \Big|_{\varphi=0} \quad (5.47a)$$

oraz

$$Q_{k\perp} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f}_{k\text{TM}}. \quad (5.47b)$$

Stąd:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi |\mathbf{d}_{10} \cdot \mathbf{f}_{k\text{TM}}|^2 = \pi |\mathbf{d}_{\parallel}|^2 |Q_{k\parallel}|^2 + 2\pi |d_z|^2 |Q_{k\perp}|^2. \quad (5.48)$$

Całkowanie po kącie padania ϑ należy wykonać numerycznie.

5.4.1. Mody promieniowania

Mody promieniowania występują dla kątów padania takich, że $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_S$ lub $\pi - \vartheta_S \leq \vartheta \leq \pi$, gdzie

$$\vartheta_S = \arcsin \frac{\min \{n_{(0)}, n_{(L)}, n_{(R)}\}}{n_{(0)}}. \quad (5.49)$$

Wkład modów prowadzonych do szybkości emisji spontanicznej Γ_{RM} wyraża się wzorem:

$$\Gamma_{\text{RM}} = \frac{2\pi n_{(0)}^3 \Omega_{10}^2}{c^3} \sum_{\epsilon} \int_0^{\vartheta_S} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[|g_{k\epsilon}|^2 + |g_{k*\epsilon}|^2 \right]_{k=n_{(0)}\Omega_{10}/c}. \quad (5.50)$$

W drugiej całce po φ można zamienić zmienną całkowania na $\varphi + \pi$ otrzymując $|g_{-k\epsilon}|$ w miejsce $|g_{k*\epsilon}|$. Ponieważ $|g_{-k\epsilon}| = |g_{k\epsilon}|$, a całkowanie po φ można wykonać analitycznie, po kilku przekształceniach dochodzi się do wyrażenia:

$$\Gamma_{\text{RM}} = \frac{6\pi^3 n_{(0)}^3 \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 \Gamma^{\text{fs}}}{|\mathbf{d}_{10}|^2} \int_{\eta_S}^1 d\eta \left[|\mathbf{d}_{\parallel}|^2 \left(|P_k|^2 + |Q_{k\parallel}|^2 \right) + 2 |d_z|^2 |Q_{k\perp}|^2 \right]_{\theta=\theta_{10}}, \quad (5.51)$$

gdzie $\eta_S = \cos\vartheta_S$ oraz

$$|P_k|^2 = \frac{\rho_{\text{TE}}(\mathbf{k})}{n_{(0)}^2} \left(1 + \text{Re} \left\{ \xi_{\text{TE}}(\mathbf{k}) e^{2ik_z z_0} \right\} \right), \quad (5.52a)$$

$$|Q_{k\parallel}|^2 = \eta^2 \frac{\rho_{\text{TM}}(\mathbf{k})}{n_{(0)}^2} \left(1 - \text{Re} \left\{ \xi_{\text{TM}}(\mathbf{k}) e^{2ik_z z_0} \right\}\right), \quad (5.52b)$$

$$|Q_{k\perp}|^2 = (1 - \eta^2) \frac{\rho_{\text{TM}}(\mathbf{k})}{n_{(0)}^2} \left(1 + \text{Re} \left\{ \xi_{\text{TM}}(\mathbf{k}) e^{2ik_z z_0} \right\}\right). \quad (5.52c)$$

W próżni, gdzie wszystkie mody są typu promieniowania, (5.51) poprawnie odtwarza wynik Weisskopfa i Wignera (5.40).

Warte podkreślenia jest to, że *wkłady poszczególnych modów promieniowania do szybkości emisji spontanicznej są proporcjonalne do widma modowego*. Oznacza to, że widmo modowe opisuje wprost wkład modu do szybkości emisji spontanicznej, a co za tym idzie, *wszelkie informacje na temat struktury odczytane z widma modowego przenoszą się także na szybkość tego procesu*. Między innymi, zgodnie z przeprowadzoną dyskusją widma modowego zdefektowanego kryształu fotonicznego oznacza to, że *szybkość emisji spontanicznej do modu defektowego maleje w warstwach wraz z ich odległością od warstwy zdefektowanej i ma na nią wpływ położenie warstwy zdefektowanej w strukturze*. Dowodzi to prawdziwości postawionych w niniejszej rozprawie tez.

5.4.2. Mody podłożowe

Mody podłożowe występują w przedziałach kątów padania $\vartheta_S < \vartheta < \vartheta_G$ oraz $\pi - \vartheta_G < \vartheta < \pi - \vartheta_S$, gdzie

$$\vartheta_G = \arcsin \frac{\min \left\{ n_{(0)}, \max \left\{ n_{(L)}, n_{(R)} \right\} \right\}}{n_{(0)}}. \quad (5.53)$$

Jednakże, ponieważ mody podłożowe w obydwu tych przedziałach powtarzają się⁵, należy do obliczeń wybrać tylko jeden z nich. Zatem, dają one wkład do szybkości emisji spontanicznej:

$$\Gamma_{\text{SM}} = \frac{3\pi^3 n_{(0)}^3 \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 \Gamma^{\text{fs}}}{|\mathbf{d}_{10}|^2} \int_{\eta_G}^{\eta_S} d\eta \left[|\mathbf{d}_{\parallel}|^2 \left(|P_k|^2 + |Q_{k\parallel}|^2 \right) + 2 |\mathbf{d}_z|^2 |Q_{k\perp}|^2 \right]_{\theta=\theta_{10}}, \quad (5.54)$$

gdzie $\eta_G = \cos \vartheta_G$. Dla modów podłożowych:

$$|P_k|^2 = 2 \frac{\rho_{\text{TE}}(\mathbf{k})}{n_{(0)}^2} \left(1 + \text{Re} \left\{ \xi_{\text{TE}}(\mathbf{k}) e^{2ik_z z_0} \right\}\right), \quad (5.55a)$$

$$|Q_{k\parallel}|^2 = 2\eta^2 \frac{\rho_{\text{TM}}(\mathbf{k})}{n_{(0)}^2} \left(1 - \text{Re} \left\{ \xi_{\text{TM}}(\mathbf{k}) e^{2ik_z z_0} \right\}\right), \quad (5.55b)$$

$$|Q_{k\perp}|^2 = 2(1 - \eta^2) \frac{\rho_{\text{TM}}(\mathbf{k})}{n_{(0)}^2} \left(1 + \text{Re} \left\{ \xi_{\text{TM}}(\mathbf{k}) e^{2ik_z z_0} \right\}\right). \quad (5.55c)$$

Z wyników tych widać, że widmo modowe opisuje mody podłożowe w taki sam sposób, jak w przypadku modów promieniowania.

⁵ Dzieje się tak, gdyż dla modów podłożowych $|s_{k\epsilon}| = 1$, a wówczas zachodzi tożsamość $s_{k\epsilon} \mathbf{f}_{k*\epsilon} = \mathbf{f}_{k\epsilon}$ – patrz roz. 4.4.2.

5.4.3. Mody prowadzone

Mody prowadzone występują dla kątów padania ϑ_a z przedziałów $\vartheta_G \leq \vartheta_a \leq \pi/2$ oraz $\pi/2 \leq \vartheta_a \leq \pi - \vartheta_G$. Tak jak w przypadku modów podłożowych, mody prowadzone (o jednokowej polaryzacji) dla kątów ϑ_a i $\pi - \vartheta_a$ są faktycznie tym samym modem, dlatego sumowanie trzeba ograniczyć do tylko jednego z przedziałów. Kąty padania modów prowadzonych określa warunek (4.23b)

$$e^{i\phi_a} \equiv r_R r_L e^{2ik_{z,a}L_z} = 1, \quad (5.56)$$

który pozwala odnaleźć zależność kosinusa kąta padania w funkcji znormalizowanej częstotliwości $\eta_a(\Theta)$. Skoro

$$k_{z,a} = \frac{2\pi n_{(0)} \Theta \eta_a(\Theta)}{\Lambda}, \quad (5.57)$$

a dla modu prowadzonego $|r_L| = |r_R| = 1$ oraz

$$\frac{d\phi_a}{d\Theta} = 0, \quad (5.58)$$

ze wzoru na pochodną funkcji w postaci uwikłanej otrzymuje się równanie różniczkowe

$$\frac{d\eta_a}{d\Theta} = - \frac{\text{Im} \left\{ \frac{1}{r_L r_R} \frac{\partial}{\partial \Theta} (r_L r_R) \right\} + 4\pi \eta_a \frac{\Lambda^{(0)}}{\Lambda}}{\text{Im} \left\{ \frac{1}{r_L r_R} \frac{\partial}{\partial \eta} (r_L r_R) \right\} + 4\pi \Theta \frac{\Lambda^{(0)}}{\Lambda}}, \quad (5.59)$$

które można rozwiązać numerycznie.

Ponieważ

$$k_{\parallel} = \frac{2\pi n_{(0)} \Theta \sqrt{1 - \eta_a^2(\Theta)}}{\Lambda}, \quad (5.60)$$

całkowanie po k_{\parallel} można zastąpić przez całkowanie po Θ , które wykonuje się natychmiast, gdyż

$$\delta(\Omega_{10} - \omega_{k_a}) = \frac{\delta(\Theta - \Theta_{10})}{2\pi f_0}, \quad (5.61)$$

i otrzymuje się następujący wkład modów prowadzonych do szybkości emisji spontanicznej:

$$\Gamma_{\text{GM}} = \frac{3\pi^2 n_{(0)}^2 \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 \Lambda \Gamma^{\text{fs}}}{2\Theta_{10} |\mathbf{d}_{10}|^2} \left[\sum_{a \in \text{GM}_{\Theta, \text{TE}}} |\mathbf{d}_{\parallel}|^2 |P_k|^2 \left| 1 - \eta_{a, \text{TE}}^2(\Theta) - \Theta \eta_{a, \text{TE}}(\Theta) \frac{d\eta_{a, \text{TE}}(\Theta)}{d\Theta} \right| \right. \quad (5.62)$$

$$\left. + \sum_{a \in \text{GM}_{\Theta, \text{TM}}} \left(|\mathbf{d}_{\parallel}|^2 |Q_{k_{\parallel}}|^2 + 2|\mathbf{d}_z|^2 |Q_{k_{\perp}}|^2 \right) \left| 1 - \eta_{a, \text{TM}}^2(\Theta) - \Theta \eta_{a, \text{TM}}(\Theta) \frac{d\eta_{a, \text{TM}}(\Theta)}{d\Theta} \right| \right]_{\Theta = \Theta_{10}},$$

gdzie $\text{GM}_{\Theta, \epsilon}$ oznacza zbiór modów prowadzonych o znormalizowanej częstotliwości Θ i polaryzacji ϵ . Wyrażenia na P_k , $Q_{k_{\parallel}}$ i $Q_{k_{\perp}}$ są takiej samej postaci jak dla modów podłożowych, aczkolwiek współczynniki $F_{k\epsilon}$ są w tym przypadku inaczej zdefiniowane. Można zauważyć, że w przypadku modów prowadzonych mają one wymiar długości, zatem stosunki $F_{k\epsilon}/\Lambda$ są

ozn.	Λ_1/Λ	n_1	n_2	$n_{(L)}$	$n_{(R)}$	$-N_L$	N_R	defekty
S1	0,65	3,0	1,6	1,0	1,0	12	12	
S2	0,5	1,4	1,2	1,1	1,0	30	30	
S3	0,5	1,4	1,2	1,1	1,0	20	20	$\Lambda^{(0)}/\Lambda = 0,7$

Tab. 5.1. Parametry struktur przyjęte do obliczeń.

bezwymiarowe. Warto także zwrócić uwagę na pojawiający się w Γ_{GM} czynnik

$$\left| 1 - \eta_{a,\epsilon}^2(\Theta) - \Theta \eta_{a,\epsilon}(\Theta) \frac{d\eta_{a,\epsilon}(\Theta)}{d\Theta} \right|, \quad (5.63)$$

który jest zaniedbany np. w pracy [68], poprzez założenie, że składowa wektora falowego k_z nie zmienia się z częstotliwością modu. Jest to rzeczywiście dobre przybliżenie dla dużych kątów padania, gdy $\eta \approx 0$ i dokładny wynik w rezonatorze, którego współczynniki odbicia nie zależą od częstotliwości i kąta padania. Jednak w wielowarstwowym falowodzie planarnym wartość tego czynnika potrafi całkiem istotnie odbiegać od jedności.

5.5. Przykładowe wyniki obliczeń

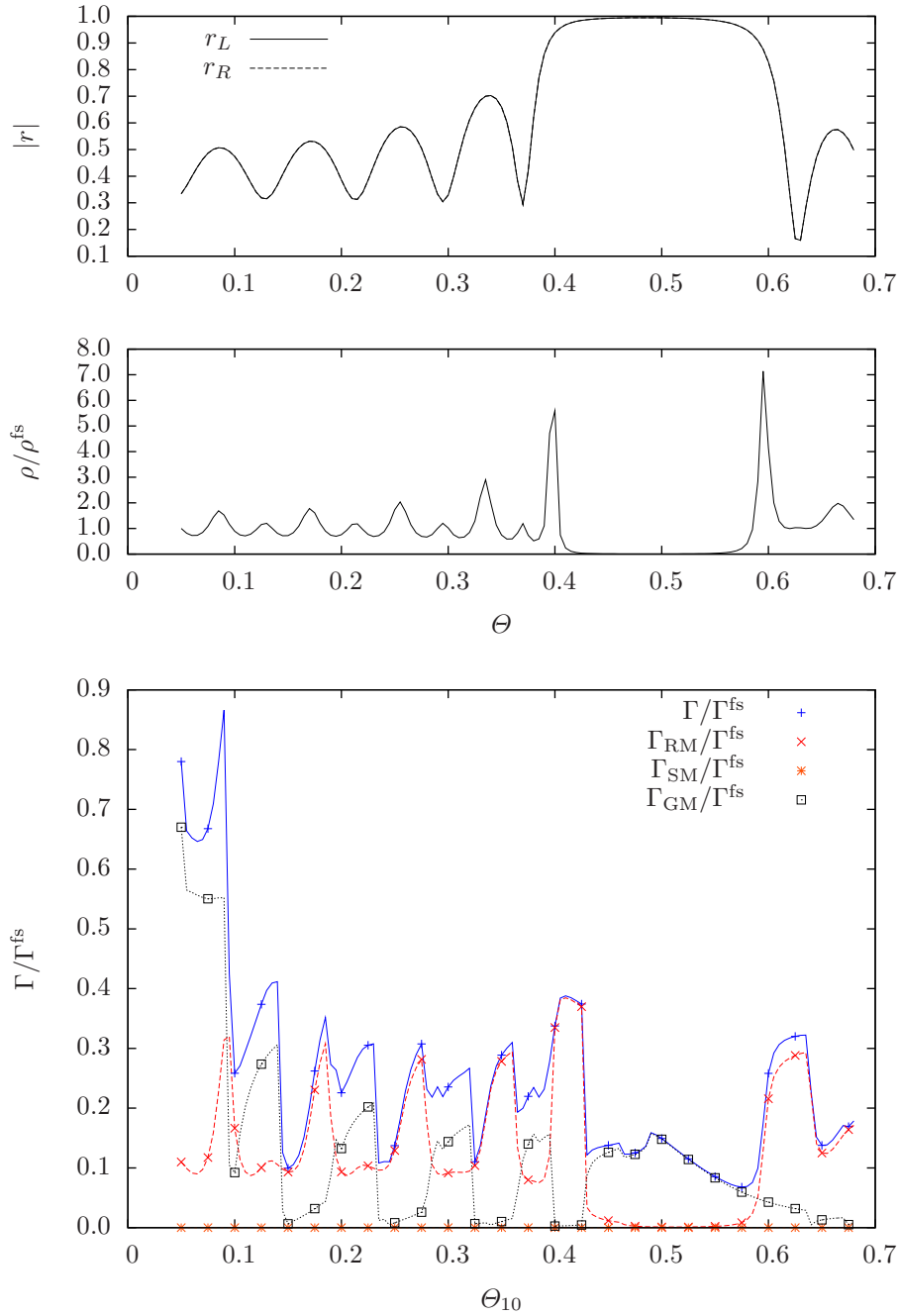
Do przeprowadzenia obliczeń należy przyjąć konkretne wyrażenie dla czynnika $\mathcal{L}_{\text{diel}}$. Wyboru można dokonać wzorując się na pracy [12], kładąc

$$\mathcal{L}_{\text{diel}} = \frac{3n_{(0)}^2}{2n_{(0)}^2 + 1}, \quad (5.64)$$

co jest wyborem słusznym w przypadku domieszki zastępującej atom dielektryka w sieci krystalicznej [99]. Ustalenie postaci $\mathcal{L}_{\text{diel}}$ pozwala przeprowadzić obliczenia szybkości emisji spontanicznej, gdyż wyrażenie, które ją opisuje, zależy wówczas już jedynie od przyjętych parametrów struktury i przejścia atomowego. Prezentowane poniżej wyniki zostały otrzymane dla struktur jednowymiarowych kryształów fotonicznych o wartościach parametrów takich, jak w tab. 5.1. Struktury S1 i S2 nie zawierały defektów, natomiast w S3 wprowadzono defekt w warstwie $j = 0$.

Wyniki otrzymane dla struktury S1 są przedstawione na wykresach na rys. 5.1. Górny wykres prezentuje wartości bezwzględne współczynników odbicia od granic warstwy $j = 0$, obliczone dla $\eta = 1$, tj. w przypadku padania prostopadłego⁶. Na środkowym wykresie znajduje się widmo modowe (znormalizowane do wartości z wolnej przestrzeni) dla tego samego kąta padania. Wykresy te pokazują przerwę foniczną pojawiającą się w strukturze kryształu fotonicznego S1 w okolicach częstotliwości znormalizowanej $\Theta_B = 0,5$, której odpowiada długość fali Bragga $\lambda_B = 2\Lambda$. Aby pole elektromagnetyczne mogło ulec wygaszeniu i utworzyła się

⁶ Krzywe pokrywają się ze względu na jednakową wartość współczynnika załamania w obszarach zewnętrznych: $n_{(L)} = n_{(R)} = 1$.



Rys. 5.1. Wartości bezwzględne współczynników odbicia, widmo modowe (obydwa wykresy wykonane są dla $\eta = 1$) i szybkość emisji spontanicznej dla struktury S1.

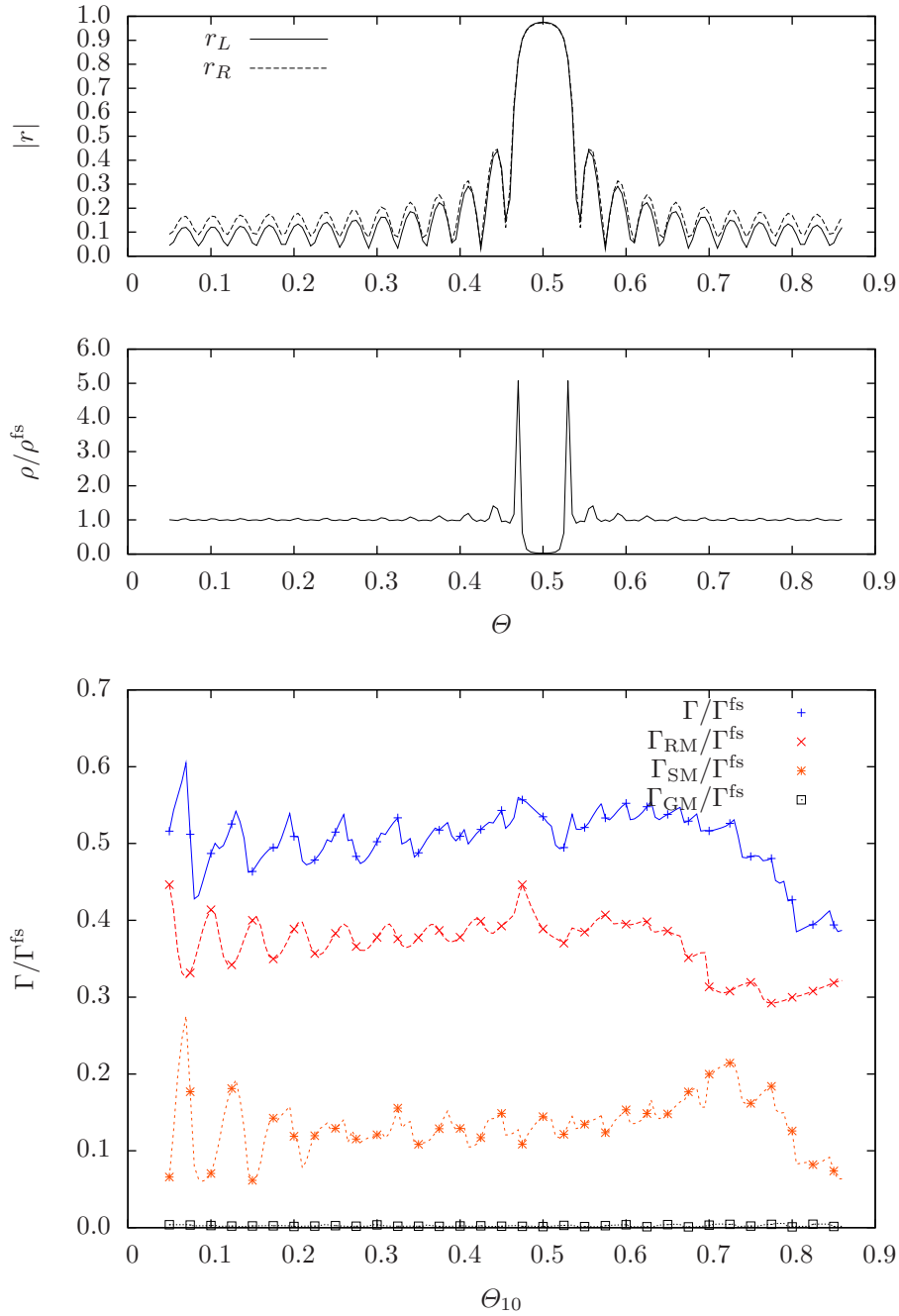
przerwa fotoniczna, wnęka rezonansowa (warstwa kryształu fotonicznego) musi posiadać wysoką dobroć, dlatego przerwy fotoniczne tworzą się w przedziałach częstotliwości, w których współczynniki odbicia są duże. W ogólności, można stwierdzić, że wartości widma modowego związane są w pewien sposób z rozkładami pola – duża wartość widma modowego oznacza, że modowi odpowiada silne pole w warstwie, zaś niska wartość widma modowego wskazuje, że pole w warstwie jest słabe. Ponieważ szybkość emisji zależy od amplitudy pola w położeniu

atomu, należy spodziewać się, że mody, którym odpowiadają wysokie wartości widma modowego, uniosą większość wyemitowanej mocy, podczas gdy mody, dla których widmo modowe jest niskie, będą miały niewielki wkład do procesu emisji. Przerwy foniczne charakteryzują się bardzo niskimi wartościami widma modowego; w idealnym (nieskończonym) kryształ fonicznym widmo modowe w przerwie fonicznej miałoby wręcz zerową wartość, lecz w skończonej strukturze dielektrycznej nie jest to możliwe, zatem struktura taka może bardzo znacząco ograniczyć emisję spontaniczną, ale nie może jej całkowicie zahamować⁷. Widmo modowe jest natomiast wysokie na granicy przerw fonicznej, co przypomina „wypychanie” modów z jej obszaru. Te spostrzeżenia pozwalają zinterpretować dolny wykres, przedstawiający szybkość emisji spontanicznej z wkładami od modów różnych typów. Współczynnik załamania na zewnątrz struktury S1 jest jednakowy po obydwu stronach, dlatego nie występują w niej mody podłożowe i $\Gamma_{SM} = 0$. Przerwa foniczna dla niższych η przesunęłaby się w stronę wyższych częstotliwości Θ , ale w tej strukturze przerwy foniczne dla wszystkich wartości η przekrywają się, zatem pojawia się w niej pełna przerwa foniczna. Z tego powodu na wykresie wkładu od modów promieniowania Γ_{RM}/Γ widać przedział Θ , w którym emisja jest praktycznie zatrzymana. Jednakże, w przedziale tym dają wkład do Γ mody prowadzone, co oznacza, że dla przejść z tego przedziału wzbudzenie atomu powoli zanikłoby z emisją do tych modów.

Wyniki odpowiadające strukturom S2 i S3 wykreślone są na rys. 5.2 oraz rys. 5.3. W strukturach tych nie tworzy się pełna przerwa foniczna, ponieważ współczynniki załamania n_1 i n_2 są na to zbyt małe. Dlatego też, co widać na dolnych wykresach, nie hamują one emisji spontanicznej tak jak struktura S1. Można powiedzieć, że w obydwu przypadkach S2 i S3 szybkość emisji spontanicznej Γ jest z grubsza jednakowa w całym przedziale. Zamiast doszukiwać się w jej wykresie charakterystycznych punktów, o wiele bardziej interesujące jest zbadanie wkładów do szybkości emisji od modów z ustalonym kątem padania, np. przyjmując $\eta = 1$ (tak, jak dla wykresów widma modowego). Wkłady te pokazane są na rys. 5.4 oraz rys. 5.5. Wykresy te bardzo przypominają wykresy widma modowego, z uwagi na to, że wkład każdego modu do Γ_{RM} jest proporcjonalny właśnie do widma modowego. Obserwacja ta jest zgodna z wynikami pomiarów przedstawionymi w pracy [100], w której badano eksperymentalnie luminescencję z wnętrza rezonansowej lasera typu VCSEL, będącej jednowymiarowym kryształem fonicznym z defektem. Wyniki te pokazują, że zestrojenie częstotliwości modu defektowego (obserwowalnej eksperymentalnie w pomiarze współczynnika odbicia struktury, który ma wyraźne minimum przy tej częstotliwości) z częstotliwością przejścia emitera (w tym przypadku studni kwantowej) skutkuje silną emisją do tego modu.

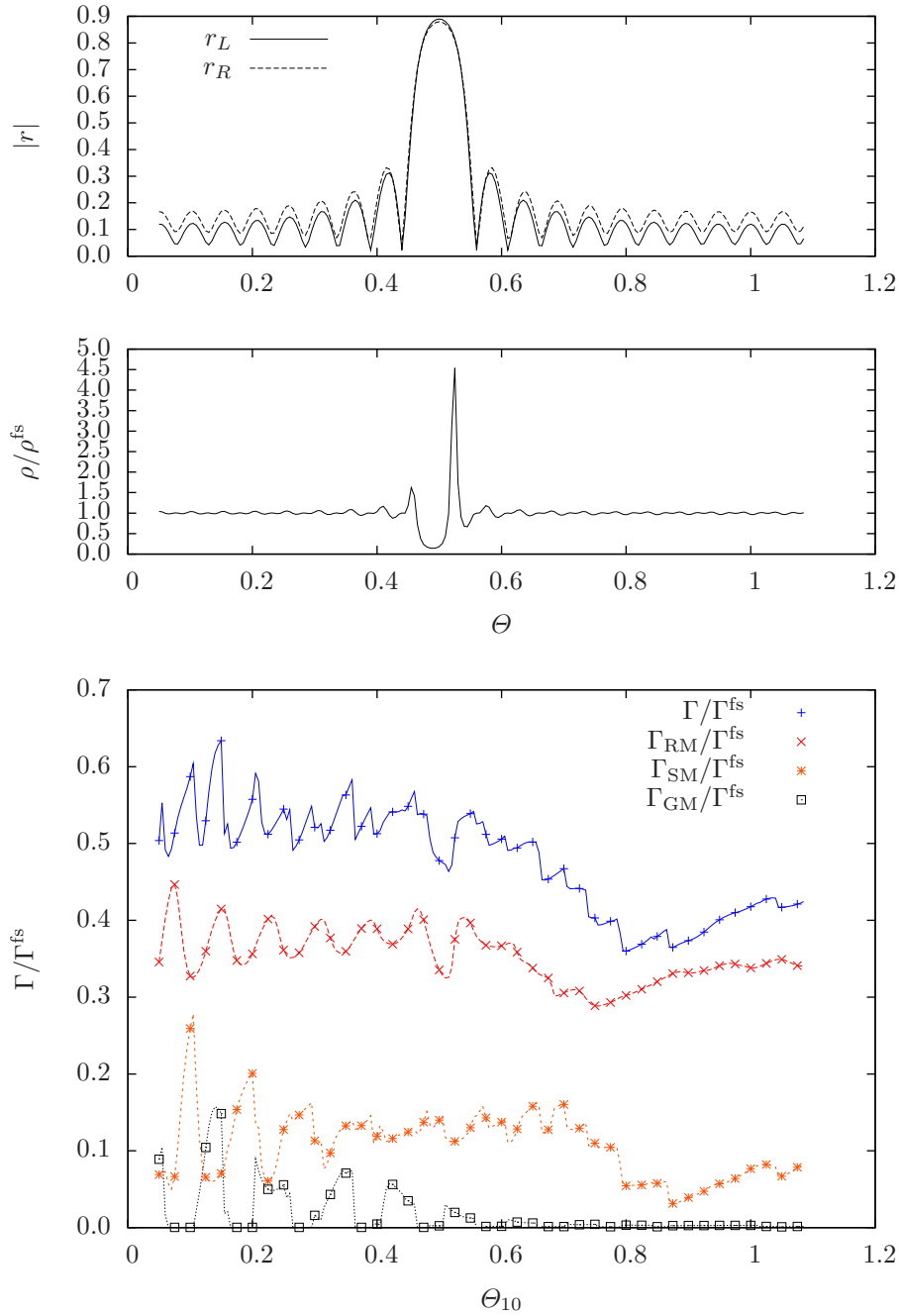
Daje się także zauważyć, że defekt struktury S3, który powoduje pojawienie się modu defektowego w przerwie fonicznej, nie powoduje wzrostu całkowitej szybkości emisji spontanicznej Γ (zakładając, że emiter jest zestrojony z modem defektowym), lecz jedynie do tego

⁷ Wniosek ten dotyczy również bardziej złożonych struktur dielektrycznych. Jedyna możliwość, aby struktura dielektryczna całkowicie zahamowała emisję spontaniczną, wystąpiłaby, gdyby na wszystkich powierzchniach ograniczających wnętrze zachodziło całkowite odbicie, ale to wymaga, aby wszystkie fale padały pod odpowiednio dużym kątem.



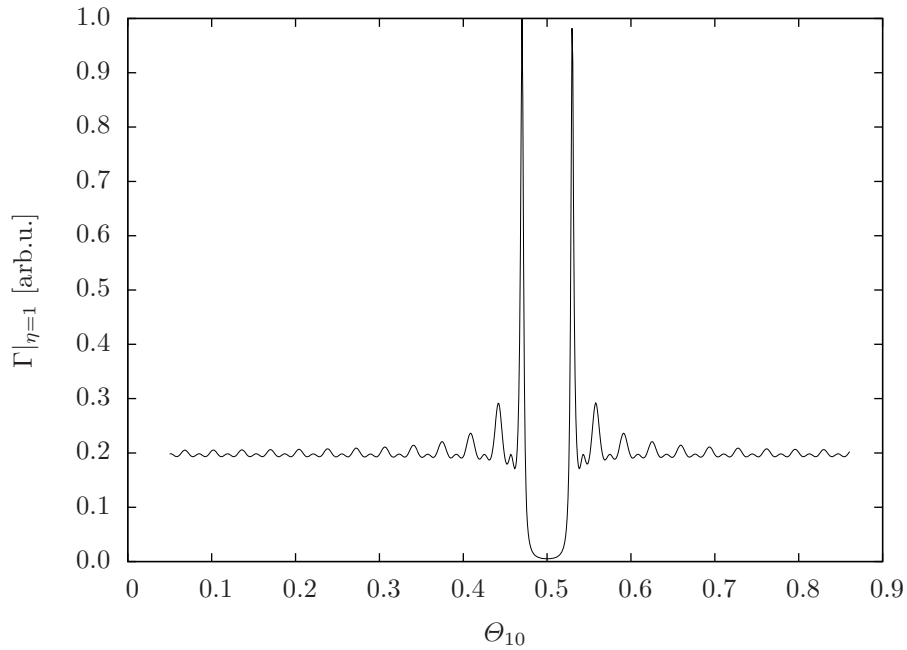
Rys. 5.2. Wartości bezwzględne współczynników odbicia, widmo modowe (obydwa wykresy wykonane są dla $\eta = 1$) i szybkość emisji spontanicznej dla struktury S2.

modu, co pomaga ukierunkować emisję spontaniczną. Wzrost szybkości emisji następuje także do modów na krawędzi przerwy fonicznej, co widać np. na wykresie wkładu w strukturze S2, jednakże oczywistym jest, że pojedynczy mod defektowy pozwala łatwiej i dokładniej wpływać na emisję w określonym kierunku z określoną częstotliwością, stąd, struktura S3 lepiej nadaje się do modyfikacji emisji spontanicznej, niż struktura S2. W przypadku, gdy emiter nie jest zestrojony z modem defektowym, wówczas mod defektowy nie może dodać swojego wkładu

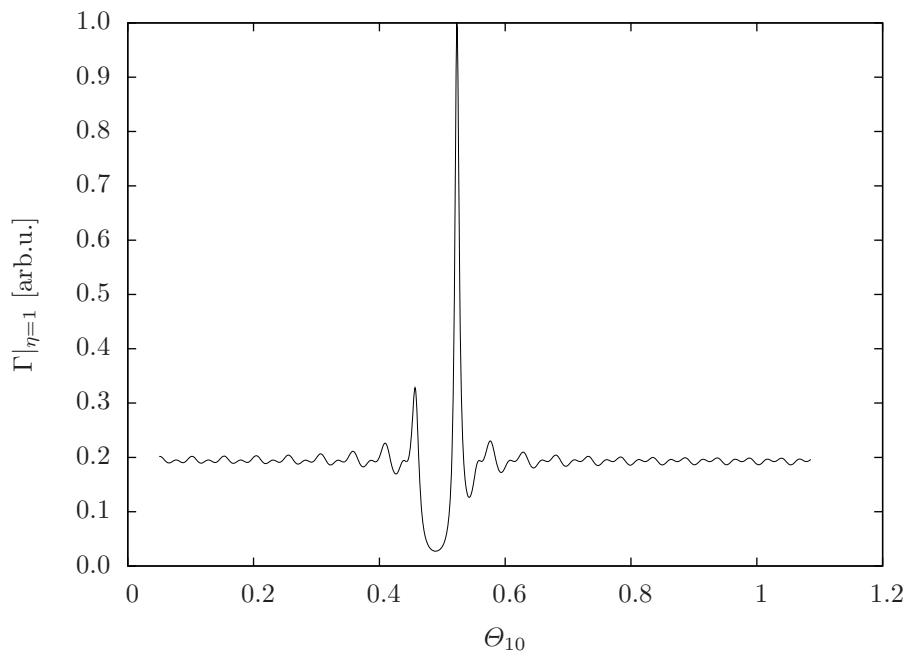


Rys. 5.3. Wartości bezwzględne współczynników odbicia, widmo modowe (obydwa wykresy wykonane są dla $\eta = 1$) i szybkość emisji spontanicznej dla struktury S3.

do Γ . Natomiast jeżeli struktura jest wnęką o zmiennej szerokości, wówczas mod defektowy w różnych jej fragmentach występuje dla różnych częstotliwości i, jeżeli tylko obejmuje on fragment linii emisyjnej emitera, z przedstawionego modelu wynika, że określony fragment struktury będzie emitować promieniowanie o częstotliwości odpowiadającej lokalnej częstotliwości modu defektowego (o natężeniu zależnym od kształtu linii emisyjnej emitera). Jest to stwierdzenie zgodne z wynikami pomiarów opisanymi w [101]. W pracy tej zamieszczone są



Rys. 5.4. Wkład do Γ od $\eta = 1$ w strukturze S2.



Rys. 5.5. Wkład do Γ od $\eta = 1$ w strukturze S3.

wyniki pomiarów luminescencji z próbki w postaci wnęki DBR o zmiennej szerokości. Zaprezentowane w niej wykresy w pełni potwierdzają opisane przewidywania teoretyczne modelu.

Otrzymane w tym rozdziale wyniki pokazują, że widmo modowe przekłada się na wkłady modów do szybkości emisji spontanicznej oraz na prawdopodobieństwa emisji do modów,

dowodzą one więc prawdziwości tezy nr 1. Ponieważ, co zostało wykazane w rozdziale 4, widmo modowe zawiera informacje o własnościach struktury, pozwala ono prosto pokazać, jak przekładają się one na modyfikację emisji spontanicznej. Na podstawie tego spostrzeżenia oraz diskutowanych w rozdziale 4 charakterystyk przedstawionych na rys. 4.10 można stwierdzić prawdziwość tezy nr 2. Charakterystyki te pokazują, że widmo modowe modu defektowego zanika w warstwach położonych coraz dalej od defektu oraz, że osiągnane przez nie wartości zależą od położenia defektu w strukturze, co stanowi treść tezy.

5.6. Porównanie z opisem opartym na gęstości stanów

Wyprowadzone wzory (5.39) są wyrażeniami, które można zapisać w ogólniejszej postaci

$$\sum_{\mu}^f g_{\mu} D_{\mu}, \quad (5.65)$$

gdzie μ oznacza wielkość lub kilka wielkości indeksujących mody pola, do których może nastąpić emisja, g_{μ} opisuje sprzężenie do grupy modów odpowiadającej μ , a D_{μ} jest funkcją opisującą gęstość stanów. Zdefiniowano kilka typów funkcji opisujących gęstości stanów, według klasyfikacji z pracy McPhedrana i innych [85] można wyróżnić:

- gęstość stanów (ang. *density of states*) $\text{DOS}(\omega)$, zależną jedynie od częstotliwości;
- spektralną gęstość stanów (ang. *spectral density of states*) $\text{SDOS}(\omega, \mathbf{k})$, zależną od częstotliwości i wektora falowego;
- lokalną gęstość stanów (ang. *local density of states*) $\text{LDOS}(\omega, \mathbf{r})$, zależną od częstotliwości i położenia emitującego atomu;
- „obopólną” gęstość stanów (ang. *mutual density of states*) $\text{MDOS}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$, zależną od częstotliwości, wektora falowego i położenia atomu.

Funkcje te opisują otoczenie źródła promieniowania i jest oczywiste, iż niosą ze sobą różną ilość informacji. Widać, iż to, która funkcja zostanie użyta, jest kwestią wyboru, a jej zastosowanie jest uwarunkowane odpowiednim zdefiniowaniem g_{μ} . Gęstość stanów $\text{DOS}(\omega)$, która zależy tylko od częstotliwości, zawiera najmniej informacji o strukturze – można z niej odczytać wyłącznie, ile stanów pola przypada w strukturze na infinitezymalny przedział częstotliwości. Funkcja ta zawiera istotne informacje o strukturze tylko wtedy, gdy odzwierciedla je związek dyspersyjny, a ten z kolei zależy od przyjętego modelu pola w strukturze (zastosowanej bazy modów). W szczególności, jeżeli mody zbudowane są jako złożenia fal płaskich, jak np. w modelu Carnigli-Mandela lub modelu efektywnego rezonatora, gęstość stanów jest identyczna jak w przestrzeni całkowicie wypełnionej jednorodnym ośrodkiem. Aby zastosować w opisie $\text{DOS}(\omega)$, należy przyjąć jako μ częstotliwość, a wszystkie elementy opisu zależne od innych wielkości ukryć wyłącznie w g_{μ} . Bogatsze w informacje o strukturze są spektralna i lokalna gęstość stanów, $\text{SDOS}(\omega, \mathbf{k})$ i $\text{LDOS}(\omega, \mathbf{r})$, które pozwalają zorientować się, które konkret-

nie mody „preferuje” struktura albo jak wpływa na oddziaływanie z atomem w konkretnym położeniu. Wszystkie te informacje zawarte są w „obopólnej” gęstości stanów $\text{MDOS}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$.

W modelu efektywnego rezonatora gęstość stanów ma postać taką, jak w jednorodnym ośrodku: $\text{DOS}(\omega) \sim \omega^2$, nie zawiera zatem istotnych informacji i nie występuje nigdzie jawnie. Wielkością charakteryzującą warstwy struktury jest natomiast widmo modowe, do którego jest proporcjonalny czynnik g_μ . Oznacza to, że projektant może dobierać warstwy struktury obserwując widma modowe warstw i czerpiąc z nich dokładne informacje o wpływie otoczenia na atomy emitujące promieniowanie, także o modyfikacji rozkładu kąтового promieniowania. Jest to bogatsza informacja, niż dostępna poprzez funkcję $\text{SDOS}(\omega, \mathbf{k})$, która nie rozróżnia warstw struktury oraz niż dostępna poprzez funkcję $\text{LDOS}(\omega, \mathbf{r})$, która nie pokazuje rozkładu kąтового. Najbardziej zbliżona do widma modowego jest „obopólna” gęstość stanów $\text{MDOS}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$, dostarczająca podobnych, a nawet bardziej szczegółowych danych, gdyż rozróżnia ona położenia atomów. Jednakże, w przypadku gdy mamy do czynienia z wieloma warstwami i wieloma atomami, których położenia dodatkowo nie jesteśmy w stanie dokładnie kontrolować, dla projektanta struktury istotna jest charakterystyka warstwy jako całości. Widmo modowe dostarcza wprost taką informację, którą można by także otrzymać z $\text{MDOS}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$, po wykonaniu na tej funkcji uśredniania. W modelu efektywnego rezonatora można by zdefiniować $\text{MDOS}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r})$ za pomocą m.in. widma modowego, które można prosto policzyć, zaś w modelu opartym na innej bazie modów obliczenia byłyby bardziej skomplikowane, tak samo jak zastosowana baza. Na tej podstawie można stwierdzić, że widmo modowe jest wielkością, której zastosowanie jest optymalne w procesie projektowania struktury wielowarstwowej, a w szczególności – jednowymiarowego kryształu fonicznego.

6. Emisja spontaniczna z układu wieloatomowego

Tematem niniejszego rozdziału jest uogólnienie teorii przedstawionej w rozdziale 5 na przypadek układu wieloatomowego. W układzie takim na emisję fotonu ma wpływ oddziaływanie pomiędzy atomami, które prowadzi do zjawiska nadpromienistości, opisanego po raz pierwszy przez Dickego [13]. Teoretyczny opis tego zjawiska można znaleźć także m.in. w [10]. Zjawisko nadpromienistości znalazło doświadczalne potwierdzenie, np. w eksperymencie opisanym w pracy [102]. Podobnie jak w przypadku jednoatomowym, model efektywnego rezonatora dostarcza wygodnego opisu emisji spontanicznej. Z uwagi na postać wyników otrzymanych za pomocą tego modelu, w naturalny sposób nasuwa się hipoteza dotycząca emisji kolektywnej, którą autor rozprawy formułuje na końcu rozdziału.

6.1. Hamiltonian układu wieloatomowego w jednej warstwie

Rozważając układ wielu atomów, znajdujących się w położeniach \mathbf{R}_A w obrębie pojedynczej warstwy jednowymiarowego kryształu fotonicznego, należy zastosować dla pola elektromagnetycznego hamiltonian (5.8), tak jak w przypadku jednego atomu, gdyż opis pola elektromagnetycznego nie ulega zmianie niezależnie od liczny atomów. Natomiast dla układu atomów należy przyjąć hamiltonian stanowiący uogólnienie (5.11a):

$$\hat{H}_{\text{at}} = \sum_A \hat{H}_{\text{at}}^{(A)} + \frac{1}{2} \sum_A \sum_{B \neq A} \hat{V}_{AB}, \quad (6.1a)$$

gdzie $\hat{H}_{\text{at}}^{(A)}$ oznacza hamiltonian odizolowanego A-tego atomu:

$$\hat{H}_{\text{at}}^{(A)} = \sum_{a \in A} \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m} + \hat{V}_A \quad (6.1b)$$

w którym $a \in A$ oznacza indeks przebiegający elektrony A-tego atomu, a \hat{V}_A jest operatorem energii potencjalnej oddziaływania kulombowskiego elektronów tego atomu z jego jądrem oraz między sobą. \hat{V}_{AB} jest operatorem energii oddziaływania kulombowskiego elektronów i jąder z różnych atomów A-tego i B-tego. Stany tak zdefiniowanego hamiltonianu można oznaczyć przez $|\Psi\rangle$, a odpowiadające im energie (tj. wartości własne hamiltonianu \hat{H}_{at}) przez E_Ψ .

Hamiltonian oddziaływania układu atomowego z polem elektromagnetycznym można wprowadzić z \hat{H}_{at} w taki sam sposób jak w rozdziale 5. Składniki tego hamiltonianu otrzymuje się z poszczególnych $\hat{H}_{\text{at}}^{(A)}$ poprzez zamianę $\mathbf{p}_a \rightarrow \boldsymbol{\pi}_a = \mathbf{p}_a - e\mathbf{A}_a$. Wyrazy proporcjonalne

do A_a^2 nie opisują przejść atomowych, zatem, dla uproszczenia, zostaną zaniechane również w wyprowadzeniu dla układu wieloatomowego. Stosując przybliżenie dipolowe, przybliżenie wirującej fali oraz wprowadzając czynnik $\mathcal{L}_A \equiv \mathcal{L}_{\text{diel}}(\mathbf{R}_A)$, opisujący stosunek amplitudy pola mikroskopowego do amplitudy pola makroskopowego w położeniu A-tego atomu, otrzymuje się hamiltonian oddziaływania w postaci

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_A \frac{i\mathcal{L}_A}{\sqrt{2\hbar\epsilon_0}} \sum_{\mathbf{k},\epsilon} \frac{[\mathbf{R}_A^{i\dagger}, \hat{H}_{\text{at}}] a_{k\epsilon} f_{k\epsilon}^i(\mathbf{R}_A) + a_{k\epsilon}^\dagger f_{k\epsilon}^{i*}(\mathbf{R}_A) [\mathbf{R}_A^i, \hat{H}_{\text{at}}]}{\sqrt{\omega_k}}. \quad (6.2)$$

W powyższym wyrażeniu operator R_A jest operatorem relaksacji dla A-tego atomu. Za pomocą tego operatora oraz jego sprzężenia hermitowskiego wyraża się operator momentu dipolowego A-tego atomu $\mathbf{d}_A = R_A + R_A^\dagger = \sum_{a \in A} e \mathbf{r}_a$.

6.2. Emisja spontaniczna z układu atomów w jednej warstwie

Dla skrócenia zapisu można wprowadzić oznaczenie $\mathcal{N} \equiv \{n_{k\epsilon}\}$ dla zbiorów obsadzeń modów pola (które definiują pojedynczy stan pola). Wektor stanu układu pole-atomy można wtedy zapisać w zwartej postaci:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\Psi, \mathcal{N}} C_{\Psi, \mathcal{N}}(t) |\Psi\rangle |\mathcal{N}\rangle. \quad (6.3)$$

Po przejściu do obrazu oddziaływania:

$$C_{\Psi, \mathcal{N}}(t) = b_{\Psi, \mathcal{N}}(t) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(E_\Psi + \sum_{k\epsilon} \hbar\omega_k n_{k\epsilon}\right) t\right), \quad (6.4)$$

równania ruchu amplitud prawdopodobieństwa przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt} b_{\Psi, \mathcal{N}}(t) = -i \sum_{\Psi', \mathcal{N}'} \exp(i\Upsilon_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')t) g_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}') b_{\Psi', \mathcal{N}'}(t), \quad (6.5)$$

gdzie $\Omega_{\Psi\Psi'} = (E_\Psi - E_{\Psi'})/\hbar$ oraz

$$g_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}') = \frac{\langle \mathcal{N}' | \langle \Psi | \hat{H}_{\text{int}} | \Psi' \rangle | \mathcal{N}' \rangle}{\hbar}. \quad (6.6)$$

Elementy diagonalne hamiltonianu oddziaływania zdefiniowanego wzorem (6.2) są zerowe, zatem dla dowolnych stanów $g_{\Psi\Psi}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) = 0$. W równaniu (6.5) wprowadzone zostało także oznaczenie

$$\Upsilon_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}') \equiv \Omega_{\Psi\Psi'} + \sum_{k\epsilon} \omega_k (n_{k\epsilon} - n'_{k\epsilon}). \quad (6.7)$$

Rozważamy układ w określonym stanie początkowym $|\Psi_0\rangle |\mathcal{N}_0\rangle$, dla którego zbiór obszarów modów $\mathcal{N}_0 \equiv \{N_{k\epsilon}\}$, z warunkami początkowymi

$$b_{\Psi_0\mathcal{N}_0}(0) = 1, \quad \text{pozostałe } b_{\Psi\mathcal{N}}(0) = 0. \quad (6.8)$$

Równanie ruchu (6.5) można formalnie rozwiązać poprzez całkowanie:

$$b_{\Psi\mathcal{N}}(t) = b_{\Psi\mathcal{N}}(0) - i \sum_{\Psi'\mathcal{N}' \neq \Psi\mathcal{N}} g_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}') \int_0^t d\tau e^{i\Upsilon_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')\tau} b_{\Psi'\mathcal{N}'}(\tau). \quad (6.9)$$

Zakładając, że $b_{\Psi\mathcal{N}}(\tau)$ zmienia się nieznacznie w przyjętym przedziale czasu i może zostać przybliżone przez $b_{\Psi\mathcal{N}}(t)$ (przybliżenie procesu Markowa), równanie to przekształca się do postaci:

$$b_{\Psi\mathcal{N}}(t) = b_{\Psi\mathcal{N}}(0) - i \sum_{\Psi'\mathcal{N}' \neq \Psi\mathcal{N}} g_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}') b_{\Psi'\mathcal{N}'}(t) \int_0^t d\tau e^{i\Upsilon_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')\tau}. \quad (6.10)$$

Wstawiając rozwiązanie (6.10) dla amplitudy $b_{\Psi_0\mathcal{N}_0}$ z powrotem do równania ruchu (6.5) otrzymuje się:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} b_{\Psi_0\mathcal{N}_0}(t) = & - \sum_{\Psi'\mathcal{N}'} g_{\Psi_0\Psi'}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}') g_{\Psi'\Psi_0}(\mathcal{N}', \mathcal{N}_0) b_{\Psi_0\mathcal{N}_0}(t) \int_0^t d\tau e^{i\Upsilon_{\Psi_0\Psi'}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}') (t-\tau)} \\ & - \sum_{\Psi'\mathcal{N}'} \sum_{\Psi''\mathcal{N}''} g_{\Psi_0\Psi'}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}') g_{\Psi'\Psi''}(\mathcal{N}', \mathcal{N}'') b_{\Psi''\mathcal{N}''}(t) \\ & \times e^{i\Upsilon_{\Psi_0\Psi''}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}'') t} \int_0^t d\tau e^{i\Upsilon_{\Psi'\Psi''}(\mathcal{N}', \mathcal{N}'') (t-\tau)}. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Dla odpowiednio dużych czasów można skorzystać ze wzoru (5.35) i zastąpić całki przez wyrazy typu $\pi\delta(\alpha) - \mathcal{P}\frac{i}{\alpha}$. Wstawiając konsekwentnie rozwiązanie (6.10) można wyrugować z równania na $b_{\Psi_0\mathcal{N}_0}$ amplitudy odpowiadające wszystkim pozostałym stanom, co prowadzi do równania jednorodnego:

$$\frac{d}{dt} b_{\Psi_0\mathcal{N}_0}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} W_{\Psi_0\mathcal{N}_0}^{(j)} b_{\Psi_0\mathcal{N}_0}(t), \quad (6.12)$$

gdzie

$$\begin{aligned} W_{\Psi_0\mathcal{N}_0}^{(j)} = & (-i)^{j+1} \sum_{\Psi_1\mathcal{N}_1} \sum_{\Psi_2\mathcal{N}_2} \dots \sum_{\Psi_j\mathcal{N}_j} g_{\Psi_0\Psi_1}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1) g_{\Psi_1\Psi_2}(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2) \dots g_{\Psi_j\Psi_0}(\mathcal{N}_j, \mathcal{N}_0) \\ & \times \left(\pi\delta(\Upsilon_{\Psi_2\Psi_1}(\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1)) - \mathcal{P}\frac{i}{\Upsilon_{\Psi_2\Psi_1}(\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1)} \right) \left(\pi\delta(\Upsilon_{\Psi_3\Psi_2}(\mathcal{N}_3, \mathcal{N}_2)) - \mathcal{P}\frac{i}{\Upsilon_{\Psi_3\Psi_2}(\mathcal{N}_3, \mathcal{N}_2)} \right) \\ & \times \dots \left(\pi\delta(\Upsilon_{\Psi_0\Psi_j}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_j)) - \mathcal{P}\frac{i}{\Upsilon_{\Psi_0\Psi_j}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_j)} \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Zatem, przy przyjętych przybliżeniach amplituda stanu, w którym układ znajdował się w początkowej chwili, zależy od czasu w następujący sposób:

$$b_{\Psi_0 \mathcal{N}_0}(t) = \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2}\right) e^{i\delta\omega t}, \quad (6.14)$$

przy stałej rozpadu (tj. szybkości emisji spontanicznej) zdefiniowanej jako

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma^{(j)}, \quad \Gamma^{(j)} = -2\text{Re}\{W_{\Psi_0 \mathcal{N}_0}^{(j)}\} \quad (6.15)$$

oraz przesunięciu linii

$$\delta\omega = \sum_{j=1}^{\infty} \text{Im}\{W_{\Psi_0 \mathcal{N}_0}^{(j)}\}. \quad (6.16)$$

Ponieważ elementy diagonalne przyjętego hamiltonianu \hat{H}_{int} są zerowe, dlatego niezerowe są tylko wyrazy $\Gamma^{(j)}$ o nieparzystych j .

6.2.1. Wyraz wiodący stałej rozpadu

Wiodącym wyrazem w Γ jest wyraz najniższego rzędu we współczynnikach sprzężenia $g_{\Psi\Psi'}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$, tj. $\Gamma^{(1)}$:

$$\Gamma^{(1)} = 2\pi \sum_{\Psi', \mathcal{N}'} |g_{\Psi_0 \Psi'}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}')|^2 \delta(\Upsilon_{\Psi_0 \Psi'}(\mathcal{N}_0, \mathcal{N}')). \quad (6.17)$$

Dla pola początkowo w stanie próżni (tj. przy wszystkich $N_{k\epsilon} = 0$) i dla zlokalizowanych stanów atomowych wyraz ten można zapisać jako:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{\pi}{\hbar\epsilon_0} \sum_{\Psi'} \Omega_{\Psi_0 \Psi'} \sum_{k,\epsilon} \left| \sum_A \mathcal{L}_A \langle \Psi_0 | R_A^\dagger | \Psi' \rangle \cdot \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{R}_A) \right|^2 \delta(\Omega_{\Psi_0 \Psi'} - \omega_k). \quad (6.18)$$

Dla układu identycznych atomów dwupoziomowych, o częstotliwości kołowej przejścia Ω_{10} , przyjmując, że w położeniu każdego z atomów $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{\text{diel}}$, otrzymuje się:

$$\Gamma^{(1)} = \frac{\pi \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 \Omega_{10}}{\hbar\epsilon_0} \sum_{k,\epsilon} \sum_A \sum_B f_{k\epsilon}^i(\mathbf{R}_A) \langle \Psi_0 | R_A^{i\dagger} R_B^j | \Psi_0 \rangle f_{k\epsilon}^{j*}(\mathbf{R}_B) \delta(\Omega_{10} - \omega_k). \quad (6.19)$$

Amplitudy $b_{\Psi\mathcal{N}}$ pozostałych stanów, z dokładnością do wyrazu wiodącego stałej rozpadu, w granicy $t \rightarrow \infty$, wyrażają się wzorem:

$$b_{\Psi\mathcal{N}}(t) = \frac{ig_{\Psi\Psi_0}(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)}{i\Upsilon_{\Psi\Psi_0}(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) + i\delta\omega - \Gamma^{(1)}/2}. \quad (6.20)$$

Stąd prawdopodobieństwo znalezienia układu w określonym stanie to:

$$|b_{\Psi\mathcal{N}}(t)|^2 = \frac{|g_{\Psi\Psi_0}(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0)|^2}{(\Upsilon_{\Psi\Psi_0}(\mathcal{N}, \mathcal{N}_0) + \delta\omega)^2 + \Gamma^{(1)2}/4}. \quad (6.21)$$

W szczególności, dla stanu $|\mathcal{N}\rangle = |1_{k\epsilon}\rangle$:

$$|b_{\Psi\mathcal{N}}(t)|^2 = \frac{\mathcal{L}_{\text{diel}}^2 \Omega_{10}^2 \left| \sum_A \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^\dagger | \Psi \rangle \cdot \mathbf{f}_{k\epsilon}(\mathbf{R}_A) \right|^2}{2\epsilon_0 \hbar \omega_k (\omega_k + \delta\omega - \Omega_{10})^2 + \Gamma^{(1)2} / 4}. \quad (6.22)$$

Z powyższych wzorów wynika, że przy przybliżeniu stałej rozpadu jej wiodącym wyrazem $\Gamma^{(1)}$, widmo modowe, które wchodzi do tych wzorów poprzez rozkłady pola, opisuje jednakowo wkłady modów do stałej rozpadu i prawdopodobieństwa emisji do nich. Warto zwrócić uwagę na to, że amplitudy znormalizowanych modów promieniowania i podłożowych są proporcjonalne do pierwiastka z widma modowego, zaś w wyrażeniach opisujących wkłady modów do $\Gamma^{(1)}$ występuje zawsze iloczyn dwóch amplitud pola modu. Sprawia to, że wkłady te są proporcjonalne do widma modowego, tak samo, jak to ma miejsce w przypadku pojedynczego atomu. Zatem, *wpływ struktury na emisję spontaniczną jest jednakowy w przypadkach pojedynczego atomu oraz wielu atomów znajdujących się w jednej warstwie struktury.*

W nieograniczonej próżni wyrażenie (6.19) prowadzi do:

$$\Gamma^{(1)\text{fs}} = \frac{K_{10}^3}{2\pi \hbar \epsilon_0} \sum_A \sum_B \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^{i\dagger} \mathbf{R}_B^j | \Psi_0 \rangle \left[\frac{\sin K_{10} R_{AB}}{K_{10} R_{AB}} \left(\delta^{ij} - \frac{R_{AB}^i R_{AB}^j}{R_{AB}^2} \right) + \left(\frac{\cos K_{10} R_{AB}}{K_{10}^2 R_{AB}^2} - \frac{\sin K_{10} R_{AB}}{K_{10}^3 R_{AB}^3} \right) \left(\delta^{ij} - 3 \frac{R_{AB}^i R_{AB}^j}{R_{AB}^2} \right) \right], \quad (6.23)$$

gdzie $K_{10} = \Omega_{10}/c$, $\mathbf{R}_{AB} = \mathbf{R}_A - \mathbf{R}_B$ oraz $R_{AB} = |\mathbf{R}_{AB}|$. Ponieważ

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\cos \alpha}{\alpha^2} - \frac{\sin \alpha}{\alpha^3} \right) = -\frac{1}{3}, \quad (6.24)$$

wkład od A-tego atomu dany jest wzorem

$$\Gamma_A^{(1)\text{fs}} = \frac{K_{10}^3}{3\pi \hbar \epsilon_0} \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^\dagger \cdot \mathbf{R}_A | \Psi_0 \rangle. \quad (6.25)$$

Wyrażenie to jest zgodne ze wzorem (5.40) definiującym szybkość emisji Γ^{fs} z pojedynczego atomu w próżni, wyprowadzonym w rozdziale 5.

Całkowanie po kącie φ , potrzebne do obliczenia wartości $\Gamma^{(1)}$ w jednowymiarowym kryształcie fotonicznym, można wykonać analitycznie, tak samo, jak w rozdziale 5.4. Dla polaryzacji TE:

$$\mathbf{f}_{k\text{TE}}(\mathbf{r}) = P_k(\mathbf{r})(\mathbf{e}_y \cos \varphi - \mathbf{e}_x \sin \varphi), \quad P_k(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{f}_{k\text{TE}}(\mathbf{r}) \Big|_{\varphi=0}, \quad (6.26)$$

stąd

$$\int_0^{2\pi} d\varphi f_{k\text{TE}}^i(\mathbf{R}_A) \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^{i\dagger} \mathbf{R}_B^j | \Psi_0 \rangle f_{k\text{TE}}^{j*}(\mathbf{R}_B) = \pi P_k(\mathbf{R}_A) P_k^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_{\parallel A}^\dagger \cdot \mathbf{R}_{\parallel B} | \Psi_0 \rangle, \quad (6.27)$$

gdzie $R_{\parallel A}$ jest operatorem relaksacji A-tego atomu zrzutowanym na płaszczyznę xy :

$$R_{\parallel A} = (R_A \cdot e_x)e_x + (R_A \cdot e_y)e_y. \quad (6.28)$$

Operator ten (wraz ze swoim sprzężeniem hermitowskim) pozwala wyrazić leżącą w tej płaszczyźnie składową operatora momentu dipolowego:

$$d_{\parallel A} = R_{\parallel A} + R_{\parallel A}^\dagger. \quad (6.29)$$

Dla polaryzacji TM:

$$\mathbf{f}_{k\text{TM}}(\mathbf{r}) = Q_{k\parallel}(\mathbf{r})(e_x \cos\varphi + e_y \sin\varphi) + Q_{k\perp}(\mathbf{r})e_z, \quad (6.30a)$$

$$Q_{k\parallel}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{f}_{k\text{TM}}(\mathbf{r})\Big|_{\varphi=0}, \quad Q_{k\perp}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{f}_{k\text{TM}}(\mathbf{r}) \quad (6.30b)$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi f_{k\text{TM}}^i(\mathbf{R}_A) \langle \Psi_0 | R_A^{i\dagger} R_B^j | \Psi_0 \rangle f_{k\text{TM}}^{j*}(\mathbf{R}_B) = \\ \pi Q_{k\parallel}(\mathbf{R}_A) Q_{k\parallel}^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | R_{\parallel A}^\dagger \cdot R_{\parallel B} | \Psi_0 \rangle \\ + 2\pi Q_{k\perp}(\mathbf{R}_A) Q_{k\perp}^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | R_{zA}^\dagger \cdot R_{zB} | \Psi_0 \rangle, \end{aligned} \quad (6.31)$$

gdzie $R_{zA} = R_A - R_{\parallel A}$ jest składową operatora relaksacji wzdłuż osi z , za pomocą której można wyznaczyć składową momentu dipolowego $d_{zA} = R_{zA} + R_{zA}^\dagger$. Ostatecznie, otrzymuje się następujące wkłady do $\Gamma^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{RM}}^{(1)} = \frac{2\pi^2 n_{(0)}^3 \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 K_{10}^3}{\hbar \varepsilon_0} \sum_A \sum_B \\ \times \int_{\eta_S}^1 d\eta \left[\left(P_k(\mathbf{R}_A) P_k^*(\mathbf{R}_B) + Q_{k\parallel}(\mathbf{R}_A) Q_{k\parallel}^*(\mathbf{R}_B) \right) \langle \Psi_0 | R_{\parallel A}^\dagger \cdot R_{\parallel B} | \Psi_0 \rangle \right. \\ \left. + 2Q_{k\perp}(\mathbf{R}_A) Q_{k\perp}^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | R_{zA}^\dagger \cdot R_{zB} | \Psi_0 \rangle \right]_{k=n_{(0)}K_{10}}, \end{aligned} \quad (6.32a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{SM}}^{(1)} = \frac{\pi^2 n_{(0)}^3 \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 K_{10}^3}{\hbar \varepsilon_0} \sum_A \sum_B \\ \times \int_{\eta_G}^{\eta_S} d\eta \left[\left(P_k(\mathbf{R}_A) P_k^*(\mathbf{R}_B) + Q_{k\parallel}(\mathbf{R}_A) Q_{k\parallel}^*(\mathbf{R}_B) \right) \langle \Psi_0 | R_{\parallel A}^\dagger \cdot R_{\parallel B} | \Psi_0 \rangle \right. \\ \left. + 2Q_{k\perp}(\mathbf{R}_A) Q_{k\perp}^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | R_{zA}^\dagger \cdot R_{zB} | \Psi_0 \rangle \right]_{k=n_{(0)}K_{10}}, \end{aligned} \quad (6.32b)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{GM}}^{(1)} &= \frac{\pi^2 n_{(0)}^2 \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 K_{10}^2}{\hbar \varepsilon_0} \sum_A \sum_B \\
&\times \left[\sum_{a \in \text{GM}_{k, \text{TE}}} \left| 1 - \eta_{a, \text{TE}}^2(k) - k \eta_{a, \text{TE}}(k) \frac{d\eta_{a, \text{TE}}(k)}{dk} \right| P_{k_a}(\mathbf{R}_A) P_{k_a}^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_{\parallel A}^\dagger \cdot \mathbf{R}_{\parallel B} | \Psi_0 \rangle \right. \\
&\quad + \sum_{a \in \text{GM}_{k, \text{TM}}} \left| 1 - \eta_{a, \text{TM}}^2(k) - k \eta_{a, \text{TM}}(k) \frac{d\eta_{a, \text{TM}}(k)}{dk} \right| \\
&\quad \times \left(Q_{k_{a\parallel}}(\mathbf{R}_A) Q_{k_{a\parallel}}^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_{\parallel A}^\dagger \cdot \mathbf{R}_{\parallel B} | \Psi_0 \rangle \right. \\
&\quad \left. \left. + 2Q_{k_{a\perp}}(\mathbf{R}_A) Q_{k_{a\perp}}^*(\mathbf{R}_B) \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_{zA}^\dagger \cdot \mathbf{R}_{zB} | \Psi_0 \rangle \right) \right]_{k=n_{(0)}K_{10}}. \quad (6.32c)
\end{aligned}$$

Przyjmijmy, że w rozważanym układzie w stanie początkowym $|\Psi_0\rangle$ znajduje się N_{ex} atomów wzbudzonych. Wyrażenie na $\Gamma^{(1)}$ można podzielić na dwie części: pierwszą, w której znajdują się tylko wkłady od pojedynczych atomów i drugą, zawierającą wkłady od par atomów. Jeżeli atomy są jednakowe, ich stany mogą różnić się tylko fazą w chwili początkowej, którą można oznaczyć ϕ_A dla A-tego atomu. Wówczas, elementy macierzowe operatorów relaksacji nie zależą (z dokładnością do fazy) od tego, których atomów dotyczą [10, 13]. Stąd, dla dowolnego atomu

$$\langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^{i\dagger} \mathbf{R}_A^j | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_1^{i\dagger} \mathbf{R}_1^j | \Psi_0 \rangle \quad (6.33a)$$

oraz, dla dowolnej pary atomów, element macierzowy

$$\langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^{i\dagger} \mathbf{R}_B^j | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_1^{i\dagger} \mathbf{R}_2^j | \Psi_0 \rangle e^{i(\phi_B - \phi_A)}. \quad (6.33b)$$

Jeżeli fazy ϕ_A są zmiennymi losowymi, należy dodatkowo wziąć wartość oczekiwaną całego wyrażenia na $\Gamma^{(1)}$. W ten sposób otrzymuje się wzór:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)} &= \frac{\pi \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 n_{(0)} K_{10}}{\hbar \varepsilon_0} \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \sum_A \left\langle \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_1^{i\dagger} \mathbf{R}_1^j | \Psi_0 \rangle f_{k\epsilon}^i(\mathbf{R}_A) f_{k\epsilon}^{j*}(\mathbf{R}_A) \right. \\
&\quad \left. + \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_1^{i\dagger} \mathbf{R}_2^j | \Psi_0 \rangle \sum_{B \neq A} e^{i(\phi_B - \phi_A)} f_{k\epsilon}^i(\mathbf{R}_A) f_{k\epsilon}^{j*}(\mathbf{R}_B) \right\rangle \delta(n_{(0)} K_{10} - k), \quad (6.34)
\end{aligned}$$

który w nieograniczonej próżni przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(1)\text{fs}} &= N_{\text{ex}} \Gamma_1^{(1)\text{fs}} \\
&\quad + N_{\text{ex}}^2 \Gamma_1^{(1)\text{fs}} \left\langle \frac{\langle \Psi_0 | \mathbf{R}_1^\dagger \cdot \mathbf{R}_2 | \Psi_0 \rangle}{\langle \Psi_0 | \mathbf{R}_1^\dagger \cdot \mathbf{R}_1 | \Psi_0 \rangle} \left(\frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\eta \left| \frac{1}{N_{\text{ex}}} \sum_A e^{i\mathbf{K}_{10} \cdot \mathbf{R}_A - i\phi_A} \right|^2 - \frac{1}{N_{\text{ex}}} \right) \right\rangle. \quad (6.35)
\end{aligned}$$

W drugim wyrazie wyrażenie podcałkowe jest kwadratem modułu wartości średniej wyrażenia za sumą. Widać zatem, że w wyrażeniu na szybkość emisji $\Gamma^{(1)\text{fs}}$ występuje wyraz zależny od N_{ex}^2 , który przy dużych N_{ex} staje się dominujący – jest to istota zjawiska nadpromienistości.

W przypadku kryształu fotonicznego takie zachowanie się układu emitujących atomów można zaobserwować przeprowadzając poniższe rozumowanie. Do wyrażenia na $\Gamma^{(1)}$ można wprowadzić całkowanie po położeniach w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} = & \frac{\pi \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 n_{(0)} K_{10}}{\hbar \varepsilon_0} \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \int_V d^3 r \sum_A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_A) \left\langle \langle \Psi_0 | R_1^{i\dagger} R_1^j | \Psi_0 \rangle f_{k\epsilon}^i(\mathbf{r}) f_{k\epsilon}^{j*}(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \langle \Psi_0 | R_1^{i\dagger} R_2^j | \Psi_0 \rangle \int_V d^3 r' \sum_{B \neq A} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_B) e^{i(\phi(r') - \phi(r))} f_{k\epsilon}^i(\mathbf{r}) f_{k\epsilon}^{j*}(\mathbf{r}') \right\rangle \delta(n_{(0)} K_{10} - k), \end{aligned} \quad (6.36)$$

gdzie V jest objętością, w której znajdują się atomy, a $\phi(\mathbf{r})$ oznacza fazę początkową stanu wzbudzonego atomu w położeniu \mathbf{r} . Jeżeli atomów jest dużo, ich rozkład można opisać za pomocą funkcji opisującej ich koncentrację. W najprostszym przypadku, gdy atomy są rozłożone jednorodnie w całej objętości V , należy w powyższym wzorze zamienić sumowania i delty Diraca, odpowiadające określonym położeniom atomów, na koncentrację równą N_{ex}/V :

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} = & \frac{\pi \mathcal{L}_{\text{diel}}^2 n_{(0)} K_{10}}{\hbar \varepsilon_0} \sum_{\mathbf{k}, \epsilon} \frac{N_{\text{ex}}}{V} \int_V d^3 r \left\langle \langle \Psi_0 | R_1^{i\dagger} R_1^j | \Psi_0 \rangle f_{k\epsilon}^i(\mathbf{r}) f_{k\epsilon}^{j*}(\mathbf{r}) \right. \\ & \left. + \frac{N_{\text{ex}}}{V} \langle \Psi_0 | R_1^{i\dagger} R_2^j | \Psi_0 \rangle \int_V d^3 r' e^{i(\phi(r') - \phi(r))} f_{k\epsilon}^i(\mathbf{r}) f_{k\epsilon}^{j*}(\mathbf{r}') \right\rangle \delta(n_{(0)} K_{10} - k). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Wówczas, drugi wyraz jest proporcjonalny do N_{ex}^2 , co jest przejawem nadpromienistości.

6.3. Emisja spontaniczna z układu atomów w różnych warstwach

Sformułowany opis dla układu wielu atomów w jednej warstwie można w prosty sposób rozszerzyć na przypadek atomów znajdujących się w wielu warstwach struktury. Atomy znajdujące się w każdej z warstw można potraktować jako oddzielny podukład, a hamiltonian całego układu przedstawić w postaci sumy hamiltonianów takich podukładów, zapisanych z użyciem modów pola odpowiednich warstw. Postępowanie to prowadzi do hamiltonianu oddziaływania w postaci:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \sum_j \sum_{A \in j} \frac{i \mathcal{L}_A}{\sqrt{2 \hbar \varepsilon_0}} \sum_{\mathbf{k}^{(j)}, \epsilon} \frac{[\mathbf{R}_A^\dagger, \hat{H}_{\text{at}}] \cdot \mathbf{f}_{k^{(j)}\epsilon}^{(j)}(\mathbf{R}_A) a_{k^{(j)}\epsilon}^{(j)} + a_{k^{(j)}\epsilon}^{(j)\dagger} \mathbf{f}_{k^{(j)}\epsilon}^{(j)*}(\mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{R}_A, \hat{H}_{\text{at}}]}{\sqrt{\omega_{k^{(j)}}^{(j)}}}, \quad (6.38)$$

gdzie $A \in j$ oznacza indeks przebiegający atomy w j -tej warstwie.

W wyrażeniu na $\Gamma^{(1)}$ pojawiają się elementy macierzowe iloczynów operatorów kreacji i anihilacji, które w tym przypadku mogą dotyczyć modów różnych warstw. Aby móc obliczyć ich wartości, należy najpierw wyrazić operatory kreacji i anihilacji modów różnych warstw przez siebie. Operatory potencjału wektorowego i pola elektrycznego rozwinięte na mody j -tej

warstwy $\mathbf{f}_{q^{(j)\lambda}}^{(j)}$ wyrażają się wzorami:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}^{(j),\lambda}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega_{q^{(j)}}^{(j)}}} \left(a_{q^{(j)\lambda}}^{(j)} \mathbf{f}_{q^{(j)\lambda}}^{(j)}(\mathbf{r}) + a_{q^{(j)\lambda}}^{(j)\dagger} \mathbf{f}_{q^{(j)\lambda}}^{(j)*}(\mathbf{r}) \right), \quad (6.39a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{q}^{(j),\lambda}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{q^{(j)}}^{(j)}}{2\varepsilon_0}} \left(a_{q^{(j)\lambda}}^{(j)} \mathbf{f}_{q^{(j)\lambda}}^{(j)}(\mathbf{r}) - a_{q^{(j)\lambda}}^{(j)\dagger} \mathbf{f}_{q^{(j)\lambda}}^{(j)*}(\mathbf{r}) \right). \quad (6.39b)$$

Wzory o identycznej postaci można zapisać dla rozwinięcia na mody warstwy i -tej. Przyrównując do siebie oba wyrażenia na \mathbf{A} i tak samo czyniąc z obydwoma wyrażeniami na \mathbf{E} , a następnie rzutując obie tak otrzymane równości na mod $\mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)}$, otrzymuje się układ równań na operatory kreacji i anihilacji modów j -tej warstwy, z którego wynika, że:

$$a_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)} = \sum_{\mathbf{q}^{(i),\lambda}} \delta_{\epsilon\lambda} \langle \mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)}, \mathbf{f}_{q^{(i)\epsilon}}^{(i)} \rangle a_{q^{(i)\epsilon}}^{(i)}. \quad (6.40)$$

Zatem, wiodący wyraz stałej rozpadu:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} = & \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} \sum_{\Psi'} \Omega_{\Psi_0\Psi'} \sum_j \sum_{A \in j} \sum_{j'} \sum_{B \in j'} \mathcal{L}_A \mathcal{L}_B \sum_{\mathbf{k}^{(j),\epsilon}} \sum_{\mathbf{q}^{(j'),\lambda}} \\ & \times \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^\dagger | \Psi' \rangle \cdot \mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)}(\mathbf{R}_A) \langle \mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)}, \mathbf{f}_{q^{(j')\lambda}}^{(j')} \rangle \mathbf{f}_{q^{(j')\lambda}}^{(j')*}(\mathbf{R}_B) \cdot \langle \Psi' | \mathbf{R}_B | \Psi_0 \rangle \\ & \times \delta(\Omega_{\Psi_0\Psi'} - \omega_{k^{(j)}}^{(j)}). \end{aligned} \quad (6.41)$$

W wyrazie tym można wydzielić część odpowiadającą wkładom od podukładów atomów znajdujących się w obrębie jednej warstwy oraz część opisującą wkład od oddziaływania pomiędzy takimi podukładami:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} = & \frac{\pi}{\hbar\varepsilon_0} \sum_{\Psi'} \Omega_{\Psi_0\Psi'} \sum_j \sum_{A \in j} \mathcal{L}_A \sum_{\mathbf{k}^{(j),\epsilon}} \\ & \times \left[\sum_{B \in j} \mathcal{L}_B \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^\dagger | \Psi' \rangle \cdot \mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)}(\mathbf{R}_A) \mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)*}(\mathbf{R}_B) \cdot \langle \Psi' | \mathbf{R}_B | \Psi_0 \rangle \right. \\ & \left. + \sum_{j' \neq j} \sum_{B \in j'} \mathcal{L}_B \sum_{\mathbf{q}^{(j'),\lambda}} \langle \Psi_0 | \mathbf{R}_A^\dagger | \Psi' \rangle \cdot \mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)}(\mathbf{R}_A) \langle \mathbf{f}_{k^{(j)\epsilon}}^{(j)}, \mathbf{f}_{q^{(j')\lambda}}^{(j')} \rangle \mathbf{f}_{q^{(j')\lambda}}^{(j')*}(\mathbf{R}_B) \cdot \langle \Psi' | \mathbf{R}_B | \Psi_0 \rangle \right] \\ & \times \delta(\Omega_{\Psi_0\Psi'} - \omega_{k^{(j)}}^{(j)}). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Pierwszy wyraz charakteryzuje się właściwościami opisanymi w poprzednim podrozdziale. Natomiast, ponieważ w drugim wyrazie występują pary modów różnych warstw, wkład od atomów z dwóch różnych warstw jest proporcjonalny do średniej geometrycznej widma modowego. Jeżeli przyjąć dla ustalenia uwagi $j = 0$ i $j' = J$, średnia ta wynosi $\sqrt{\rho_\epsilon(\mathbf{k})\rho'_\lambda(\mathbf{q}')}$, zgodnie ze stosowaną w poprzednich rozdziałach notacją. Przykładowe wartości przyjmowane przez tą średnią, dla $j = 0$ odpowiadającego środkowej warstwie struktury, znormalizowane do widma

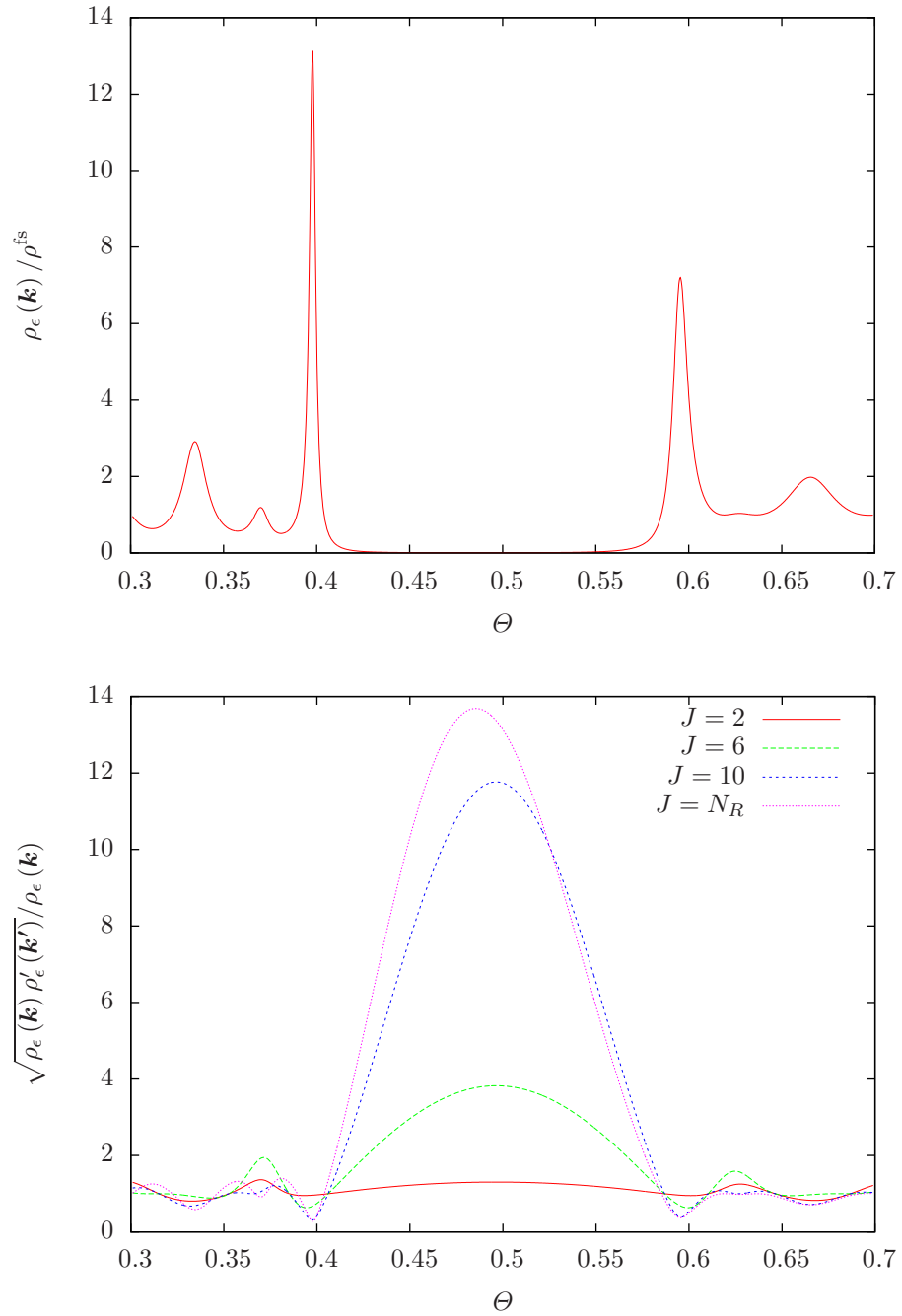
modowego warstwy $j = 0$ przedstawione są na rys. 6.1 i rys. 6.2. Wykresy na rys. 6.1 zostały wykonane dla struktury idealnej, natomiast wykresy na rys. 6.2 – dla struktury z defektem szerokości $\Lambda^{(0)}/\Lambda = 1$. Dla modów spoza przerw fotonicznych widmo modowe jest dosyć bliskie wartości próżniowej i podobnie zachowuje się średnia geometryczna widm modowych różnych warstw, zatem dla tych modów rozważany kolektywny składnik emisji spontanicznej nie ulega istotnej modyfikacji. W przypadku modów z przerwy fotonicznej, widmo modowe przyjmuje bardzo niskie wartości w warstwach bliskich środka struktury, lecz rośnie w miarę zbliżania się do krawędzi. Średnia geometryczna widm modowych jest zatem większa, niż widmo modowe warstwy w środku struktury, co oznacza, że dla atomów znajdujących się w tej warstwie emisja kolektywna wspólnie z atomami z warstw zewnętrznych stanowi uprzywilejowany przez pole elektromagnetyczne mechanizm relaksacji, który może osłabiać hamowanie emisji spontanicznej przez przerwę fotoniczną. Natomiast w przypadku modów defektowych, widmo modowe maleje w warstwach coraz dalszych od zdefektowanej i w rezultacie średnia geometryczna widm modowych również maleje. Zatem, dla atomów w pobliżu defektu, emisja kolektywna wspólnie z atomami z pozostałych warstw jest osłabiona. Z drugiej strony, sprzężenie tego typu z atomami w warstwie defektowej może stanowić mechanizm wzmocnienia emisji z atomów znajdujących się w pozostałych warstwach. Aby atomy mogły emitować promieniowanie kolektywnie wymagana jest korelacja pomiędzy nimi, przejawiająca się przez splątanie atomów, które może pojawić się wskutek oddziaływania z polem elektromagnetycznym, zarówno poprzez emisję wymuszoną, jak też spontaniczną [103, 104]. Sugeruje to, iż kolektywna emisja przez atomy z różnych warstw może zachodzić nawet wówczas, gdy atomy nie są pompowane koherentnie.

Aby mogła zajść kooperatywna emisja, atomy muszą znajdować się w odległości od siebie na tyle małej, aby pole wyemitowane przez jeden z nich było w stanie dotrzeć do drugiego przed zakończeniem aktu emisji [105]. Dla atomów w próżni, dystans ten jest ograniczony z góry przez krytyczną odległość L_c , która została podana przez Arecchi'ego i Courtensa [105]:

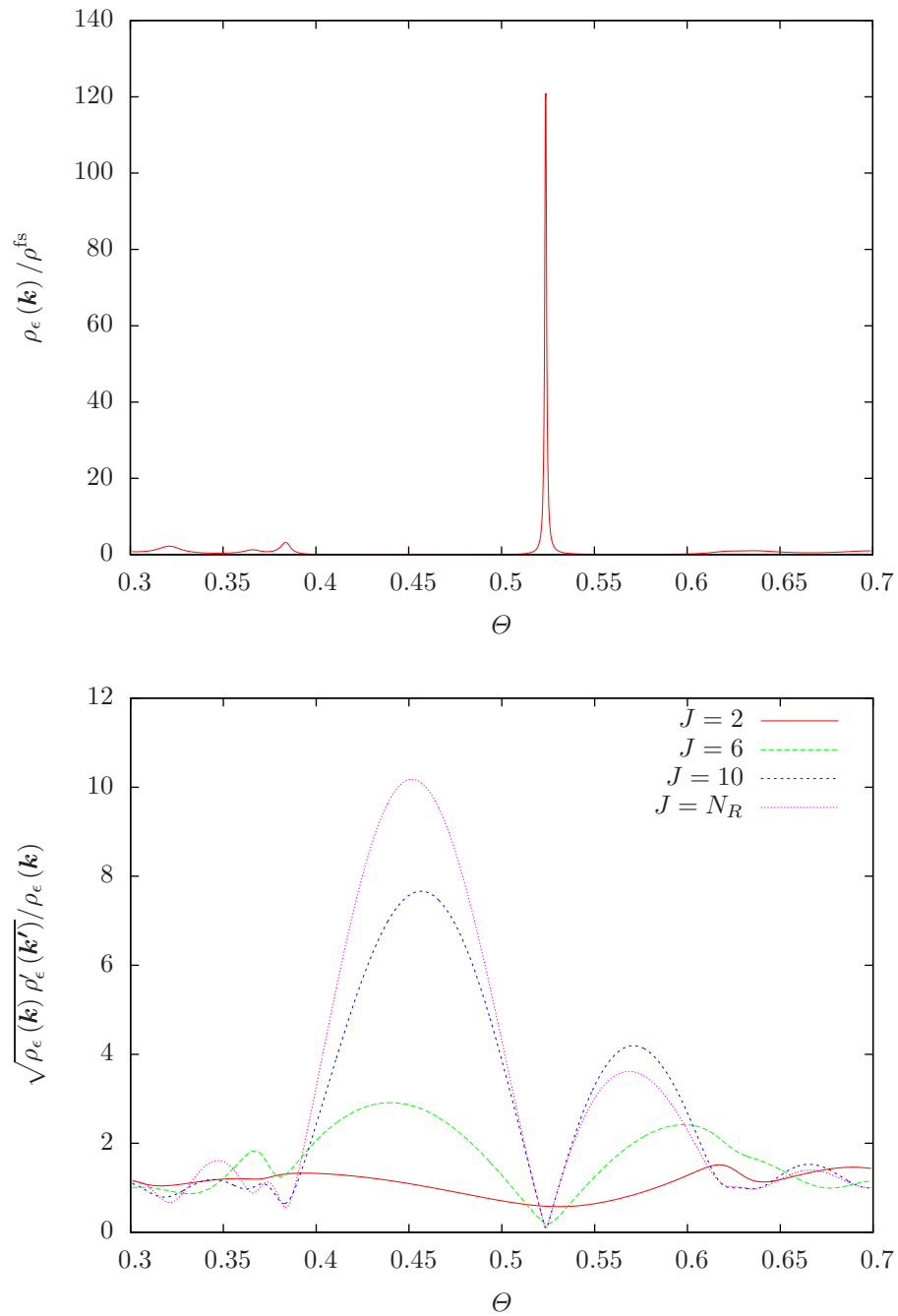
$$L_c = \frac{2}{\lambda} \sqrt{\frac{c}{\mathcal{N}\Gamma}}, \quad (6.43)$$

gdzie λ jest długością emitowanej fali, \mathcal{N} – koncentracją promieniujących atomów, Γ – szybkością emisji dla pojedynczego atomu. Dla przejść optycznych w gazach L_c jest zazwyczaj rzędu 10 cm. Za pomocą wzoru (6.43) można oszacować zgrubnie odległość L_c dla atomów emitujących falę świetlną w jednowymiarowym kryształcie fonicznym. Dla światła można przyjąć długość fali $\lambda \approx 1 \mu\text{m}$. Zakładając, że emisja nie jest istotnie hamowana, można podstawić $\Gamma \approx 10^9 \text{ s}^{-1}$ jako typową szybkość emisji fali świetlnej. Jako typową koncentrację atomów-emiterów można przyjąć $\mathcal{N} = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$. Ponieważ kryształ foniczny modyfikuje prędkość grupową światła, zamiast c należy wstawić v_g . Wówczas $L_c \approx 3\sqrt{v_g/c} \times 10^{-1} \text{ m}$. Nawet, gdyby prędkość grupowa światła spadała do pojedynczych m/s, tzn. $v_g/c \approx 10^{-8}$, odpowiadałoby to $L_c \approx 30 \mu\text{m}$. Tymczasem w pracach poświęconych badaniu spowolnienia

światła (ang. *slow light*) napotyka się doniesienia eksperymentalne o zdecydowanie mniejszych spowolnieniach prędkości grupowej. Np. w pracach [106, 107] zaobserwowano spowolnienie o czynnik 100, a w pracy [108] – o czynnik 300. W pracy [109] dyskutowano możliwość spowolnienia prędkości grupowej nawet do $10^{-5}c$, ale przy zastosowaniu materiałów o względnej przenikalności elektrycznej $\varepsilon \approx 100$, co jest wartością znacznie większą, niż oferują materiały zazwyczaj stosowane w optoelektronice. Zatem, do oszacowania można przyjąć jako reprezentatywną wielkość $v_g/c \approx 10^{-2}$. Wówczas, oszacowanie prowadzi do $L_c \approx 3$ cm, co stanowi dystans większy, niż typowe rozmiary przyrządów optoelektronicznych. Powyższe rozważania pozwalają postawić hipotezę, iż *możliwa jest kolektywna emisja spontaniczna fotonu, wspólnie przez atomy z różnych warstw kryształu fonicznego lub wnęki rezonansowej, co może mieć obserwowalne konsekwencje, szczególnie w przypadku atomów, z których emisja jest silnie hamowana przez strukturę*. Mianowicie, jeżeli w warstwie $j = 0$ występuje silne wygaszenie modu $f_{k\epsilon}$, co oznacza, że jego widmo modowe $\rho_\epsilon(\mathbf{k})$ przyjmuje bardzo małą wartość, szybkość emisji spontanicznej do tego modu jest zmniejszona względem próżniowej o czynnik $\rho^{\text{fs}}/\rho_\epsilon(\mathbf{k}) \gg 1$. Sprzężenie z atomem w pobliżu krawędzi struktury, dla którego widmo modowe jest bliskie wartości próżniowej, spowodowałoby emisję kolektywną o szybkości zmniejszonej jedynie o czynnik $\sqrt{\rho^{\text{fs}}/\rho_\epsilon(\mathbf{k})}$. Efekt ten byłby większy w przypadku sprzężenia z atomem w pobliżu defektu. Zjawisko to wpływałoby na skrócenie czasu życia stanu wzbudzonego atomu umieszczonego w otoczeniu hamującym emisję spontaniczną.



Rys. 6.1. Widmo modowe warstwy $j = 0$ i średnia geometryczna widm modowych warstw 0-wej i J -tej znormalizowana do widna modowego warstwy 0-wej – struktura bez defektu.



Rys. 6.2. Widmo modowe warstwy $j = 0$ i średnia geometryczna widm modowych warstw 0-wej i J -tej znormalizowana do widna modowego warstwy 0-wej – struktura z defektem $\Lambda^{(0)}/\Lambda = 1$.

7. Podsumowanie

W niniejszej rozprawie poruszono tematykę emisji spontanicznej zachodzącej w ośrodku o strukturze kryształu fotonicznego, tj. zbudowanego z periodycznie rozłożonych materiałów o różnych współczynnikach załamania. Ograniczono się do przypadku jednowymiarowego, tj. struktury, w której profil współczynnika załamania zmienia się tylko w jednym kierunku. Struktura taka posiada cechy właściwe również kryształom fonicznym dwu- i trójwymiarowym, a jest ona obiektem szczególnie nadającym się do rozważań teoretycznych, gdyż można opisać analitycznie pole elektromagnetyczne w takiej strukturze i dzięki temu ściśle badać jej właściwości, w tym modyfikację emisji spontanicznej. Jedną z metod, na których można oprzeć taki opis, jest metoda macierzy przejścia, przedstawiona w rozprawie wraz z pewnymi uwagami dotyczącymi modelowania pola tą metodą, poczynionymi przez autora rozprawy. Następnie, w głównej części rozprawy, opisano model efektywnego rezonatora, sformułowany przez autora rozprawy, który pozwala na wyznaczenie modów struktury, ale także definiuje wielkość charakteryzującą właściwości struktury, tzw. widmo modowe (konstrukcja tego modelu została szczegółowo przedstawiona w rozdziale 4). W modelu efektywnego rezonatora wyznacza się mody konkretnej warstwy, o której zakłada się, że umieszczone jest w niej źródło promieniowania – odpowiada to całkowicie sytuacji fizycznej. Wybraną warstwę traktuje się jako rezonator, który pobudza się falą płaską, a następnie oblicza się amplitudę wypadkowego pola, poprzez sumowanie fal odbitych na granicach warstwy. Stosunek amplitudy wypadkowego pola do amplitudy pobudzenia definiuje widmo modowe, które przekłada się na gęstość stanów. W ten sposób otrzymuje się opis właściwy dla przyjętej warstwy, a nie struktury jako całości, co jest istotne, gdyż właściwości struktury mogą być różne w jej poszczególnych fragmentach (i rzeczywiście takie są). Przeprowadzona została szczegółowa dyskusja modelu, przede wszystkim w zakresie konstrukcji ortonormalnej bazy modów. Pokazano także, że zbiory modów różnych warstw są równoważne, tzn. mody jednej warstwy można otrzymać poprzez kombinacje liniowe modów drugiej warstwy. W szczególności oznacza to, że zbiór modów w modelu efektywnego rezonatora i zbiór modów w modelu Carnigli-Mandela uzupełnionym o mody prowadzone są równoważne. Jednakże, zdefiniowane w modelu efektywnego rezonatora widmo modowe czyni opis własności struktury o wiele prostszym, co stanowi jego istotną zaletę i przewagę nad innymi, spotykanymi w literaturze, modelami. Przeprowadzona została dyskusja wykazująca, że widmo modowe pokazuje w prosty sposób właściwości struktury i dzięki temu pozwala na ich analizę. Sformułowanie modelu efektywnego rezonatora stanowi oryginalny dorobek autora rozprawy, udokumentowany także w publikacjach.

W rozprawie do opisu procesu emisji spontanicznej wykorzystano teorię kwantową w po-

łączeniu z modami otrzymanymi w modelu efektywnego rezonatora. Pokazano, że wkłady poszczególnych modów do szybkości emisji spontanicznej i prawdopodobieństwa emisji do konkretnych modów są proporcjonalne do widma modowego, co oznacza także, że wszelkie obserwowane poprzez widmo modowe własności struktury bezpośrednio przenoszą się na jej wpływ na emisję spontaniczną. Dzięki temu, widmo modowe znakomicie nadaje się do opisu emisji spontanicznej i badania jej modyfikacji. Pozwala to w prosty sposób przewidzieć wpływ zdefektowania struktury na przebieg tego procesu. Przede wszystkim, można zaobserwować, że wprowadzenie defektu pociąga za sobą pojawienie się modu defektowego, a przeprowadzone w pracy obliczenia dowodzą, że wprowadzony defekt prowadzi do zwiększenia szybkości emisji do modu defektowego jedynie w pewnej ograniczonej liczbie warstw wokół zdefektowanej. Powyższe spostrzeżenia dowodzą prawdziwości postawionych w rozprawie tez.

Rozważony został także przypadek emisji fotonu z układu wieloatomowego. Wyrowadzone zostało wyrażenie opisujące wiodący wkład do szybkości emisji spontanicznej w jednowymiarowym kryształcie fotonicznym w takim przypadku i przeprowadzona została dyskusja, w której wykazano, że dla dużej liczby wzbudzonych atomów szybkość ta jest proporcjonalna do kwadratu ich liczby, co znane jest jako zjawisko nadpromienistości. Zostało wykazane, że tak jak w przypadku jednoatomowym, emisja z układu wielu atomów znajdujących się w jednej warstwie jest scharakteryzowana przez wartości widma modowego, zaś gdy atomy znajdują się w różnych warstwach, pojawiają się także wyrazy proporcjonalne do średniej geometrycznej widm modowych modów tych warstw. Na tej podstawie, autor rozprawy postawił hipotezę, że emisja fotonu wspólnie przez atomy z różnych warstw, z których jeden znajduje się w otoczeniu silnie hamującym emisję, może mieć zauważalny wpływ w postaci wzrostu szybkości emisji z tego atomu.

Opisany w rozprawie model efektywnego rezonatora można również wykorzystać jako narzędzie w zagadnieniach typowo inżynierskich, związanych z projektowaniem przyrządów na bazie struktur z przerwą foniczną, przede wszystkim jednowymiarowych. Ponieważ model ów pozwala uwzględnić dowolne zdefektowanie struktury, gama jego potencjalnych zastosowań jest bardzo szeroka. Za jego pomocą można np. optymalizować układ warstw w diodach półprzewodnikowych, czy też dobierać parametry siatek Bragga w laserach włóknowych. Dzięki temu, iż jest to model analityczny, nie wymaga on czasochłonnych obliczeń numerycznych, w zasadzie umożliwia badanie dowolnych właściwości jednowymiarowych heterostruktur dielektrycznych, a zastosowanie widma modowego pozwala na łatwą analizę właściwości struktury, co czyni go szczególnie wygodnym narzędziem projektowo-badawczym.

Bibliografia

- [1] Z. Białynicka-Birula, „Cavity QED”, *Acta Phys. Pol. B* **27**, 2409 (1996).
- [2] E.M. Purcell, „Spontaneous emission probabilities at radio frequencies”, *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946).
- [3] K.H. Drexhage, „Influence of a dielectric interface on fluorescence decay time ”, *J. Lumin.* **1-2**, 693 (1970).
- [4] P. Goy, J.M. Raimond, M. Gross, S. Haroche, „Observation of cavity-enhanced single-atom spontaneous emission”, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1903 (1983).
- [5] F. de Martini, M. Marrocco, P. Mataloni, L. Crescentini, R. Loudon, „Spontaneous emission in the optical microscopic cavity”, *Phys. Rev. A* **43**, 2480 (1991).
- [6] K. Nishioka, K. Tanaka, T. Nakamura, Y. Lee, M. Yamanishi, „Observation of cavity effect on spontaneous emission lifetime in AlGaAs quantum microcavities using continuous tuning of emission wavelength”, *Appl. Phys. Lett.* **63**, 2944 (1993).
- [7] M.D. Tocci, M. Scalora, M.J. Bloemer, J.P. Dowling, Ch.M. Bowden, „Measurement of spontaneous-emission enhancement near the one-dimensional photonic band edge of semiconductor heterostructures”, *Phys. Rev. A* **53**, 2799 (1996).
- [8] G. Bourdon, I. Robert, R. Adams, K. Nelep, I. Sagnes, J.M. Moison, I. Abram, „Room temperature enhancement and inhibition of spontaneous emission in semiconductor microcavities”, *Appl. Phys. Lett.* **77** 1345 (2000).
- [9] A. Einstein, „Zur Quantentheorie der Strahlung”, *Phys. Z.* **18**, 121 (1917).
- [10] L. Allen, J.H. Eberly, K. Rzażewski, *Rezonans optyczny*, PWN, Warszawa, 1981.
- [11] V. Weisskopf, E. Wigner, „Berechnung der natürlichen Linienbreite auf Grund der Diracschen Lichttheorie”, *Z. Phys.*, **63**, 54 (1930).
- [12] R.J. Glauber, M. Lewenstein, „Quantum optics of dielectric media”, *Phys. Rev. A* **43**, 467 (1991).
- [13] R.H. Dicke, „Coherence in spontaneous radiation processes”, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- [14] J.W. Strutt (Lord Rayleigh), „On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure”, *Phil. Mag.* **24**, 145 (1887).
- [15] E. Yablonovitch, „Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics”, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2059 (1987).
- [16] S. John, „Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices”, *Phys. Rev. Lett* **58**, 2486 (1987).
- [17] Ch.C. Cheng, A. Scherer, R.-Ch. Tyan, Y. Fainman, G. Witzgall, E. Yablonovitch, „New fabrication techniques for high quality photonic crystals”, *J. Vac. Sci. Technol. B* **15**, 2764 (1997).
- [18] M. Campbell, D.N. Sharp, M.T. Harrison, R.G. Denning, A.J. Turberfield, „Fabrication of photonic crystals for the visible spectrum by holographic lithography”, *Nature* **404**, 53 (2000).

- [19] M. Lončar, T. Doll, J. Vučković, A. Scherer, „Design and fabrication of silicon photonic crystal optical waveguides”, *J. Lightwave Technol.* **18**, 1402 (2000).
- [20] S. Noda, K. Tomoda, N. Yamamoto, A. Chutinan, „Full three-dimensional photonic bandgap crystals at near-infrared wavelengths”, *Science* **289**, 604 (2000).
- [21] M. Bugajski, „Technologia nanostruktur półprzewodnikowych w zastosowaniu do wytwarzania przyrządów fotonicznych”, *Elektronika*, nr 2/2001, s. 34.
- [22] F. García-Santamaría, H.T. Miyazaki, A. Urquía, M. Ibisate, M. Belmonte, N. Shinya, F. Meseguer, C. López, „Nanorobotic manipulation of microspheres for on-chip diamond architectures”, *Adv. Mat.* **14**, 1144 (2002).
- [23] D.N. Sharp, M. Campbell, E.R. Dedman, M.T. Harrison, R.G. Denning, A.J. Turberfield, „Photonic crystals for the visible spectrum by holographic lithography”, *Opt. Quant. Electron.* **34**, 3 (2002).
- [24] X. Wang, C. Neff, E. Graugnard, Y. Ding, J.S. King, L.A. Pranger, R. Tannenbaum, Z.L. Wang, Ch.J. Summers, „Photonic crystals fabricated using patterned nanorod arrays”, *Adv. Mat.* **17**, 2103 (2005).
- [25] S. Cabrini, L. Businaro, M. Prasciolu, A. Carpentiro, D. Gerace, M. Galli, L.C. Andreani, F. Riboli, L. Pavesi, E. Di Fabrizio, „Focused ion beam fabrication of one-dimensional photonic crystals on Si₃N₄/SiO₂ channel waveguides”, *J. Opt. A* **8**, S550 (2006).
- [26] S. Pissadakis, Ch. Pappas, „Fabrication of one- and two-dimensional photonic crystals in phosphate glass substrates using ultraviolet laser holography and selective chemical etching”, *Int. J. Nanotechnol.* **6**, 99 (2009).
- [27] D. Shir, E.C. Nelson, Y.C. Chen, A. Brzezinski, H. Liao, P.V. Braun, P. Wiltzius, K.H.A. Bogart, J.A. Rogers, „Three dimensional silicon photonic crystals fabricated by two photon phase mask lithography”, *Appl. Phys. Lett.* **94**, 011101 (2009).
- [28] M. Lewenstein, J. Zakrzewski, T.W. Mossberg, „Spontaneous emission of atoms coupled to frequency-dependent reservoirs”, *Phys. Rev. A* **38**, 808 (1988).
- [29] G. Björk, S. Machida, Y. Yamamoto, K. Igeta, „Modification of spontaneous emission rate in planar dielectric microcavity structures”, *Phys. Rev. A* **44**, 669 (1991).
- [30] E.P. Petrov, V.N. Bogomolov, I.I. Kalosha, S.V. Gaponenko, „Emission of dye molecules in photonic crystals”, *Acta Phys. Pol. A* **94**, 761 (1998).
- [31] M. Boroditsky, R. Vrijen, T.F. Krauss, R. Coccioli, R. Bhat, E. Yablonovitch, „Spontaneous emission extraction and Purcell enhancement from thin-film 2-D photonic crystals”, *J. Lightwave Technol.* **17**, 2096 (1999).
- [32] P.St.J. Russell, S. Tredwell, P.J. Roberts, „Full photonic bandgaps and spontaneous emission control in 1D multilayer dielectric structures”, *Opt. Commun.* **160**, 66 (1999).
- [33] P. Lodahl, A. Floris van Driel, I.S. Nikolaev, A. Irman, K. Overgaag, D. Vanmaekelbergh, W.L. Vos, „Controlling the dynamics of spontaneous emission from quantum dots by photonic crystals”, *Nature* **430**, 654 (2004).
- [34] M. Fujita, S. Takahashi, Y. Tanaka, T. Asano, S. Noda, „Simultaneous inhibition and redistribution of spontaneous light emission in photonic crystals”, *Science* **308**, 1296 (2005).

- [35] S. Noda, M. Fujita, T. Asano, „Spontaneous-emission control by photonic crystals and nanocavities”, *Nature Photonics* **1**, 449 (2007).
- [36] H. de Neve, J. Blondelle, R. Baets, P. Demeester, P. van Daele, G. Borghs, „High efficiency planar microcavity LED’s: Comparison of design and experiment”, *Phot. Tech. Lett.* **7**, 287 (1995).
- [37] S. Bastonero, G.P. Bava, G. Chiadò Piat, P. Debernardi, R. Orta, R. Tascone, „Spontaneous emission evaluation in a photonic bandgap microcavity”, *Opt. Quant. Electron.* **31**, 857 (1999).
- [38] M. Bugajski, J. Muszalski, T. Ochalski, J. Kącki, B. Mroziewicz, „Resonant cavity enhanced photonic devices”, *Acta Phys. Pol. A* **101**, 105 (2002).
- [39] P. Szczepański, „Semiclassical theory of multimode operation of a distributed feedback laser”, *IEEE J. Quantum Electron.* **24**, 1248 (1988).
- [40] O. Painter, R.K. Lee, A. Scherer, A. Yariv, J.D. O’Brien, P.D. Dapkus, I. Kim, „Two-dimensional photonic band-gap defect mode laser”, *Science* **284**, 1819 (1999).
- [41] *Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers: design, fabrication, characterization, and applications*, red. C. Wilmsen, H. Temkin, L.A. Coldren, Cambridge University Press, Nowy Jork, 1999.
- [42] S. Popov, R. Zhang, S. Sergeev, A.T. Friberg, „Efficiency enhancement in a microcavity solid-state dye laser with Bragg grating reflectors”, *Cent. Eur. J. Phys.* **8**, 202 (2010).
- [43] J. Broeng, D. Mogilevstev, S.E. Barkou, A. Bjarklev, „Photonic crystal fibers: A new class of optical waveguides”, *Opt. Fiber Technol.* **5**, 305 (1999).
- [44] P.J. Roberts, T.J. Shepherd, „The guidance properties of multi-core photonic crystal fibres”, *J. Opt. A* **3**, S133 (2001).
- [45] E. Xifré-Pérez, L.F. Marsal, J. Ferré-Borrull, J. Pallarès, „Confinement in a planar waveguide with porous silicon omnidirectional mirrors as confining walls”, *J. Lumin.* **121**, 301 (2006).
- [46] N.A. Jackman, „Multilayer optical filters with random errors”, *Bell Labs Tech. J.* **3**, 112 (1998).
- [47] Q. Zhu, Y. Zhang, „Defect modes and wavelength tuning of one-dimensional photonic crystal with lithium niobate”, *Optik* **120**, 195 (2009).
- [48] Ch. Zhang, K. Qiu, „Design and analysis of coherent OCDM en/decoder based on photonic crystal”, *Opt. Laser. Eng.* **46**, 582 (2008).
- [49] R.D. Pradhan, G.H. Watson, „Impurity effects in coaxial-connector photonic crystals: A quasi-one-dimensional periodic system”, *Phys. Rev. B* **60**, 2410 (1999).
- [50] G.J. Schneider, S. Hanna, J.L. Davis, G.H. Watson, „Defect modes in coaxial photonic crystals”, *J. Appl. Phys.* **90**, 2642 (2001).
- [51] K.O. Hill, „Photosensitivity in optical fiber waveguides: Application to reflection fiber fabrication”, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 647 (1978).
- [52] G. Meltz, W.W. Morey, W.H. Glenn, „Formation of Bragg gratings in optical fibers by a transverse holographic method”, *Opt. Lett.* **14**, 823 (1989).
- [53] T. Erdogan, „Fiber Grating Spectra”, *J. Lightwave Technol.* **15**, 1277 (1997).
- [54] L. Ai, W.-F. Liu, Ch.-T. Kuo, M.-Y. Fu, T.-Ch. Chen, „Two by two ports fused fiber grating coupler”, *Microw. Opt. Tech. Lett.* **49**, 2309 (2007).
- [55] Ch. Kopp, A. Chelnokov, „Fiber grating couplers for silicon nanophotonic circuits: Design modeling methodology and fabrication tolerances”, *Opt. Commun.* **282**, 4242 (2009).

- [56] J.N. Winn, Y. Fink, S. Fan, J.D. Joannopoulos, „Omnidirectional reflection from a one-dimensional photonic crystal”, *Opt. Lett.* **23**, 1573 (1998).
- [57] D.N. Chigrin, A.V. Lavrinenko, D.A. Yarotsky, S.V. Gaponenko, „Observation of total omnidirectional reflection from a one-dimensional dielectric lattice”, *Appl. Phys. A* **68**, 25 (1999).
- [58] H.-Y. Lee, T. Yao, „Design and evaluation of omnidirectional one-dimensional photonic crystals”, *J. Appl. Phys.* **93**, 819 (2003).
- [59] J.P. Dowling, Ch.M. Bowden, „Atomic emission rates in inhomogeneous media with applications to photonic band structures”, *Phys. Rev. A* **46**, 612 (1992).
- [60] A.S. Sánchez, P. Halevi, „Spontaneous emission in one-dimensional photonic crystals”, *Phys. Rev. E* **72**, 56609 (2005).
- [61] D. Felbacq, R. Smaïli, „Density of states for finite photonic crystals”, *Phys. Rev. B* **67**, 085105 (2003).
- [62] C.K. Carniglia, L. Mandel, „Quantization of evanescent electromagnetic waves”, *Phys. Rev. D* **3**, 280 (1971).
- [63] H. Hammer, „Orthogonality relations for triple modes at dielectric boundary surfaces”, *J. Mod. Optic.* **50**, 207 (2003).
- [64] I. Białynicki-Birula, J.B. Brojan, „Completeness of evanescent waves”, *Phys. Rev. D* **5**, 485 (1972).
- [65] W. Żakowicz, „Spontaneous emission by atoms in simple environments”, *Acta Phys. Pol. A* **101**, 119 (2002).
- [66] P. Yeh, A. Yariv, C.-S. Hong, „Electromagnetic propagation in periodic stratified media. I. General theory”, *J. Opt. Soc. Am.* **67**, 423 (1977).
- [67] P. Yeh, *Optical waves in layered media*, John Wiley & Sons, Nowy Jork, 1988.
- [68] H. Rigneault, S. Monneret, „Modal analysis of spontaneous emission in a planar microcavity”, *Phys. Rev. A* **54**, 2356 (1996).
- [69] C. Creatore, L.C. Andreani, „Quantum theory of spontaneous emission in multilayer dielectric structures”, *Phys. Rev. A* **78**, 063825 (2008).
- [70] Z.H. Wang, „Orthogonal condition between two types of radiation modes for multilayer dielectric waveguides”, *Opt. Commun.* **144**, 187 (1997).
- [71] A. Rudziński, A. Tyszka-Zawadzka, P. Szczepański, „Simple model of the density of states in 1D photonic crystal”, *Proc. SPIE* **5950**, 59501A (2005).
- [72] A. Rudziński, P. Szczepański, A. Tyszka-Zawadzka, „Analityczny model gęstości stanów w strukturze jednowymiarowego kryształu fotonicznego”, *Elektronika*, nr 7/2007, s. 49.
- [73] A. Rudziński, A. Tyszka-Zawadzka, P. Szczepański, „Spatial and frequency domain effects of defects in 1D photonic crystal”, *Opt. Quant. Electron.* **39**, 501 (2007).
- [74] A. Rudziński, P. Szczepański, „Degeneration of one-dimensional photonic crystal by random layer thickness imperfections”, w: *IEEE Eurocon 2007*, 9-12 wrz. 2007, Warszawa, s. 258.
- [75] A. Rudziński, „Analytic expressions for electromagnetic field envelopes in 1D photonic crystal”, *Acta Phys. Pol. A* **111**, 323 (2007).
- [76] A. Rudziński, „Orthonormalization of radiation modes in effective resonator model of dielectric

- multilayer structure”, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 495 (2007); errata: *Acta Phys. Pol. A* **112**, 1327 (2007).
- [77] A. Rudziński, „Orthonormalization of substrate and guided modes in effective resonator model of dielectric multilayer structure”, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 505 (2007); errata: *Acta Phys. Pol. A* **113**, 1709 (2008).
- [78] A. Rudziński, P. Szczepański, „Struktura modowa wielowarstwowego dielektrycznego falowodu planarnego w modelu efektywnego rezonatora”, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 11/2008, s. 89.
- [79] A. Rudziński, „Some mathematical properties of effective resonator model of 1D dielectric multilayer structure”, *Acta Phys. Pol. A* **115**, 660 (2009).
- [80] A. Rudziński, P. Szczepański, „Calculation of atomic spontaneous emission rate in 1D finite photonic crystal with defects”, *Cent. Eur. J. Phys.*, artykuł przyjęty do publikacji; DOI: 10.2478/s11534-010-0001-4.
- [81] H. Benisty, H. de Neve, C. Weisbuch, „Impact of planar microcavity effects on light extraction – Part I: Basic concepts and analytical trends”, *IEEE J. Quantum Elect.* **34**, 1612 (1998).
- [82] J. Muszalski, *Semiconductor Microcavities*, ITE, Warszawa, 2002.
- [83] J.M. Bendickson, J.P. Dowling, M. Scalora, „Analytic expressions for the electromagnetic mode density in finite, one-dimensional, photonic band-gap structures”, *Phys. Rev. E* **53**, 4107 (1996).
- [84] S.D. Brorson, P.M.W. Skovgaard, *Optical mode density and spontaneous emission in microcavities*, w: *Optical processes in microcavities*, World Scientific, Singapur, 1996.
- [85] R.C. McPhedran, L.C. Botten, J. McOrist, A.A. Asatryan, C.M. de Sterke, N.A. Nicorovici, „Density of states functions for photonic crystals”, *Phys. Rev. E* **69**, 016609 (2004).
- [86] A.H.B. Ghasemi, S. Khorasani, H. Latifi, A.H. Atabaki, „Calculation of density of states in a 2D photonic crystal with separable profile of permittivity”, *Proc. SPIE* **6901**, 69010R (2008).
- [87] J.A. Stratton, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill, Nowy Jork, 1941.
- [88] J.D. Jackson, *Elektrodynamika klasyczna*, PWN, Warszawa, 1982.
- [89] T. Morawski, W. Gwarek, *Teoria pola elektromagnetycznego*, WNT, Warszawa, 1985.
- [90] E.J. Rothwell, M.J. Cloud, *Electromagnetics*, CRC Press, Boca Raton, 2001.
- [91] C.G. Someda, *Electromagnetic waves*, CRC Press, Boca Raton, 2006.
- [92] R. de L. Krönig, „On the theory of the dispersion of X-rays”, *J. Opt. Soc. Am.* **12**, 547 (1926).
- [93] H.A. Kramers, „La diffusion de la Lumiere par les atomes”, *Atti Cong. Intern. Fisica*, **2**, 545 (1927) .
- [94] J.S. Toll, „Causality and the dispersion relation: Logical foundations”, *Phys. Rev.* **104**, 1760 (1956).
- [95] M. Bayindir, C. Kural, E. Ozbay, „Coupled optical microcavities in one-dimensional photonic bandgap structures”, *J. Opt. A* **3**, S184 (2001).
- [96] L.I. Schiff, *Mechanika kwantowa*, PWN, Warszawa, 1977.
- [97] P. Meystre, M. Sargent, *Elements of Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [98] Ch. Hooijer, G. Li, K. Allaart, D. Lenstra, „Spontaneous emission in multilayer semiconductor structures”, *IEEE J. Quantum Elect.* **37**, 1161 (2001).
- [99] P. de Vries, A. Lagendijk, „Resonant scattering and spontaneous emission in dielectrics: Microscopic derivation of local-field effects”, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1381 (1998).

- [100] K. Regiński, T. Ochalski, J. Muszalski, M. Bugajski, J.P. Bergman, P.O. Holtz, B. Monemar, „Investigations of optical properties of active regions in vertical cavity surface emitting lasers grown by MBE”, *Thin Solid Films* **412**, 107 (2002).
- [101] A. Wójcik, T.J. Ochalski, J. Muszalski, E. Kowalczyk, K. Goszczyński, M. Bugajski, „Photoluminescence mapping and angle-resolved photoluminescence of MBE-grown InGaAs/GaAs RC LED and VCSEL structures”, *Thin Solid Films* **412**, 114 (2002).
- [102] C. Greiner, B. Boggs, T.W. Mossberg, „Superradiant emission dynamics of an optically thin material sample in a short-decay-time optical cavity”, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3793 (2000).
- [103] Y.-Q. Guo, H.-S. Song, L. Zhou, X.-X. Yi, „Entangling two-atom through cooperative interaction under stimulated emission”, *Int. J. Theor. Phys.* **45**, 2247 (2006).
- [104] G.H. Yang, L. Zhou, „Multilevel atomic entanglement induced by spontaneous emission in free space”, *Eur. Phys. J. D* **47**, 277 (2008).
- [105] F.T. Arecchi, E. Courtens, „Cooperative phenomena in resonant electromagnetic propagation”, *Phys. Rev. A* **2**, 1730 (1970).
- [106] H. Altug, J. Vučković, „Experimental demonstration of the slow group velocity of light in two-dimensional coupled photonic crystal microcavity arrays”, *Appl. Phys. Lett.* **86**, 111102 (2005).
- [107] T. Kawasaki, D. Mori, T. Baba, „Experimental observation of slow light in photonic crystal coupled waveguides”, *Opt. Express* **15**, 10274 (2007).
- [108] Y.A. Vlasov, M. O’Boyle, H.F. Hamann, S.J. McNab, „Active control of slow light on a chip with photonic crystal waveguides”, *Nature* **438**, 65 (2005).
- [109] J.H. Chu, O. Voskoboynikov, C.P. Lee, „Slow light in photonic crystals”, *Microelectron. J.* **36**, 282 (2005).

Lista publikacji autora rozprawy

Publikacje związane z tematyką rozprawy

1. A. Rudziński, A. Tyszka-Zawadzka, P. Szczepański,
“Simple model of the density of states in 1D photonic crystal”, *SPIE International Congress on Optics and Optoelectronics*, Warszawa, 28.08-2.09.2005;
Proc. SPIE **5950**, 59501A (2005).
2. A. Rudziński, A. Tyszka-Zawadzka, P. Szczepański,
“Simple model of spontaneous emission in 1D photonic crystal”, *Frontiers in Optics 2005/Laser Science XXI*, Tucson, 16-20.10.2005.
3. A. Rudziński, A. Tyszka-Zawadzka, P. Szczepański,
“Spatial and frequency domain effects of defects in 1D photonic crystal”, *International Workshop on Physics of Photonic Crystals and Metamaterials*, Bruksela, 12-13.06.2006;
Opt. Quant. Electron. **39**, 501 (2007).
4. A. Tyszka-Zawadzka, M. Koba, A. Rudziński, P. Szczepański,
“Statistical properties of light generated by photonic crystal laser”, *EOS Topical Meeting on Nanophotonics, Metamaterials and Optical Microcavities*, Paryż, 16-19.10.2006.
5. A. Rudziński,
“Analytic expressions for electromagnetic field envelopes in 1D photonic crystal”, *Acta Phys. Pol. A* **111**, 323 (2007).
6. A. Rudziński, P. Szczepański, A. Tyszka-Zawadzka,
„Analizy model gęstości stanów w strukturze jednowymiarowego kryształu fotonicznego”, *Elektronika*, nr 7/2007, s. 49.
7. A. Rudziński, A. Tyszka-Zawadzka, M. Koba, P. Szczepański,
“Spontaneous emission rate into radiation modes of 1D photonic crystal laser”, *NEMO's 2nd General Scientific Network Meeting*, Florencja, 17-18.05.2007.
8. A. Rudziński, P. Szczepański,
“Degeneration of one-dimensional photonic crystal by random layer thickness imperfections”, *IEEE Eurocon 2007*, Warszawa, 9-12.09.2007, s. 1269.
9. A. Rudziński,
„Modelowanie emisji spontanicznej w kryształach fotonicznych metodą efektywnego rezonatora”, *II Konferencja Naukowo-Techniczna Doktorantów i Młodych Naukowców*, Warszawa, 24-26.09.2007, s. 102.

10. A. Rudziński,
 “Orthonormalization of radiation modes in effective resonator model of dielectric multilayer structure”, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 495 (2007). Errata: *Acta Phys. Pol. A* **112**, 1327 (2007).
11. A. Rudziński,
 “Orthonormalization of substrate and guided modes in effective resonator model of dielectric multilayer structure”, *Acta Phys. Pol. A* **112**, 505 (2007). Errata: *Acta Phys. Pol. A* **113**, 1709 (2008).
12. A. Tyszka-Zawadzka, A. Rudziński, M. Koba, P. Szczepański,
 “Theory of intensity fluctuations of photonic crystal laser”, *EOS Topical Meeting on Diffractive Optics*, Barcelona, 20-23.11.2007.
13. A. Rudziński, P. Szczepański,
 „Struktura modowa wielowarstwowego dielektrycznego falowodu planarnego w modelu efektywnego rezonatora”, *Przegląd Elektrotechniczny*, nr 11/2008, s. 89.
14. A. Rudziński,
 “Some mathematical properties of effective resonator model of 1D dielectric multilayer structure”, *Acta Phys. Pol. A* **115**, 660 (2009).
15. A. Rudziński, P. Szczepański,
 “Calculation of atomic spontaneous emission rate in 1D finite photonic crystal with defects”, *Cent. Eur. J. Phys.*, artykuł przyjęty do publikacji.

Pozostałe publikacje

16. A. Rudziński, T. Keller, S. Wydra,
 „Projekt zintegrowanego narzędzia do testowania i weryfikacji układów konwersji częstotliwości”, *Krajowa Konferencja Radiokomunikacji, Radiofonii i Telewizji*, Gdańsk, 13-15.06.2007;
Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej, Radiokomunikacja, Radiofonia i Telewizja, nr 1/2007, s. 399.
17. A. Rudziński, S. Wydra, T. Keller,
 “Software tool for design and simulations of wideband RF upconverters”, *IEEE Eurocon 2007*, Warszawa, 9-12.09.2007, s. 1023.
18. A. Rudziński,
 „Ograniczenia przestrajania filtra pasmowoprzepustowego z zerem transmitancji na drugiej harmonicznej sygnału”, *Elektronika*, nr 2/2008, s. 45.
19. A. Rudziński,
 „Wpływ niedoskonałości elementów na działanie filtra pasmowoprzepustowego z zerem transmitancji na drugiej harmonicznej sygnału”, *Elektronika*, nr 10/2008, s. 100.

20. A. Rudziński, M. Puchalski, K. Pachucki,
“Relativistic, QED, and nuclear mass effects in the magnetic shielding of ^3He ”, *J. Chem. Phys.* **130**, 244102 (2009).
21. A. Rudziński,
„Oszacowanie dopuszczalnej nieliniowości trzeciego rzędu wzmacniacza sygnału OFDM”,
Przegląd Elektrotechniczny, nr 4/2010, s. 323.