

części dzielimy zadane pole; gdyż moment statystyczny zależy wyłącznie od wartości odcinka mn , odciętego na osi XX przez pierwszy i ostatni bok w- boku sznurowego; a te boki przecież zostaną bez zmiany, niezależnie od tego, na ile części dane pole podzielimy.

96. Za pomocą tego samego wieloboku sznurowego można wyznaczyć również momenty statyczne względem innych osi, równoległych do XX . Np. mom. stat. względem osi X_1X_1 wynosi $m_1n_1 \cdot \omega$ i t.d.

Z rysunku też wprost wynika, że moment statystyczny pola względem osi X_0X_0 , przechodzącej przez środek ciężkości danego pola, jest równy zeru.

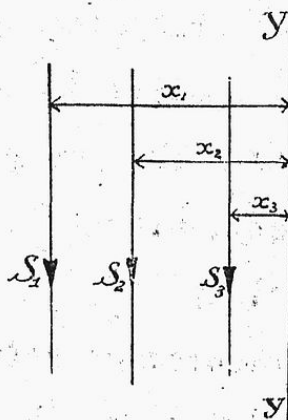
R O Z D Z I A Ł VI.

MOMENT BEZWŁADNOŚCI.

97. Moment bezwładności sił równoległych. Momentem bezwładności sił S_1, S_2, S_3 względem osi YY /rys.86/ nazywamy sumę iloczynów z tych sił przez kwadraty ich odległości od tej osi.

Jeśli więc oznaczymy ów moment przez J_y , a odpowiednie odległości przez x_1, x_2, x_3 , otrzymamy:

$$J_y = S_1 \cdot x_1^2 + S_2 \cdot x_2^2 + S_3 \cdot x_3^2.$$



RYŚ. 86.

Poznamy dwie metody wykreślnego wyznaczania momentów bezwładności sił, mianowicie sposób Culmanna i sposób Mohra.

98. Sposób Culmanna. Wyznaczymy dla przykładu moment bezwładności \mathcal{I}_y 4 sił: S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi YY /rys.87/.

W tym celu budujemy dla tych sił wielobok o dowolnym biegunie Ω z odległością biegunową ω . Budujemy następnie odpowiedni wielobok sznurowy, a punkty przecięcia się kolejnych boków tego ostatniego z osią YY oznaczmy literami f, g, h, i, k .

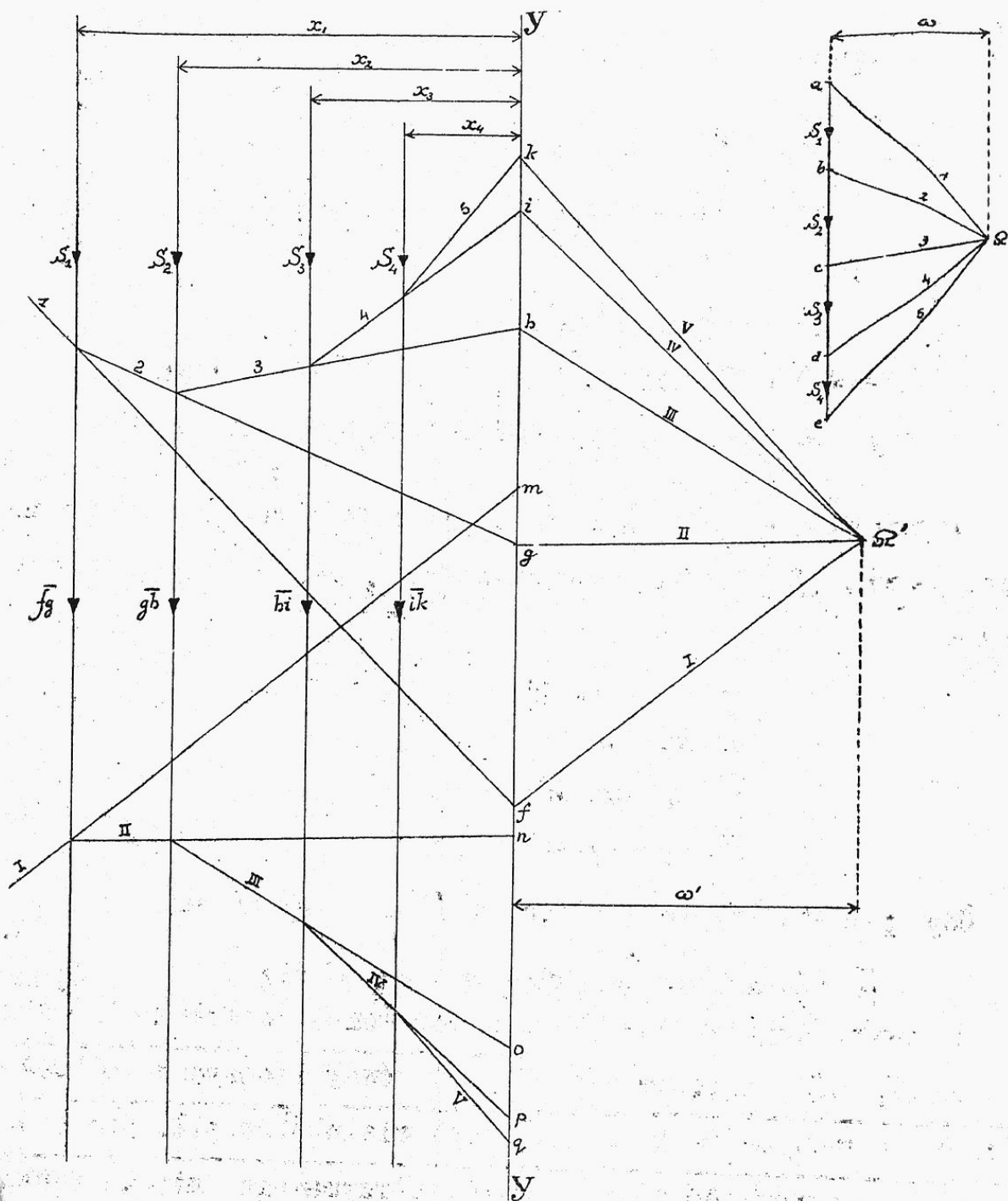
Uważajmy dalej odcinki $\overline{fg}, \overline{gh}, \overline{hi}, \overline{ik}$ jako nowe siły, działające wzdłuż tych samych linii co siły S_1, S_2, S_3, S_4 i zbudujmy dla nich nowy wielobok o biegunie Ω' z odległością biegunową ω' oraz odpowiedni wielobok sznurowy. Oznaczmy wreszcie przez m, n, o, p, q punkty przecięcia się kolejnych boków tego ostatniego z osią YY i zobaczmy, jakie znaczenie mają odcinki $\overline{mn}, \overline{no}, \overline{op}, \overline{pq}$.

W myśl par.97 możemy napisać:

$$\mathcal{I}_y = S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 + S_4 x_4^2,$$

albo

$$\mathcal{I}_y = S_1 x_1 x_2 + S_2 x_2 x_3 + S_3 x_3 x_4 + S_4 x_4 x_1 + \dots \dots \dots / V$$



RMS. 87.

Iloczyny $S_1 x_1, S_2 x_2, S_3 x_3, S_4 x_4$ są to momenty statyczne sił S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi Y. Zatem, na zasadzie par.44. będzie:

$$S_1 x_1 = \bar{f}g \cdot \omega$$

$$S_2 x_2 = \bar{g}h \cdot \omega$$

$$S_3 x_3 = \bar{h}i \cdot \omega$$

$$S_4 x_4 = \bar{i}k \cdot \omega$$

Podstawiając te wartości w równanie /1/, otrzymamy:

$$J_y = \omega (\bar{f}g \cdot x_1 + \bar{g}h \cdot x_2 + \bar{h}i \cdot x_3 + \bar{i}k \cdot x_4) \dots\dots\dots /2/$$

Iloczyny $\bar{f}g \cdot x_1, \bar{g}h \cdot x_2, \bar{h}i \cdot x_3, \bar{i}k \cdot x_4$ są to znów momenty statyczne wielkości, wyrażonych odcinkami $\bar{f}g, \bar{g}h, \bar{h}i, \bar{i}k$ względem osi Y. Zatem

$$\bar{f}g \cdot x_1 = \bar{m}n \cdot \omega'$$

$$\bar{g}h \cdot x_2 = \bar{n}o \cdot \omega'$$

$$\bar{h}i \cdot x_3 = \bar{o}p \cdot \omega'$$

$$\bar{i}k \cdot x_4 = \bar{p}q \cdot \omega'$$

Gdy podstawimy te wartości w /2/, to wypadnie:

$$J_y = \omega \cdot \omega' (\bar{m}n + \bar{n}o + \bar{o}p + \bar{p}q) = \omega \cdot \omega' \cdot \bar{m}q$$

Z wzoru tego wynika, że szukany moment bezwładności sił S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi YY jest równy iloczynowi odległości bieżunowych ω i ω' i dwóch wieloboków sił, pomnożonemu przez wartość odcinka $\bar{m}q$, otrzymanego między punktami przecięcia się z osią YY pierwszego i ostatniego boku wtórnego wieloboku samowego.

99. SPOSÓB MOHRA. Na rys. 88 mamy wyznaczony moment bezwładności sił S_1, S_2, S_3, S_4 względem osi YY sposobem Mehra.

Budujemy naprzód wielobok dla sił S_1, S_2, S_3, S_4 biegunie ω i odległości biegunowej $= \omega$ i wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy.

Punkty przecięcia się kolejnych boków tego ostatniego z osią YY oznaczmy literami f, g, h, i, k .

Na zasadzie paragrafu 97 jest

$$J_y = S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 + S_4 x_4^2$$

albo

$$J_y = S_1 x_1 \cdot x_1 + S_2 x_2 \cdot x_2 + S_3 x_3 \cdot x_3 + S_4 x_4 \cdot x_4 + \dots \dots \dots /1/$$

Iloczyny zaś $S_1 x_1, \dots, S_4 x_4$ są to momenty statyczne sił S_1, \dots, S_4 względem osi YY , zatem

$$S_1 x_1 = \bar{f}g \cdot \omega$$

$$S_2 x_2 = \bar{g}h \cdot \omega$$

$$S_3 x_3 = \bar{h}i \cdot \omega$$

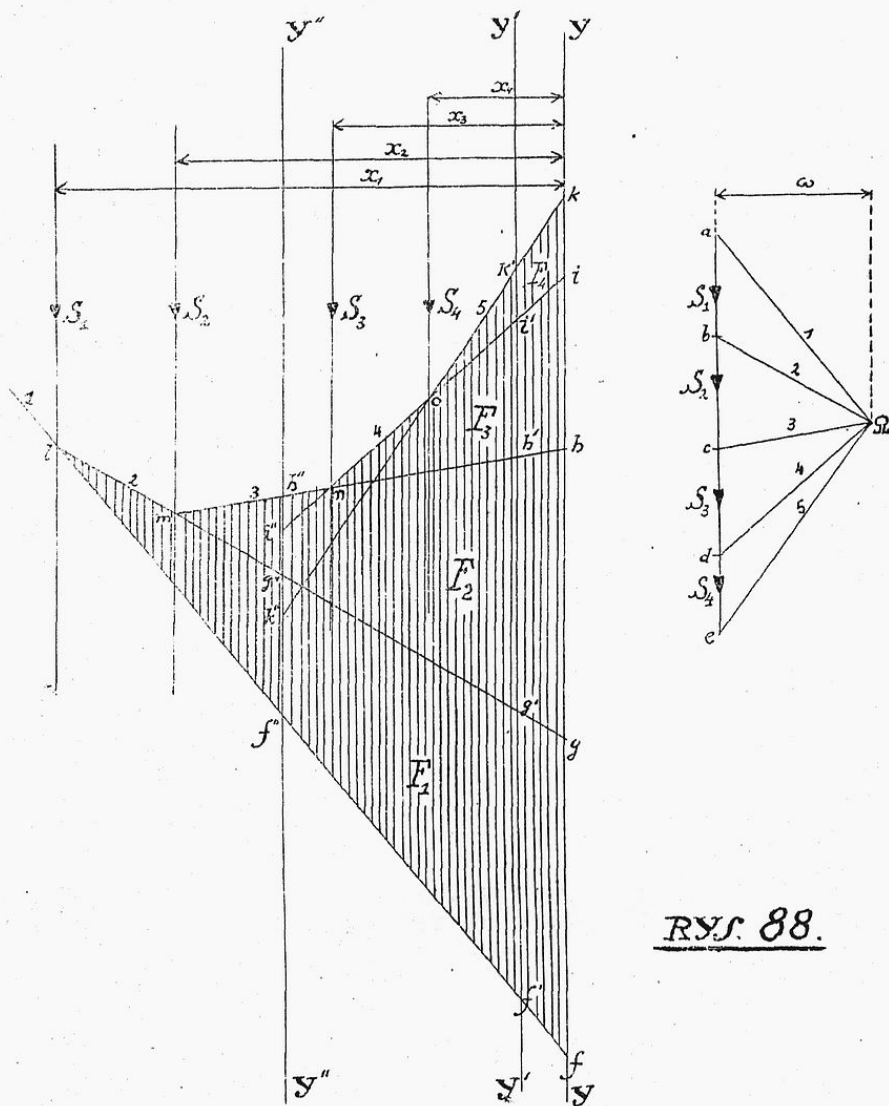
$$S_4 x_4 = \bar{i}k \cdot \omega$$

Podstawiamy to w /1/:

$$J_y = \omega (\bar{f}g \cdot x_1 + \bar{g}h \cdot x_2 + \bar{h}i \cdot x_3 + \bar{i}k \cdot x_4)$$

Iloczyny $\bar{f}g \cdot x_1, \bar{g}h \cdot x_2, \bar{h}i \cdot x_3, \bar{i}k \cdot x_4$ są odpowiednio równe pod-

wójnym polom trójkątów flg , gmb , hni , ioh . Oznaczmy te



rys. 88.

polą przez F_1, F_2, F_3, F_4 . Wówczas będzie:

$$\mathcal{J}_y = \omega(2F_1 + 2F_2 + 2F_3 + 2F_4) = 2 \cdot \omega(F_1 + F_2 + F_3 + F_4)$$

Jeżeli przez F oznaczmy pole wieloboku $flmnok$
wówczas

$$\mathcal{J}_y = 2 \omega \cdot F$$

Tak więc SZUKANY MOMENT BEZWŁADNOŚCI JEST RÓWNY PODWÓJNEMU ILOCZYNOWI Z ODLEGŁOŚCI BIEGUNOWEJ ω PRZESZ POLE FIGURY, ZAWARTEJ MIĘDZY OSIĄ YY , WIELOBOKIEM SZNUROWYM I SKRAJNEMI JEGO BOKAMI.

Pole to jest na rys.88 zakreskowane.

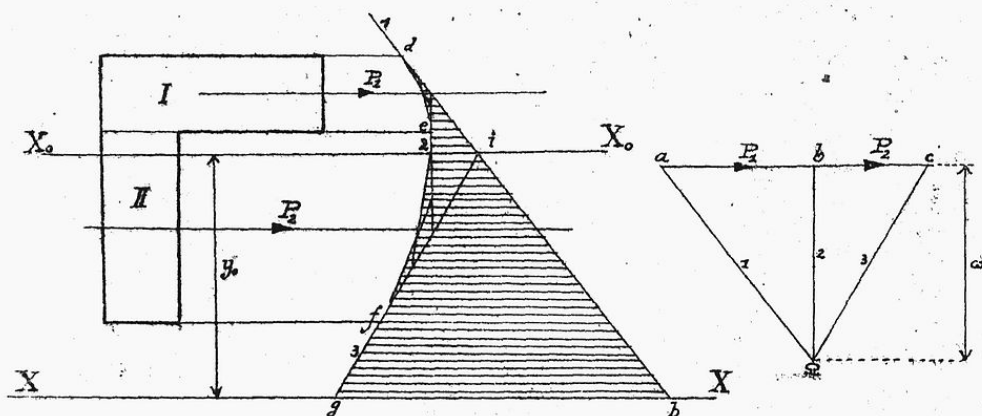
Przy pomocy wykreślonego wieloboku sznurowego możemy z łatwością wyznaczać momenty bezwładności tych samych sił względem innych osi, równoległych do YY . Np. moment bezwładności zadanych sił względem osi $Y'Y'$ jest równy podwójnemu iloczynowi z odległości biegunowej przez pole figury $f'lmnok$, a moment względem osi $Y''Y''$ wynosi

$2\omega \times$ pole figury $f'lmnok$.

Rozpatrując wartości pól F' przy różnych położeniach osi dojdziemy do wniosku, że MOMENT BEZWŁADNOŚCI JEST NAJMNIEJSZY, GDY OŚ PRZECHODZI PRZESZ ŚRODEK SIŁ $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots$

100. MOMENT BEZWŁADNOŚCI POLA. Znajdziemy dla przykładu moment bezwładności pól przekroju kątownika /rys.89/ względem osi XX , stosując sposób Mohra.

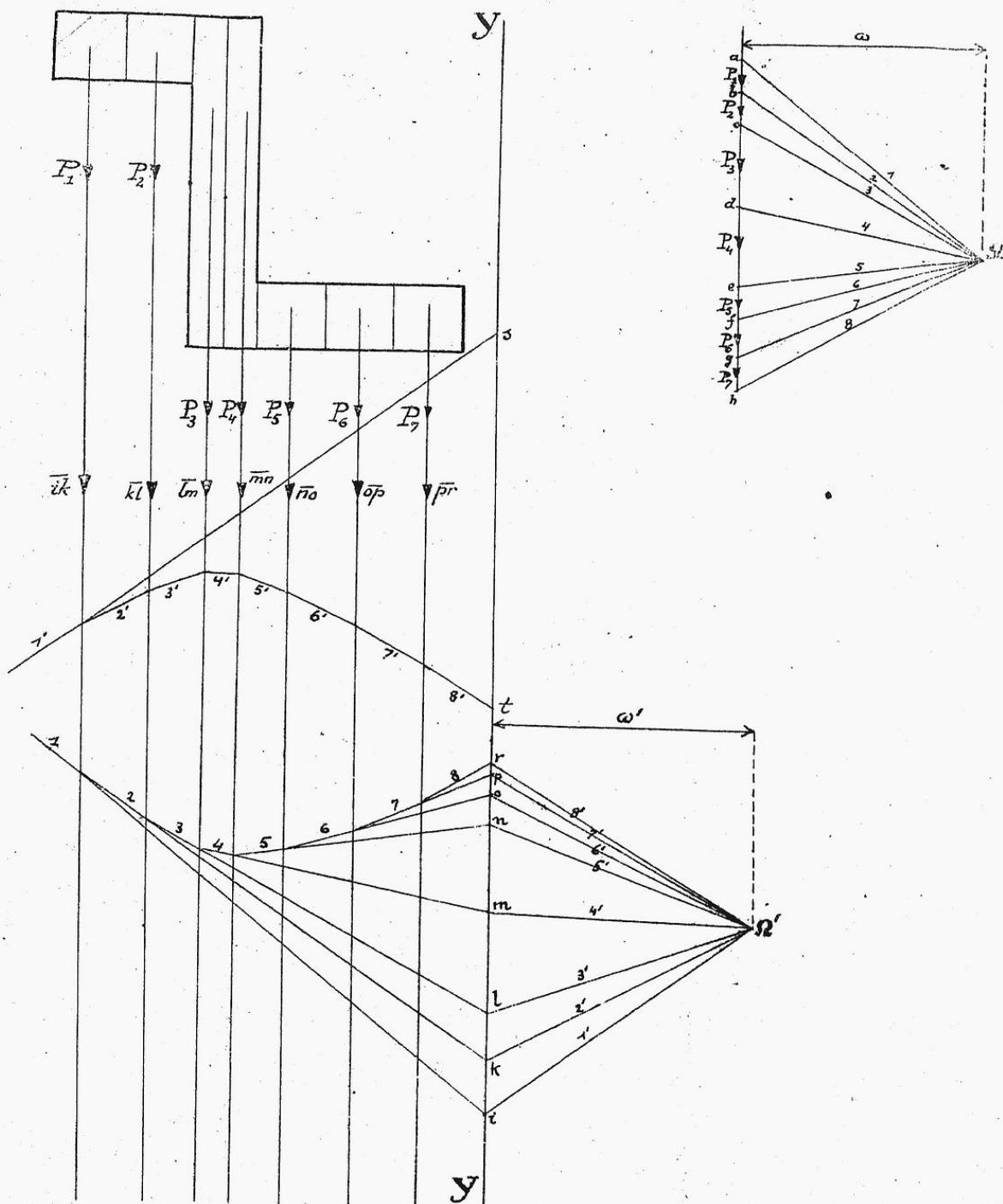
W tym celu dzielimy pole kątownika prostą, RÓWNOLEGŁĄ DO OSI XX na dwa prostokąty /I i II/; przyjmujemy, że do środka ciężkości każdego z nich jest przyłożona siła proporcjonalna do odpowiedniego pola i równoległa do osi XX . Dla sił tych budujemy wielobok z odległością biegunową równą ω oraz wielobok sznurowy. W wieloboku tym,



RYS. 89.

naależy zbudować parabole pomiędzy punktami d, e i e, f , albowiem mamy w danym razie do czynienia właściwie nie z siłami skupionymi, lecz ciągłymi. Pole, zawarte pomiędzy osią XX a figurą $bdefg$, pomnożone przez 2ω jest równe szukanemu momentowi. Najmniejszy moment bezwładności, oczywiście, jest dla osi X_0X_0 , przechodzącej przez środek ciężkości pola /par. 99/.

101. Na rys. 90 jest wyznaczony moment bezwładności zętownika względem osi YY sposobem Culmanna. Pole zętownika należy podzielić w tym razie na pewną liczbę części prostymi równoległymi do osi, przyczem dokładność obliczenia jest tem większa, im liczba części podziału jest większa.



rys. 90.

W środku ciężkości każdego pola przykładamy siłę, proporcjonalną do pola i równoległą do osi, a dalej postępujemy zupełnie tak samo, jak w przykładzie, rozpatrzonym w par.98. Budujemy więc wielobok sił P_1, P_2, \dots, P_7 o biegunie Z i odległości biegunowej ω , następnie wykreślamy odpowiedni wielobok sznurowy, którego boki odcinają na osi YY odcinki $\overline{zk}, \overline{k\bar{l}}, \dots, \overline{pr}$. Odcinki te uważamy jako siły, działające wzdłuż tych samych linii, co

P_1, P_2, \dots, P_7 i dla tych nowych sił budujemy nowy wielobok /odleg. bieg. = ω' / oraz odpowiedni wielobok sznurowy /wtórny/. Niech skrajne boki tego ostatniego wieloboku przecinają oś w punktach σ i τ ; wówczas szukany moment wynosi $\mathcal{J}_y = \omega \cdot \omega' \cdot \overline{\sigma\tau}$.

102. SKALA MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI. Moment bezwładności, jako iloczyn z siły przez kwadrat odległości, posiada wymiar kgm^2 / kg.cm^2 / albo m^4 / cm^4 /, jeśli mówimy o momencie bezwładności pola. Przy wyznaczaniu momentu sposobem Culmanna skale, przy których pomocy mierzymy odległości biegunowe ω, ω' oraz odcinek \overline{mq} /por.par.98/ powinny być tak obrane, aby iloczyn wymiarów tych wielkości dał kg m^2 / kg cm^2 / albo m^4 / cm^4 /.

Oczywiście, w tym razie KONIECZNE JEST MIERZENIE DWUCH KTÓRYCHKOLWIEK ODCINKÓW W SKALI DŁUGOŚCI I JEDNEGO W SKALI SIŁ /pól/.

Stosując sposób Mohra, otrzymujemy moment bezwładności, jako iloczyn $2 \omega F'$. Tu mamy do wyboru: albo $1/\omega$ mierzyć w skali sił /lub pól/, a poszczególne odcinki pola F' — w skali długości, albo $2/\omega$ — w skali długości, a wtedy wymiar pola będzie kgm. /albo m^3 /; w tym razie odcinki pola F' , równoległe do sił, należy mierzyć w skali sił /lub pól/, a odcinki prostopadłe do tamtych — w skali długości, albo też odwrotnie.

Najdogodniej jest mierzyć ω W SKALI SIŁ /LUB PÓŁ/, A ODCINKI POLA F' W SKALI DŁUGOŚCI.

103. W końcu par. 100 powiedziano, że najmniejszy moment bezwładności jest wówczas, kiedy oś przechodzi przez środek ciężkości danej figury. Opierając się na rys. 89, łatwo poznać zależność pomiędzy momentami bezwładności, obliczonymi względem osi $X_o X_o$, przechodzącej przez środek ciężkości pola i względem dowolnej osi XX , równoległej do poprzedniej. Oznaczmy pierwszy moment \mathcal{J}_o , drugi \mathcal{J}_x . Z poprzedniego wiemy, że $\mathcal{J}_x = 2 \cdot \omega \cdot F$, gdzie

F jest pole figury $defghd$. Pole to możemy uważać jako sumę dwóch pól: $defid = F_o$ i $gih = F_1$. Wówczas

$$\mathcal{J}_x = 2 \omega (F_o + F_1) = 2 \omega F_o + 2 \omega F_1.$$

$2 \omega F_o$ jest to moment bezwładności pola zadanej figury względem osi $X_o X_o$, zatem $= \mathcal{J}_o$, a więc

$$\mathcal{J}_x = \mathcal{J}_o + 2 \omega \cdot F_1.$$

Z trójkątów aPc i gbi znajdziemy:

$$\frac{P_1 + P_2}{\omega} = \frac{gh}{y_0}; \quad \text{stad} \quad \omega = \frac{(P_1 + P_2) y_0}{gh};$$

następnie $F_1 = \frac{1}{2} gh \cdot y_0$, zatem

$$J_x = J_0 + 2 \cdot \frac{P_1 + P_2}{gh} \cdot y_0 \cdot \frac{1}{2} gh \cdot y_0 = J_0 + (P_1 + P_2) \cdot y_0^2.$$

Ponieważ $P_1 + P_2 = P$ całemu polu zadanej figury, więc

$$J_x = J_0 + P y_0^2.$$

Stąd otrzymujemy twierdzenie: MOMENT BEZWŁADNOŚCI POLA WZGLĘDEM DOWOLNEJ OSI XX JEST RÓWNY MOMENTOWI BEZWŁADNOŚCI WZGLĘDEM OSI, PRZECHODZĄCEJ PRZEZ ŚRODEK CIĘŻKOŚCI DANEGO POLA, RÓWNOLEGŁE DO OSI XX , WIĘCEJ ILOCZYN POLA PRZEZ KWADRAT ODLEGŁOŚCI ŚRODKA CIĘŻKOŚCI TEGO POLA OD OSI XX .

104. UWAGI. Przytoczmy tu kilka uwag, o których należy zawsze pamiętać przy wyznaczaniu momentów bezwładności pól.

PRZY STOSOWANIU SPOSOBU MOHRA MOŻNA DZIELIĆ POLA JEDY-
NIE PROSTEMI, RÓWNOLEGŁEMI DO OSI TAK, ABY W KIERUNKU OSI
POLA CZĄSTKOWE NIE ZAKRYWAŁY SIĘ JEDNO DRUGIEM; w przeciw-
nym razie przy obliczeniu pól napotkamy trudności, nie łat-
we do przewyciężenia. Warunek powyższy nie jest koniecz-
ny w sposobie Culmanna, ponieważ tu pól nie obliczamy.
STOSUJĄC SPOSÓB MOHRA, MOŻEMY PRZY TYM SAMYM WIELOBOKU SIĘ

I WIELOBOKU SZNUROWYM WYZNACZAĆ MOMENTY WZGLĘDEM RÓŻNYCH OSI RÓWNOLEGŁYCH DO SIEBIE - wypada tylko każdorazowo obliczyć pole, które jest przytem zmienne.

NIE POZWALA NA TO SPOSÓB CULMANNA. Wymaga on nowego wieloboku sił i wieloboku sznurowego /wtórnych/ dla każdego położenia osi.

Co się tyczy dokładności, to pozornie wyznaczenie momentu sposobem Culmanna jest prostsze, gdyż do otrzymania odpowiedzi nie trzeba obliczać pól. Jednakże na niedokładność wpływa tu zawilsza, niż u Mohra, budowa wykresu oraz trudność, która powstaje przy znaczniejszej liczbie części podziału zadanego pola.

W sposobie Mohra dokładność odpowiedzi zależy z jednej strony od dokładności, z jaką możemy wykreślić odpowiednie krzywe sznurowe, i z drugiej strony od ścisłości, z jaką umiemy obliczać pola, ograniczone częściowo linjami krzywymi.

ROZDZIAŁ VII.

KRATOWNICE.

105. OKREŚLENIA. KRATOWNICĄ NAZYWAMY SZTYWNY UKŁAD PRĘTÓW PROSTYCH, POŁĄCZONYCH ZE SOBĄ PRZEGUBAMI /rys. 91/.

Punkty, w których zbiegają się pręty, nazywamy WĘZŁAMI.