

Tak więc np. /rys.54/ moment statyczny obciążenia belki na dłuę. AB wzgl. punktu $O = M_o (\sum P)_{AB} = m, m_2 \cdot \omega$, podobnież: $M_o (\sum P)_{CD} = n, n_2 \cdot \omega$; odcinki m, m_2 i n, n_2 są wyznaczone na prostej odcinków przez styczne do paraboli w punktach, odpowiadających linjom podziału pola $AA'B'B$. Obydwa momenty w danym przypadku są dodatnie.

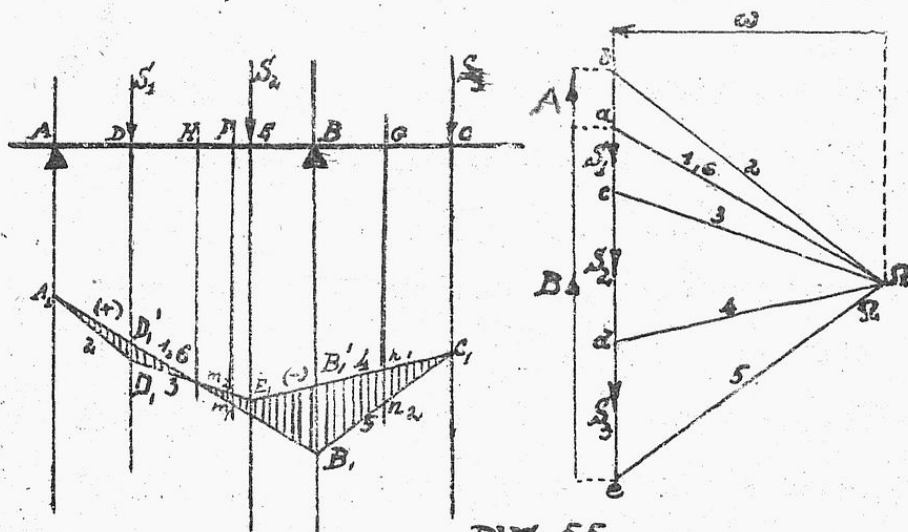
ROZDZIAŁ IV.

BELKA PROSTA NA DWUCH PODPORACH.

A. OBCIĄŻENIE BEZPOŚREDNIE.

56. OKREŚLENIE ODPORÓW.

Wyobraźmy sobie belkę prostą, opartą na dwóch podporach A i B i obciążoną pionowymi siłami skupionymi S_1, S_2, S_3 /rys.55/.



RYŚ. 55.

Podpory A i B wywołują odpory, których kierunki mogą być, wogóle, różnoredne. Jeśli

jednak przypuścimy, że jedna z podpor, dajmy na to A

stanowi jakgdyby ostrze, mogące wywierać działanie jedynie w pewnym kierunku naprz. pionowym, to również i oddziaływanie drugiej podpory będzie określone; w danym razie będzie pionowe.

Wynika to z tego, że pod wpływem sił pionowych S_1 , S_2 , S_3 albo ich wypadkowej R równoległej do nich, a więc siły pionowej oraz odporów A i B belka znajduje się w równowadze, zatem siła R odpory A i B powinny przeciąć się w jednym punkcie. Punkt ten znajduje się w nieskończoności, gdyż siły R i A są siłami równoległymi. Odpór B , wobec tego, musi być do nich równoległym.

Mając już kierunki oddziaływań A i B możemy wyznaczyć ich wartości, budując wielobok sił, o dowolnym biegunie O , oraz odpowiedni wielobok sznurowy i pamiętając, że zarówno wielobok sił jak i sznurowy powinny być zamknięte.

W tym celu układamy siły w szereg tak, aby NIEZNANE ODPORY A i B stały jeden na początku i drugi na końcu tego szeregu: A, S_1, S_2, S_3, B .

Przystępujemy do wykreślenia wieloboku sił: powinniśmy go zacząć od siły A , której początek niech będzie w p. a , koniec zaś w p. b . Ponieważ tej siły nie znamy, możemy narazie obrać tylko punkt b , JAKO KONIEC SIŁY A ; od punktu b odkładamy: odcinek bc , przedstawiający siłę S_1 , za nim odcinek cd - siłę S_2 .

odcinek de - siłę S_3 ; w p. e znaleźć się powinien POCZĄTEK SIŁY B , koniec tej siły upadnie na punkt a , gdyż wielobok sił ma być zamknięty. Na razie jednak punktu a nie znamy.

Obieramy, dalej, dowolny biegun P i kreślimy promienie: do punktu a - na razie nieznanego - niech pójdzie promień 1 /nie wykreślamy go/;

do p. b - prowadzimy promień 2

" " c " " 3

" " d " " 4

" " e " " 5

promień ostatni 6 powinien być poprowadzony do punktu a t.j. powinien się ułożyć wzdłuż promienia 1.

Promienie 1 i 6 będziemy mogli dopiero później wyznaczyć.

Przystępujemy teraz do budowy wieloboku sznurowego.

Bok 1 powinien przejść przez dowolny punkt A_1 , obrany na linii działania siły A , równoległe do promienia 1. Tego promienia nie znamy i, wobec tego, nie możemy też na razie wykreślić boku 1.

Wykreślamy dalsze boki wieloboku sznurowego:

przez p. A_1 bok 2 /równoległe do prom.2/ do siły S_1 -

do p. D_1

" p. D_1 " 3 / " " 3/ do siły S_2 -

do p. E_1

" p. E_1 " 4 / " " 4/ do siły S_3 -

do p. C_1

przez p. C_1 bok 5 /równoległe do prom.5/ do siły B
- do p. B_1

" p. B_1 powinien przejść bok 6, równoległe do promienia 6.

Ponieważ promienie 1 i 6, ze względu na równowagę układu sił pokrywają się, więc boki 1 i 6 powinny być równoległe; a że, dalej, wielobok sznurowy ma być zamknięty, zatem boki 1 i 6 powinny się pokrywać, czyli że jedyne ich położenie jest wzdłuż prostej, łączącej punkty A_1 i B_1 . Znaleźliśmy więc boki 1 i 6, tem samym mamy możność wykreślenia promieni 1, 6, prowadząc z bieguna R prostą równoległą do boku 1, 6.

Tą samą drogą znajdujemy punkt a , w którym przypadają POCZĄTEK SIŁY A i KONIEC SIŁY B . Zatem odcinek ab przedstawia nam odpór A , zaś odcinek ea - odpór B .

Znaleźliśmy więc oba odpory belki, podpartej w dwóch punktach, oraz wykreśliliśmy wielobok sznurowy dla sił, działających na belkę.

Zaznaczyć należy, że powyższy sposób, cokolwiek szczegółowiej opisany, daje się zastosować bez żadnej trudności do każdego najbardziej zawiłego przypadku belki, podpartej w dwóch punktach.

57. MOMENTY GNĄCE BELKI. Do wyznaczenia wymiarów belki, poddanej działaniu jakiegokolwiek układu sił^{x/},

x/ Jest to zagadnienie, rozpatrywane w "Wytrzymałości materiałów".

potrzebna jest znajomość t.zw. "momentu gnącego", który można określić w sposób następujący:

MOMENTEM GNĄCYM BELKI, WZGLĘDEM DANEGO PRZEKROJU, NAZYWAMY SUMĘ MOMENTÓW STATYCZNYCH WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NA LEWO OD TEGO PRZEKROJU WZGLĘDEM ŚRODKA CIĘŻKOŚCI TEGO PRZEKROJU.

Warunek, aby brać pod uwagę siły, leżące NA LEWO od rozważanego przekroju /nie zaś na prawo/ nie jest istotny, a ma jedynie na celu ujednolicienie postępowania. W samej rzeczy: zważmy, że wszystkie siły, działające na belkę, są w równowadze, a więc suma momentów statycznych wszystkich sił, leżących NA LEWO i NA PRAWO od danego przekroju względem jakiegokolwiek punktu, a więc względem środka ciężkości tego przekroju – jest = zeru; stąd mamy, że suma mom.stat. wszystkich sił, wziętych NA LEWO od danego przekroju i suma wszystkich sił, wziętych NA PRAWO od niego, muszą być sobie równe, różniąc się tylko znakiem. Posiadając wielobok sznurowy, możemy znajdować wprost momenty gnące względem któregośkolwiek przekroju belki, a to na zasadzie § 49. Tak więc np., aby wyznaczyć moment gnący, w przypadku zadania na rys.55, względem przekroju F czyli $(M_g)_F$, prowadzimy przez F prostą odcinków i szukamy przecięcia się jej z bokami przed i za siłami, znajdującymi się na lewo od F .

Aby znaleźć te boki zważaj, że na lewą część belki od zadanego przekroju działają siły A i S , które w wieloboku się mają początek w punkcie a i kończą się w punkcie C ; do tych punktów idą promienie 1 i 3; zatem przed siłami mamy bok 1, zaś za siłami bok 3.

Boki 1 i 3 przecinają się z linią odcinków w punktach m_1, m_2 ; wobec tego

$$(M_g)_F = -\overline{m_1 m_2} \cdot \omega$$

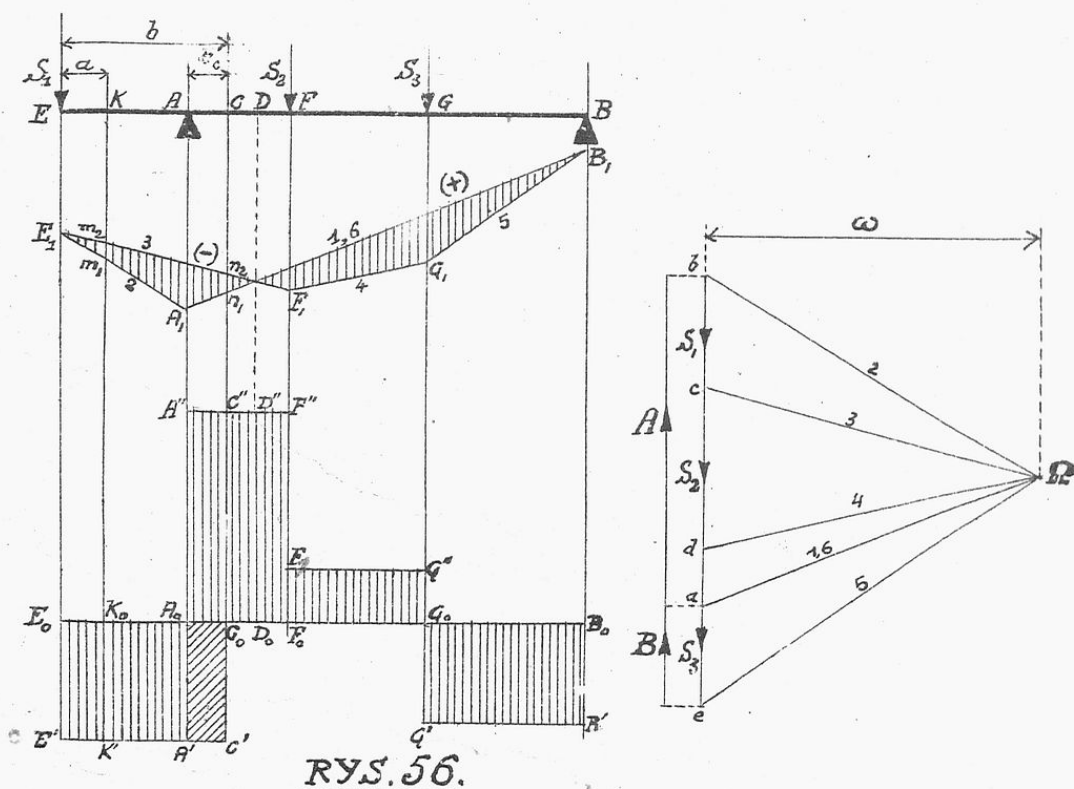
przyczem ω oznacza, jak zwykle, odległość biegunową.

Jeżeli będziemy obierali przekroje na prawo od poprzedniego przekroju F , to znajdować będziemy dla nich coraz większe wartości momentów gnących, przyczem będą one wciąż ujemne. Nad podporą B , panuje, jak widzimy, moment gnący największy $= (M_g)_B = -\overline{B_1 B_2} \cdot \omega$ poczem momenty zaczynają się zmniejszać; w przekroju G $(M_g)_G = -\overline{n_1 n_2} \cdot \omega$ i dalej staje się zerem dla przekroju, w którym działa siła S_3 . Łatwo dostrzeżemy, że w przekrojach na lewo od F moment gnący maleje, w przekroju H jest równy zeru, następnie zmienia znak /staje się więc dodatni/ i wzrasta aż do punktu D przyłożenia siły S_1 , gdzie $(M_g)_D = +\overline{D_1 D_2} \cdot \omega$, poczem maleje i nad podporą A jest zerem.

Widzimy, że wielobok sznurowy daje nam bezpośrednio możliwość wyznaczania momentów gnących dla dowolnego przekroju belki i wskazania, gdzie i jakie są momenty gnące. Wielobok ten obejmuje pewne pole, które możemy nazwać **POLEM MOMENTÓW GNĄCYCH** lub wprost **POLEM MOMENTÓW**

58. INNY PRZYKŁAD. Na rys.56 mamy wykreślone pole momentów, dla przykładu, stanowiącego nieznaczącą odmianę przykładu, rozwiązanego w paragrafie poprzednim. Można do niego bez zmiany zastosować te rozumowania, które przytaczaliśmy tam; nie chcąc się więc powtarzać, poprzestaniemy na samym wykresie, sądząc, że czytelnik sam da sobie radę.

59. SILY TNĄCZ. Na rys.56 pod polem momentów widzimy jeszcze inny wykres, zwany WYKRESEM SIŁ TNĄCZYCH.



RYS. 56.

Poznamy zaraz znaczenie nowego pojęcia, zaznaczając, że znajomość sił tnących jest potrzebna, według "wytrzymałości materiałów" do obliczania belek.

Otóż SIŁĄ TNĄCĄ, ALBO SIŁĄ POPRZECZNĄ DLA DANEGO PRZEKROJU BELKI NAZYWAMY ALGEBRAICZNĄ SUMĘ WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NA LEWO OD TEGO PRZEKROJU.

Tak więc np. dla wszystkich przekrojów belki od E do A siła tnąca ma wartość stałą i równą S_1 . Chcąc zbudować wykres tej siły tnącej, odmierzamy od dowolnej osi poziomej E_0B_0 odcinek $E_0E' = S_1$, i skierowany tak, jak siła S_1 , czyli w dół. Przez E' prowadzimy prostą $E'A'$ równoległą do E_0B_0 . Otrzymamy w ten sposób linię prostą, której rzędne będą oznaczały w każdym miejscu wartość siły tnącej.

Gdy przejdziemy wzdłuż belki, tuż poza przekrój A w prawo, to po lewej stronie dostrzegamy już dwie siły, mianowicie S_1 i odpór A . Te dwie siły dają wypadkową $A_0A_1 + A'A'' = A_0A''$ i skierowaną do góry, a więc taki odcinek należy odłożyć od osi E_0B_0 ku górze. Pomiędzy przekrojami A i F siła tnąca ma znowu wartość stałą, a więc wykresem jej jest prosta $A''F'' \parallel E_0B_0$. W dalszym ciągu dla punktów, leżących na prawo od F , przybywa jeszcze siła $S_2 = F'F'$, skierowana w dół, a więc jako siłę tnącą dla przekrojów między F i G będziemy uważali wypadkową sił S_1 , A i S_2 czyli $F_0F'' + F'F' = F_0F'$ i t.d. Postępując w dalszym ciągu w taki sam sposób, dojdziemy wreszcie do punktu B' , od którego w górę powinniśmy odłożyć odpór B . O ile wykres był wykonany prawidłowo, wtedy odcinek $B'B_0$ powinien być właśnie równy temu odporowi.

Wynika to stąd, że w przekroju B siła tnąca jest równa zeru /belka bowiem jest w równowadze, a więc suma wszystkich sił zewnętrznych musi być równą 0/.

Figura $E_o E' A' A'' F F' G G' B B_o$ nosi nazwę WYKRESU SIŁ TNĄCYCH lub SIŁ POPRZECZNYCH.

60. ZWIĄZEK, POMIĘDZY WYKRESEM MOMENTÓW GNĄCYCH I WYKRESEM SIŁ POPRZECZNYCH.

Weźmy pod uwagę przekrój belki K /rys.56/, odległy o a od przekroju E . Moment gnący dla tego przekroju możemy wyznaczyć:

$$(M_g)_K = -S_1 \cdot a$$

Ponieważ, z drugiej strony, $E_o E' = S_1$, a $E_o K_o = a$, zatem widzimy, że pole prostokąta $E_o E' K' K_o$ jest liczbowo równe momentowi gnącemu względem przekroju K .

Gdy przekrój K obierać będziemy coraz bliżej podpory A , to moment gnący względem tego przekroju będzie wzrastał, gdyż ramię a będzie coraz większe i pole $E_o E' K' K_o$ też będzie wzrastać.

O wzrastaniu momentów gnących ku podporze A wniosujemy też z pola momentów.

Gdy rozważany przekrój przesuniemy na prawo od podpory, to do wyznaczenia momentu gnącego będzie trzeba wziąć pod uwagę już dwie siły, mianowicie S_1 i odpór A . Będzie zatem

$$(M_g)_c = -S_1 \cdot b + A c \dots\dots\dots /1/$$

gdzie b i c oznaczają odpowiednie odległości przekroju C od sił S_1 i A .

Pierwszy składnik tej sumy wyraża pole $E_o E' C' C_o$, drugi zaś - pole $A' A'' C'' C'$, zatem otrzymujemy: $(M_g)_c = -E_o E' C' C_o + A' A'' C'' C' = -E_o E' A' A_o - A_o A' C' C_o + A_o A' C' C_o + A_o A' C'' C_o = -E_o E' A' A_o + A_o A' C'' C_o$.

Umówmy się pola POD osią $E_o B_o$ uważać za ujemne, zaś NAD osią $E_o B_o$ za dodatnie, wówczas $(M_g)_c$ obliczymy jako sumę pól, zawartych między osią $E_o B_o$, linią sił tnących oraz dwiema rzędnymi, z których jedna należy do lewego końca belki, druga poprowadzona jest przez dany przekrój.

Łatwo dostrzeżemy, że gdy tylko przekroczymy podporę A , to zjawiają się pola dodatnie, które będą zmniejszały sumę poprzednią. Z tego wynika, że, o ile linia sił tnących przecina oś $E_o B_o$ w pewnym miejscu, to moment gnący w tym miejscu posiada wartość największą, a więc i rzędne wieloboku sznurowego osiągają tutaj maximum^{x/}.

W przekroju D moment gnący jest zerem, co wskazuje, że pole $E_o E' A' A_o$ musi być równe polu $A_o A'' D'' D_o$. Poza przekrojem D będą już momenty dodatnie, rosnące w miarę zbliżania się do przekroju F . Za tym przekrojem mamy mo-

^{x/} Wartość momentu gnącego nad podporą A w naszym przykładzie jest ujemna; wobec tego właściwie należałoby uważać ją jako "minimum". Ponieważ, jednak, z punktu widzenia "wytrzymałości materiałów" jest wszystko jedno, czy mamy do czynienia z momentem gnącym ujemnym, czy dodatnim, więc największe wartości tych momentów będziemy zawsze notowali jako "maximum".

menty, wprowadzie wciąż dodatnie, ale już wolniej rosnące, bo przybywa tu działanie siły S_2 , dającej momenty ujemne. To samo wynika z rozpatrywania wykresu sił tnących, gdzie, jak widzimy, przy przesuwaniu się do przekroju F przybywają pola prostokątów o większych wysokościach, niż poza tym przekrojem. Dla przekroju G mamy znowu moment "maximum" i jednocześnie widzimy, że linja sił tnących w tem miejscu przecina oś $E_0 B_0$.

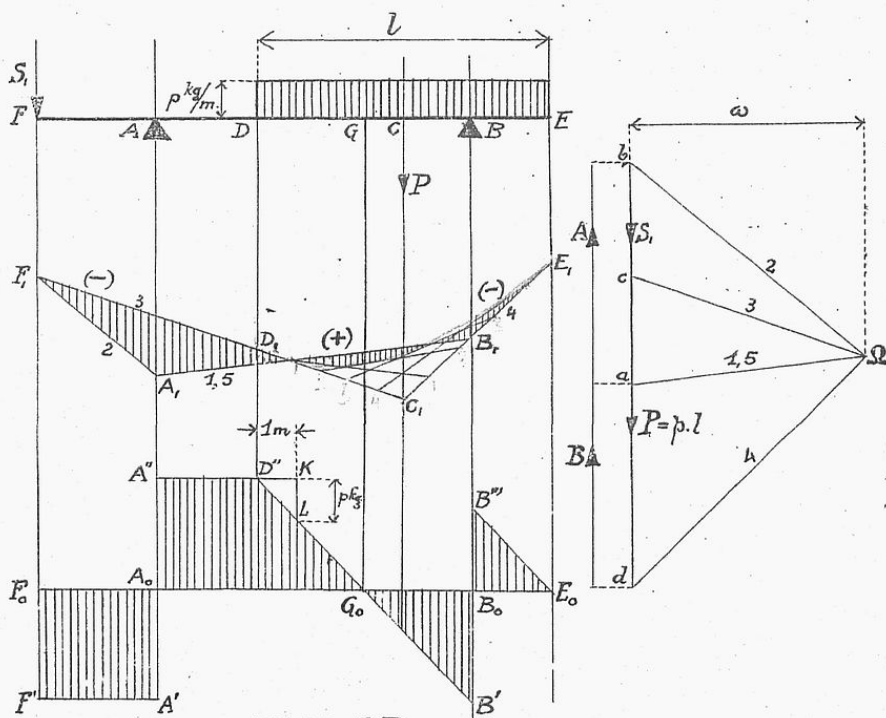
Dla punktu B moment gnący otrzymujemy równy zero; jednocześnie dostrzegamy, że linja sił tnących tworzy ponad osią pola dodatnie i pod osią pola ujemne, przyczem wartości pól dodatnich i ujemnych są równe - w sumie dają zero.

Z powyższego można wyprowadzić następujący wniosek ogólny: MAXIMUM MOMENTU GNĄCEGO ZNAJDESIEMY DLA TYCH PRZEKROJÓW BELKI, W KTÓRYCH WYKRES SIŁ TNĄCYCH PRZECINA OŚ BELKI.

61. WYKRES SIŁ TNĄCYCH DLA CIĄGŁEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTAJNEGO. Rys. 57 zawiera wielobok sznurowy - inaczej pole momentów oraz wykres sił tnących dla belki, obciążonej jedną siłą skupioną S_2 oraz na długości l siłą ciągłą, wynoszącą p kg/m.

Wykreślenie wieloboku sznurowego wykonany z łatwością; stąd otrzymany pole momentów.

Tak samo nie znajdziemy trudności przy wykreśleniu linji sił tnących, aż do punktu D , gdzie zaczyna się obciążenie ciągłe.



RYS. 57.

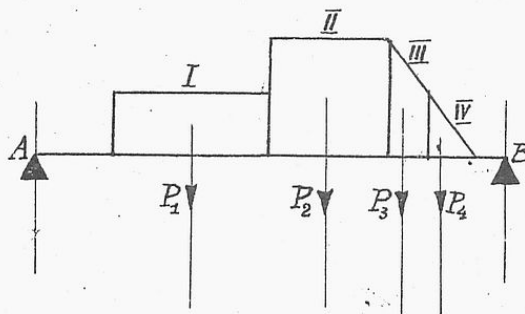
Od tego punktu siła tnąca maleje stale, a ponieważ obciążenie jest jednostajne, więc ubytek jej będzie proporcjonalny do odległości od przekroju D , czyli wyrazi się za pomocą prostej pochyłej $D''B'$. Wykreślimy tę prostą, korzystając z tego warunku, że w odległości 1 m. $D''K$ od D'' siła tnąca jest o ρ kg. = KL /nie ρ kg/m./ mniejszą, niż w przekroju D .

W przekroju na podporze B zachodzi skok w wartości siły tnącej o wartość oporu $B = B'B''$, a następnie mamy znowu spadek według prostej $B''E_0$, równoległej do $D''B'$; prosta $B''E_0$ powinna przeciąć oś F_0E_0 w punkcie E_0 , gdyż tu siła tnąca = 0.

Linia sił tnących $F_0FA'A''D''B'B''E_0$ przecina oś F_0E_0

w trzech punktach: A_0 , G_0 i B_0 , co wskazuje, że w przekrojach, odpowiadających punktom A , G i B mom. gnące otrzymają wartość maximum.

62. OBCIĄŻENIE NIEJEDNOSTAJNE. Aby wyznaczyć wykresy momentów i sił tnących dla przypadku obciążenia ciągłego niejednostajnego, postępujemy na zasadzie par. 51 /rys. 58/. Dzielimy więc pole obciążeń na części, wyznaczamy środek ciężkości każdej z nich i uważamy, że w tych środkach są skupione odpowiednie ciężary i dla nich budujemy nasze wykresy.



RYŚ. 58.

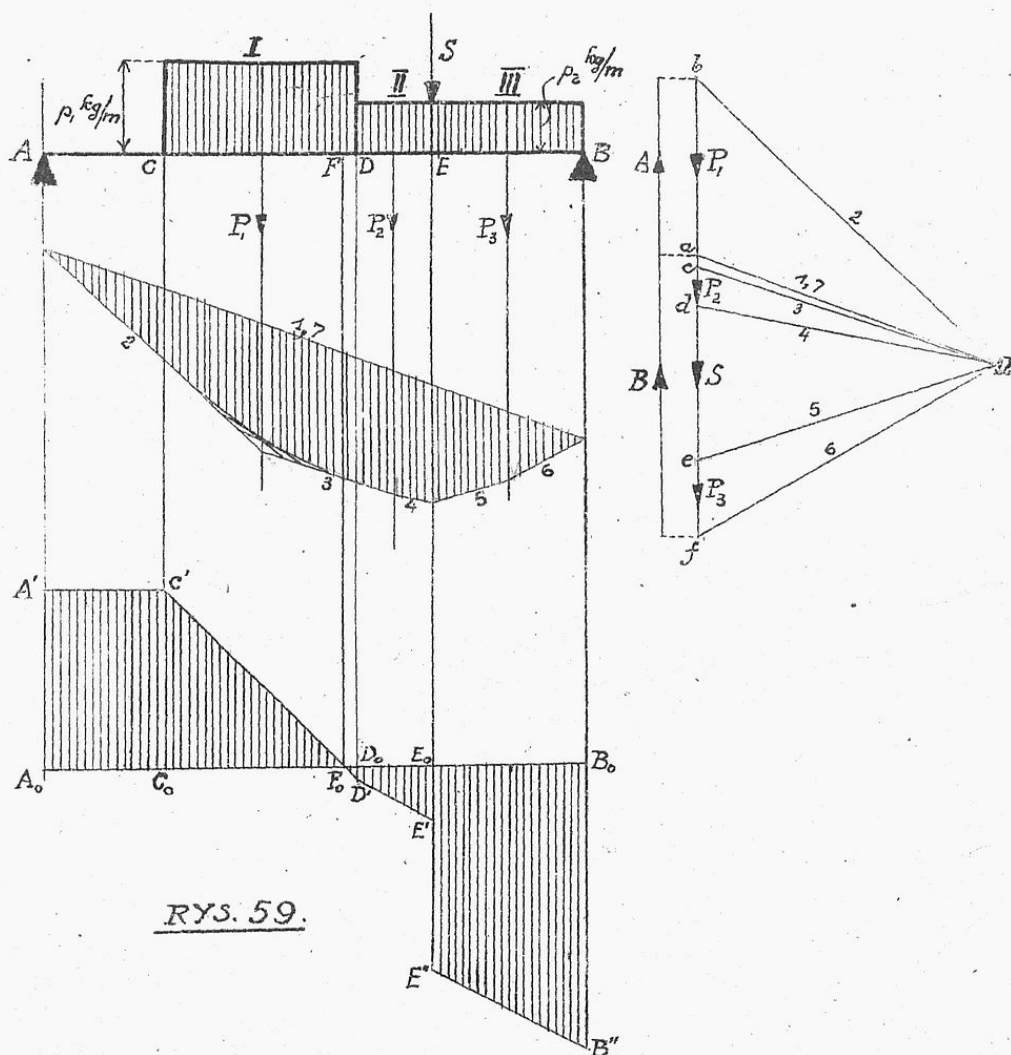
O ile owe części są prostokątami, to wykres momentów trzeba uzupełnić odpowiednimi parabolami; w przeciwnym razie zadawalnimy się przybliżeniem, poprzestając na siłach skupionych, otrzymanych przez podział pola obciążeń na możliwie znaczną liczbę pól cząstkowych. Analogicznie postępujemy przy wykreślaniu sił tnących.

63. PRZYKŁAD. Na rys. 59 mamy przykład obciążenia ciągłego niejednostajnego współ z działaniem siły skupionej S . Podział pola obciążeń uskuteczniamy w punktach D /gdzie zachodzi zmiana obciążenia/, i E , gdzie jest

przyłożone siła skupiona S , a dalej postępujemy w sposób, wskazany w par. poprzednim.

Wykres siły tnącej, otrzymany od obciążenia I, tworzy prosta $C'D'$, której pochyłość wyznacza obciążenie jednostkowe p_1 kg/m. Pochyłość prostych $D'E'$ i $E''B''$, odpowiadających obciążeniom II i III jest inna; wyznaczamy ją z obciążenia jednostkowego p_2 kg/m.

Odcinek $E'E''$ jest równy sile S , a o ile wykres był prawidłowo wykonany, powinno być $B''B_0 = Bfa$ /w wieloboku sił/.



RYS. 59.