

ROZDZIAŁ II.

SKŁADANIE I ROZKŁADANIE SIŁ PRZYŁOŻONYCH DO RÓŻNYCH PUNKTÓW I DZIAŁAJĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYZNIE. WIELOBOKI VARIGNONA; ICH WŁASNOŚCI. WARUNKI RÓWNOWAGI.

20. Rozpatrzmy obecnie PRZYPADEK OGÓLNY KIEDY SIŁY PRZYŁOŻONE SĄ DO RÓŻNYCH PUNKTÓW DANEGO CIAŁA.

Znajdźmy wypadkową tego układu. Założmy, że wszystkie siły danego układu są położone w jednej płaszczyźnie.

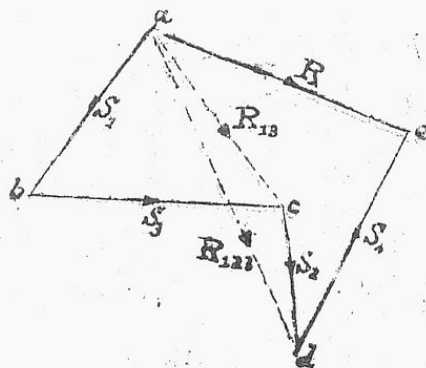
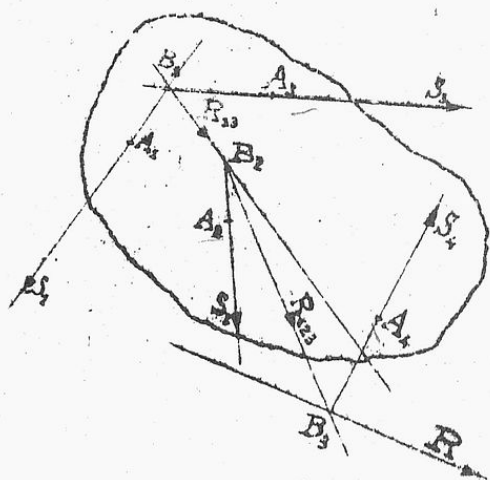


FIG. 19.

Przypuśćmy więc, że na dane ciało działają siły S_1, S_2, S_3, S_4 , przyłożone odpowiednio do punktów A_1, A_2, A_3, A_4 ; mamy znaleźć wypadkową tych sił.

Wyznamy naprzód wypadkową sił S_1 i S_2 . Możemy na zasadzie Par. 5 uważać, że te dwie siły są przesunięte do wspólnego punktu B_1 , w którym przecinają się ich linie działania; w takim razie wypadkową ich

R_{13} znajdziemy z łatwością, na zasadzie Par. 8. Na rysunku pomocniczym kreślimy więc trójkąt sił abc , w którym odcinki ab i bc wyrażają pod względem wartości, kierunku i lotu siły S_1 i S_3 . Bok zamykający ac jest równy wypadkowej R_{13} ; linią jej działania jest prosta, równoległa do tego boku i przechodząca przez punkt B_1 .

W taki sam sposób wyznaczymy wypadkową sił R_{13} i S_2 czyli R_{123} ; przejdzie ona przez punkt B_2 przecięcia się dwóch owych składowych, a co do wartości, kierunku i lotu wyrazi ją odcinek ad na rysunku pomocniczym.

Wreszcie, wyznaczymy w ten sam sposób wypadkową sił R_{123} i S_4 , które się przecinają w punkcie B_3 ; jest to oczywiście, szukana wypadkowa R całego układu zadanego. Linia jej działania przechodzi przez punkt B_3 , a wartość, kierunek i lot wyznacza odcinek ae .

Przy powyższem postępowaniu mogą zajść trzy przypadki, mianowicie:

a/ Dany układ sił sprowadza się do wypadkowej R , ostatecznie określonej i skończonej. Ten przypadek mamy na rys. 19.

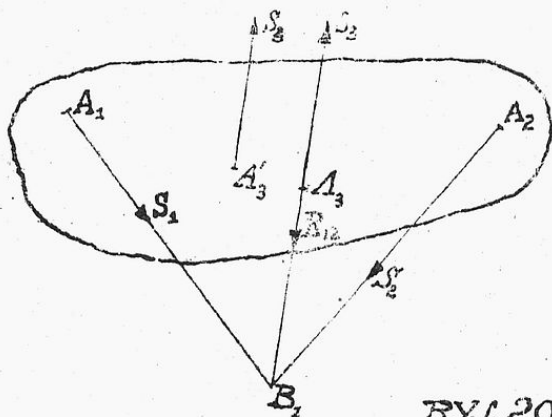
b/ Przedostatnia wypadkowa i ostatnia z sił składowych są równe, mają WSPÓLNĄ linię działania, lecz loty ich są różne. W tym razie wypadkowa danego układu sił jest równa zero i, oczywiście, taki układ będzie w RÓWNOWAŻE.

c/ Przedostatnia wypadkowa i ostatnia z sił składowych są równe, linie działania ich są RÓWNOLEGŁE i loty różne. Mówimy, że w tym razie dany układ sił sprowadza się do PARY SIŁ.

21. Na zasadzie powyższego możemy odpowiedzieć na takie pytanie: o czym świadczy zamknięcie się wieloboku sił, działających na różne punkty ciała sztywnego?

Przedewszystkiem wnosimy stąd, że wypadkowa danego układu sił jest równa zeru, a więc układ ten albo sprowadza się do pary sił albo jest w równowadze. O tem, który z tych dwóch przypadków zachodzi, wielobok sił nie nam więcej nie powie. Możemy sprawę rozstrzygnąć jedynie na podstawie tego, czy linie działania przedostatniej wypadkowej i ostatniej siły składowej są równoległe, czy też pokrywają się. W pierwszym razie mamy parę sił, w drugim - równowagę układu sił.

22. NA CIAŁO DZIAŁAJĄ TRZY SIŁY. Przypuśćmy, że na dane ciało działają trzy siły S_1, S_2, S_3 , przyłożone w punktach A_1, A_2, A_3 . Jakim warunkom muszą podlegać te siły, aby była możliwa ich równowaga?



RYJ. 20.



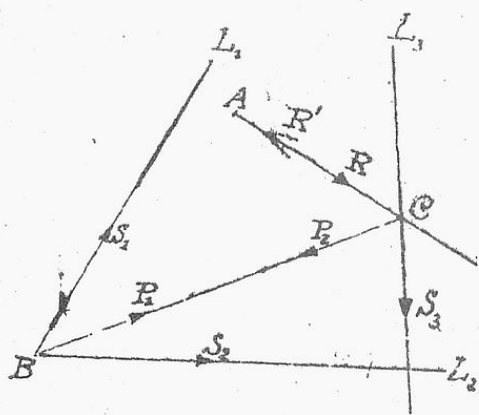
Postępując zgodnie z Par.20 znajdziemy naprzód wypadkową sił S_1 i S_2 , czyli R_{12} . Otrzymamy ją na rysunku pomocniczym, jako bok zamykający trójkąta abc , w którym $\overline{ab} = S_1$ i $\overline{bc} = S_2$. Aby równowaga sił S_1 , S_2 i S_3 mogła zachodzić, to wypadkowa sił R_{12} i S_3 /p.Par.21/ powinna być równa zeru i siły te winny mieć wspólną linię działania.

Pierwszy z tych warunków wymaga, aby WIELOBOK SIŁ S_1, S_2, S_3 BYŁ ZAMKNIĘTY, t.j. aby siła S_3 była równa co do wartości, a przeciwna co do lotu wypadkowej R_{12} , drugi - żąda, aby WSZYSTKIE TRZY SIŁY PRZECHODZIŁY PRZEZ JEDEN PUNKT, bo linja działania wypadkowej przechodzi przez punkt przecięcia się sił S_1 i S_2 , zaś ta sama prosta ma być linją działania siły S_3 .

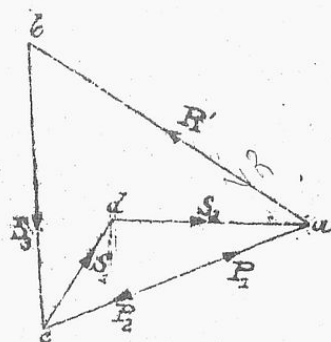
O ileby siła S_3 była równa i RÓWNOLEGŁA do R_{12} i posiadała lot, przeciwny do tej ostatniej, to dany układ sprowadzałby się do pary. Miałoby to np. miejsce wtedy, gdyby siła S_3 była przyłożona do punktu A_3 /rys.20/.

23. ROZKŁAD SIŁY NA TRZY SKŁADOWE, O DANYCH LINJACH DZIAŁANIA. Dana jest siła R ; rozłożyć ją na trzy składowe S_1, S_2, S_3 , których linjami działania są proste L_1, L_2, L_3 .

Aby to uczynić, zmienimy naprzód lot siły R i tę siłę odwróconą oznaczmy przez R' . Oczywiście, siły



rys. 21



R' i R albo R' i owe trzy szukane składowe S_1, S_2, S_3 powinny być w równowadze. Przypuśćmy teraz, że siły S_1 i S_2 zastąpiliśmy przez ich wypadkową P_1 , zaś siły R' i S_3 - przez wypadkową P_2 ; ponieważ ma być równowaga wszystkich sił, więc siły P_1 i P_2 powinny być równe, mieć loty przeciwne i posiadać muszą wspólną linię działania. Jest rzeczą oczywistą, że tą linią może być tylko prosta BC /rys. 21/. W celu znalezienia samych sił rozpatrzmy siły R' i S_3 , działające na punkt C . P_2 jest ich wypadkową, zatem z wieloboku abc /p.rys. pomocniczy/, możemy otrzymać wartości nieznanych S_3 i P_2 . Będzie, mianowicie, $\overline{bc} = S_3$, $\overline{ac} = P_2$

Na punkt B działają siły S_1 i S_2 . Wypadkową ich $P_1 = -P_2$ już wyznaczyliśmy, a więc wypada tylko postąpić odwrotnie, rozłożyć tę wypadkową na składowe w kierunkach L_1 i L_2 . Rozkład ten mamy w trójkącie acd , na rys.

pomocniczym; znajdujemy, że $S_1 = \overline{cd}$, $S = \overline{da}$ i z poprzedniego $S_3 = \overline{dc}$

Widzimy, że zadanie daje się rozwiązać jednoznacznie. Sposobów rozwiązania może być kilka, np. można składać siłę R' z S_1 i S_2 z S_3 lub jeszcze inaczej. Wynik zawsze będzie ten sam.

24. SKŁADANIE SIŁ ZAPOMOCA WIELOBOKU SZNUROWEGO.

Sposób składania sił, podany w Par. 20, jest nieprzydatny w tym razie, gdy siły nie przecinają się w granicach rysunku. Ten wypadek jest szczególnie ważny, bo siły ciężkości, z którymi wciąż mieć będziemy do czynienia, do takich właśnie sił należą.

Niedogodność powyższa nie zachodzi przy innej metodzie składania sił, którą poznamy obecnie.

Przypuśćmy, że w punktach A_1, A_2, A_3, \dots są przyłożone odpowiednie siły S_1, S_2, S_3, \dots ; trzeba wyznaczyć ich wypadkową R . Ograniczmy zagadnienie np. do trzech sił, nie zmniejszając przez to ogólnego charakteru tej metody.

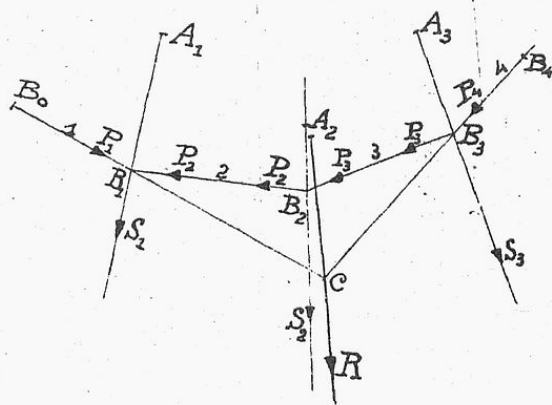
Obierzmy na linii działania siły S_1 dowolny punkt B_1 /rys. 22/ i poprowadźmy przezń dwie dowolne proste, 1 i 2. Rozkładamy następnie siłę S_1 na te dwa kierunki. Rozkład ten wykonamy na rys. pomocniczym zapomocą trójkąta abc , w którym $ab = S_1$, zaś boki ac i bc są odpowiednio równoległe do prostych 1 i 2. Gdy ozna-

czyśmy szukane składowe przez P_1 i P_2 , to oczywiście będzie $a\bar{\Omega} = P_1$ i $\bar{\Omega}b = P_2$.

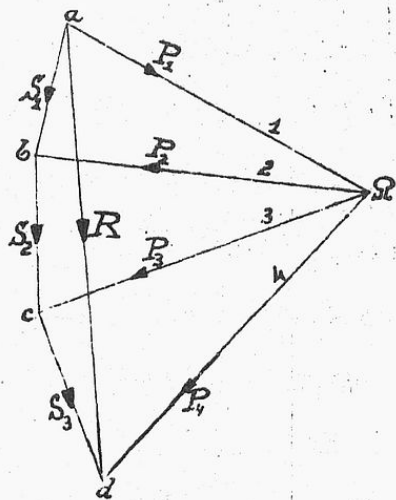
Możemy teraz zapomnieć o działaniu siły S_1 i postępować tak, jak gdybyśmy zamiast niej mieli owe dwie składowe.

Znajdźmy teraz wypadkową sił P_2 i S_2 przenosząc punkt przyłożenia siły P_2 do punktu B_2 , gdzie przecinają się prosta 2 z linią działania siły S_2 . Uczyńmy to również na fig. pomocniczej, budując trójkąt $bc\Omega$, przyczem $\bar{bc} = S_2$. Szukana wypadkowa P_3 ma wartość, kierunek i lot odcinka $\bar{\Omega}c$, a jej linia działania 3 przechodzi przez punkt B_2 .

Możemy teraz nasz układ sił uważać jakby złożony z sił P_1 , P_3 i S_3 .



RX. 22.



Dodajmy wreszcie, w zupełnie taki sam sposób, siły P_3 i S_3 ; wypadkową ich oznaczmy przez P_4 , a linię jej działania przez 4.

W ten sposób zastąpiliśmy dany układ sił S_1, S_2, S_3 przez dwie siły P_1 i P_2 i zadanie nasze sprowadza się do wyznaczenia ich wypadkowej. Wypadkowa ta przejdzie przez punkt przecięcia C prostych 1, 4, zaś co do kierunku, wartości i lotu wyznacza ją odcinek ad na rys. pomocniczym, jako bok zamykający trójkąt aRd . Z rysunku pomocniczego widać, że taką samą wypadkową dają siły S_1, S_2, S_3 , bo odcinek ad może być uważany albo za bok zamykający trójkąta aRd , albo też za takiż bok wieloboku $abcd$.

W celu uproszczenia dalszego postępowania wprowadzimy następującą nomenklaturę: rysunek pomocniczy nazwiemy WIELOBOKIEM SIŁ, punkt R - biegunem, proste aR, bR, cR, dR - PROMIENIAMI; wielobok, utworzony z prostych 1, 2, 3, 4 /na rys. głównym/ nazwiemy WIELOBOKIEM VARRIGNONA lub WIELOBOKIEM SZNUROWYM, same proste: 1, 2, 3, 4 zwać będziemy BOKAMI tego wieloboku.

25. Postaramy się teraz zmechanizować podany tu sposób składania sił. Przypomnijmy sobie naprzód, że boki 1 i 2 wieloboku sznurowego poprowadziliśmy dowolnie, a kierunki tych boków wyznaczyły biegun R .

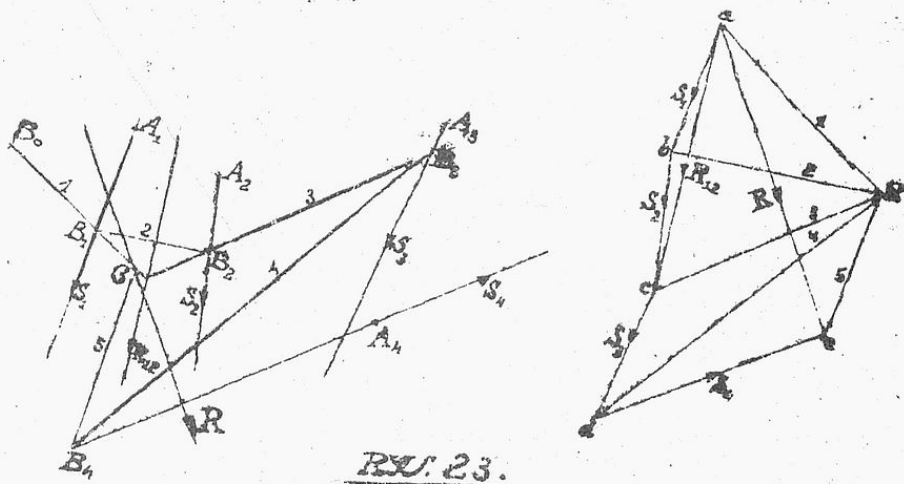
Z tego wynika, że i położenie bieguna jest dowolne. Wobec tego przy wyznaczaniu wypadkowej możemy postępować tak:

Wykreślamy wielobok sił $abcd$; bok jego ad

przedstawi nam co do kierunku, wartości i lotu szukaną wypadkową, następnie obieramy dowolny biegun - punkt S i łączymy go z wierzchołkami wieloboku sił a, b, c, d ; przez dowolny punkt B , obrany na siłę pierwszej, kreślimy równoległe do promienia aS prostą 1, z punktu przecięcia prostej 1 i siły S_2 prowadzimy prostą 2, równoległą do bS i t.d.; w ten sposób otrzymamy wielobok Varignona; wypadkowa przechodzić powinna przez punkt przecięcia się jego boków: pierwszego i ostatniego; przez ten punkt prowadzimy prostą równoległą do aS ; będzie to linja działania wypadkowej.

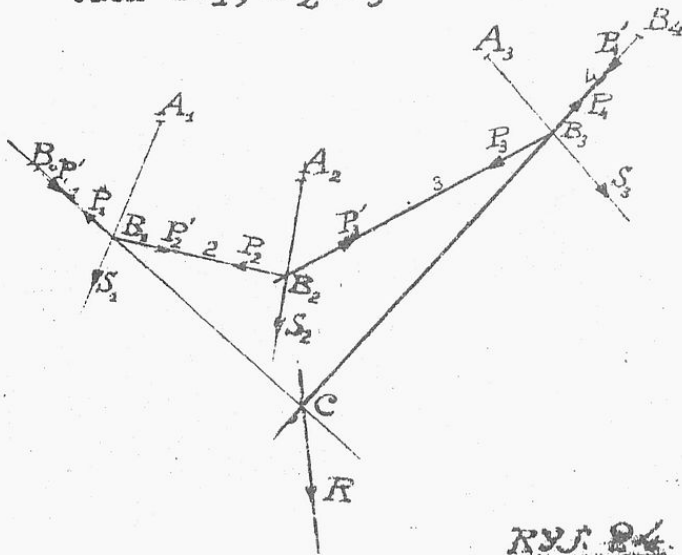
Tę samą wypadkową otrzymamy i wtedy, gdy za biegun obierzemy jakiś inny punkt.

Podczas całej tej budowy wykresu możemy nie pamiętać o promieniach wieloboku sił, albo bokach wieloboku Varignona, jako o linjach działania pewnych sił; możemy je traktować wyłącznie z punktu widzenia geometrycznego.

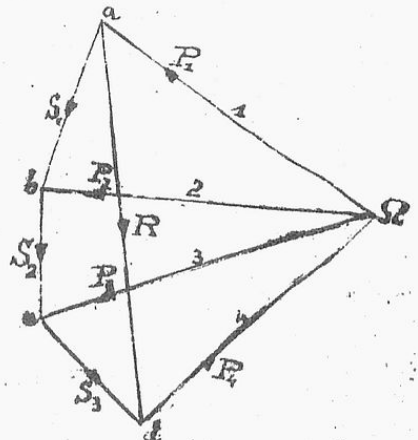


Na rys.23 wyznaczona jest wypadkowa czterech sił takim, właśnie, mechanicznym sposobem.

26. Objaśnimy pochodzenie nazwy wieloboku sznurowego. Wyobraźmy sobie na pierwszym i ostatnim boku tego rysunku dwa punkty B_0 i B_4 i przypuśćmy, że w punktach tych jest zaczepiony giętki sznur, a w jego punktach B_1, B_2, B_3 działają siły S_1, S_2, S_3 /rys.24/.



RYC. 24.



Pod działaniem tych sił sznur będzie w równowadze. przybierając kształt według wieloboku Varignona. Z wieloboku sił obliczymy te siły, z którymi sznur będzie rozciągany: węzeł B_1 jest w równowadze pod działaniem sił P_1, P_2' i S_1 . Loty i wartości sił P_1 i P_2' znajdziemy z trójkąta sił $abRa$. Toż samo z węzłem B_2 : zachodzi równowaga sił P_2, P_3' i S_2 ; loty i wartości sił P_2 i P_3' znajdziemy z trójkąta sił $bcRc$. Część sznura B_1B_2 działa na węzeł B_1 z siłą P_2' /rys. 25/.

na prawo/, zaś na węzeł B_2 z siłą P_2 /lot na lewo/; siły te są sobie równe, loty mają przeciwne, stąd wniosek, że część sznura na odciepie B_1B_2 , będąc w równowadze jest rozciągana siłą P_2 , względnie P_2' . To samo możemy powiedzieć o którymkolwiek kawałku sznura B_0B_1, B_2B_3, B_3B_4 . Z powyższego wynika ścisły związek między nazwą "WIELOBOK VARIGNONA" i nazwą "WIELOBOK SZNUROWY".

Gdyby siły S_1, S_2, S_3 działały, dajmy na to, w górę, sznur nie mógłby być tu użyty. W tym razie należałoby uważać, że boki wieloboku sznurowego wykonane są ze sztywnych prętów, połączonych ze sobą przegubami; dwa skrajne boki powinny być zamocowane w takiż sam sposób w punktach B_0 i B_4 . Wtedy siły S_1, S_2, S_3 , skierowane ku górze i przyłożone w przegubach, nadadzą układowi owych prętów kształt, o który chodzi.

W tym przypadku możnaby nazwać wielobok Varignona "WIELOBOKIEM PRZEGUBOWYM".

27. Wykreślone wieloboki sznurowe pozwalają także wyznaczać wypadkowe niektórych sił z pośród danego układu. Tak więc np. wypadkowa sił S_1 i S_2 czyli R_{12} /rys.23/ ma kierunek, wartość i lot, jak odcinek ac , a linia jej działania przechodzi przez punkt przecięcia się boków 1 i 3 w wieloboku sznurowym. Tak samo, wypadkowa sił S_2 i S_3 jest równa $\bar{bd} = R_{23}$; punkt prze-

ciągła się boku PRZED siłą S_2 /t.j. 2/ z bokiem ZA S_3 /t.j. 4/, leży na linii działania tej wypadkowej. Należy zwrócić uwagę, że z wykreślonego wieloboku można korzystać przy składaniu częściowym sił układu tylko wtedy, gdy składowe następują bezpośrednio po sobie. Zapomocą wieloboku $B_0 B_1 \dots B_5$ nie można np. znaleźć wypadkowej sił S_1 i S_3 albo S_2, S_4 .

28. NIEKTÓRE WŁASNOŚCI WIELOBOKU SIŁ I WIELOBOKU SZNUROWEGO. Z konstrukcji, którą stosujemy przy wyznaczaniu wypadkowej układu sił zapomocą wieloboku sznurowego, wynikają wprost następujące wnioski:

1. LICZBA PROSTYCH WIELOBOKU SIŁ JEST TAKA SAMA, JAK LICZBA PROSTYCH WIELOBOKU SZNUROWEGO.

2. KAŻDEJ PROSTEJ W WIELOBOKU SIŁ ODPOWIADA RÓWNOLEGŁA DO NIEJ PROSTA W WIELOBOKU SZNUROWYM; tak więc np. promieniowi aB odpowiada bok 1, promieniowi Bc - bok 3 i t.d.

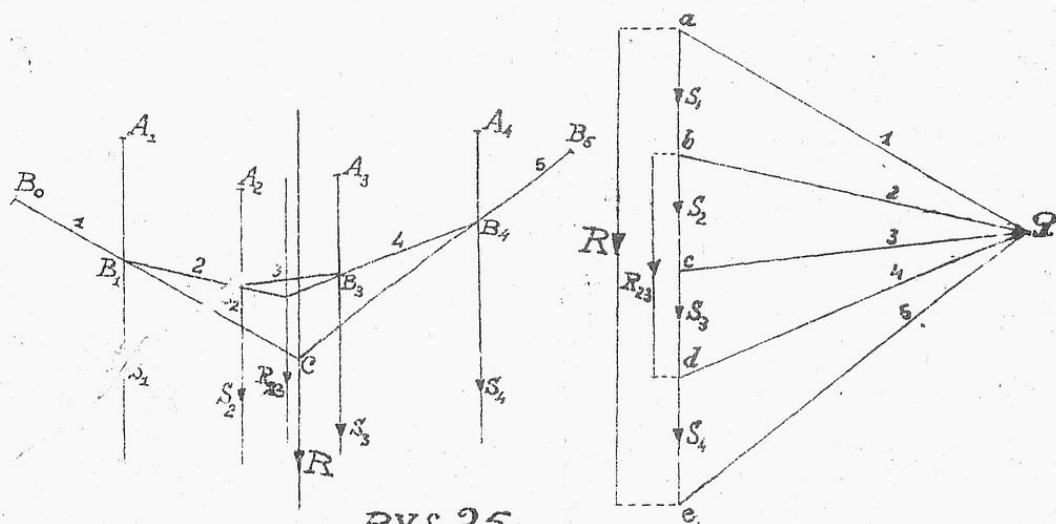
3. KAŻDEMU PUNKTOWI PRZECIĘCIA SIŁ TRZECH LUB WIĘKSZEJ LICZBY PROSTYCH WIELOBOKU SIŁ ODPOWIADA TRÓJKĄT LUB WIELOBOK, UTWORZONY Z PROSTYCH, ODPOWIADAJĄCYCH TAMTYM W WIELOBOKU SZNUROWYM I ODWROTNIE.

A więc np. punktowi B_1 , w którym spotykają się siły 1, 2 i S_1 odpowiada trójkąt aBb , złożony z boków, równoległych do 1, 2 i S_1 , tak samo np. w wieloboku sił punktowi c przecięcia się prostych S_2, S_3 odpowiada trójkąt bCc .
STATYKA WYKREŚLONA. - ARKUSZ III.

prom. 3 odpowiada w wieloboku sznurowym trójkąt, którego bokami są linje działania sił S_2 , S_3 oraz bok 3; punktowi R wieloboku sił odpowiada wielobok sznurowy.

Z powodu tych zależności wielobok sił i wielobok sznurowy noszą nazwę FIGUR WZAJEMNYCH.

29. SKŁADANIE SIŁ RÓWNOLEGŁYCH. Składanie sił równoległych zapomocą wieloboku sznurowego można uważać za przypadek szczególny poprzednich rozważań w Par.24 i następnych. W tym razie wielobok sił staje się odcinkiem prostej, równoległej do sił danego układu, a wypadkowa, mając linję działania równoległą do sił zadanych, jest równa sumie algebraicznej tych sił składowych.



RYC. 25.

Na rys.25 mamy wyznaczoną wypadkową R czterech sił równoległych, mianowicie S_1, S_2, S_3, S_4 ; prócz tego jest tam znaleziona wypadkowa R_{23} sił S_2 i S_3 .

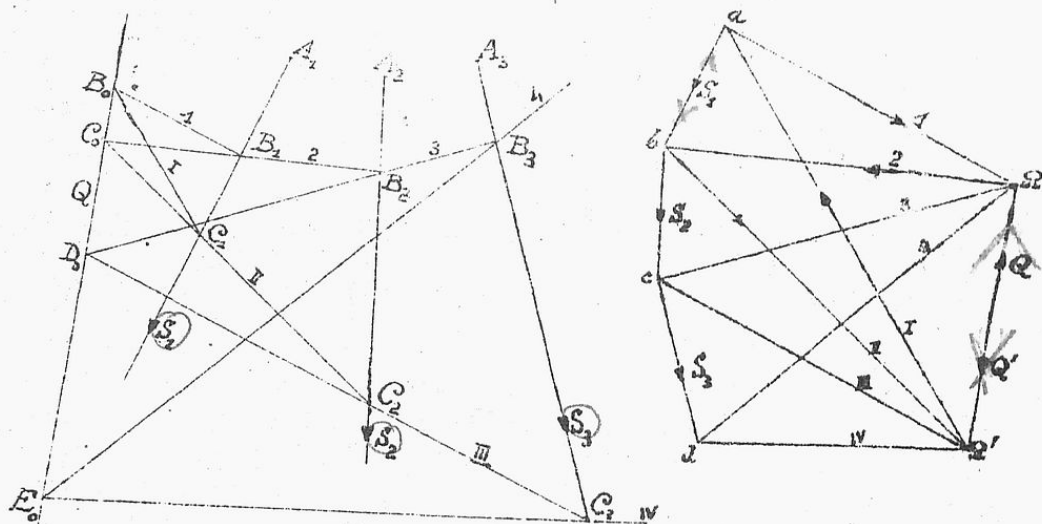
30. INNE WŁASNOŚCI WIELOBOKU SZNUROWEGO I WIELOBOKU

SIŁ. ZMIANA BIEGUNA. Wycobraźmy sobie w jednej płaszczyźnie trzy siły S_1, S_2, S_3 , przyłożone do punktów A_1, A_2, A_3 dowolnego ciała sztywnego /rys.26/.

Wykreślmy wieloboki:sił i sznurowy przy dowolnym biegunie Ω . Promienie pierwszej z tych figur i odpowiednie boki drugiej oznaczmy kolejno przez 1, 2, 3, 4.

Obierzmy następnie za biegun jakiś inny punkt, dajmy na to, Ω' ; wykreślmy teraz nowy wielobok sznurowy. Nowe promienie i boki oznaczmy w tym samym porządku, co poprzednie, liczbami rzymskimi I, II, III, IV.

Rozkłómy siłę S_1 na składowe w kierunkach boków I i 2. Rozkład ten mamy w trójkącie $a b \Omega$, gdzie są również wskazane loty szukanych składowych.



RY5 26.

Przypuśćmy następnie, że w punkcie przecięcia się boków I i II działa siła S'_1 , równa i odwrotna do S_1 . Rozkładowy ją za pomocą trójkąta $a b \Omega'$ na składowe w kierunkach prostych I i II.

Ponieważ siły S_2 i S'_2 są w równowadze, zatem równoważą się też układy sił 1,2 wraz z 1, II, albo 1, I z 2, II. Wypadkowa sił 1, I jest równa pod względem wartości, kierunku i lotu odcinkowi BB' , a linja jej działania przechodzi przez punkt B_0 , w którym przecinają się boki 1, I wieloboków sznurowych. Oznaczmy tę wypadkową przez Q /lot do góry/.

Podobnie znajdziemy wypadkową sił 2, II; będzie ona równa i odwrotna do siły Q , przechodzić będzie przez punkt przecięcia się boków 2, II, czyli przez C_0 . Oznaczmy tę wypadkową przez Q' . Ponieważ pomiędzy układami sił 1, I i 2, II zachodzi równowaga, zatem obie wypadkowe posiadać powinny wspólną linję działania, która przejść musi, oczywiście, przez punkty B_0 i C_0 .

Z drugiej strony kierunek tych wypadkowych wyznacza prosta BB' ; a więc prosta B_0C_0 powinna być równoległą do prostej, łączącej bieguny B i B' czyli do t.zw. OSI BIEGUNÓW.

Rozumowania zupełnie podobne do poprzednich powtarzamy co do siły S_2 i S'_2 ; S_3 i S'_3 .

Znajdziemy znowu, że wypadkowe grup sił 2, II i 3, III powinny być równe, odwrotne i równoległe do osi biegunów. Oczywiście, ich wspólną linję działania jest ta sama prosta CD , co i poprzednio i t.d.

Naturalnie, że dowodzenie powyższe, przeprowadzone

dla trzech sił. jest ważne również dla jakiejkolwiek ich liczby /byleby siły leżały w jednej płaszczyźnie/.

Wynika stąd następujące twierdzenie: WIELOBOKI SZNUROWE, WYKREŚLONE DLA TEGO SAMEGO UKŁADU SIŁ PRZY DWÓCH RÓŻNYCH BIEGUNACH POSIADAJĄ TĘ WŁAŚNOŚĆ, ŻE ODPOWIEDNIE ICH BOKI PRZECINAJĄ SIĘ NA JEDNEJ PROSTEJ, RÓWNOLEGŁEJ DO OSI BIEGUNÓW.

31. ZASTOSOWANIE I. Dla danego układu sił WYKREŚLIĆ TAKI WIELOBOK SZNUROWY, KTÓREGO JEDEN Z BOKÓW MIAŁBY POŁOŻENIE Z GÓRY ZADANE.

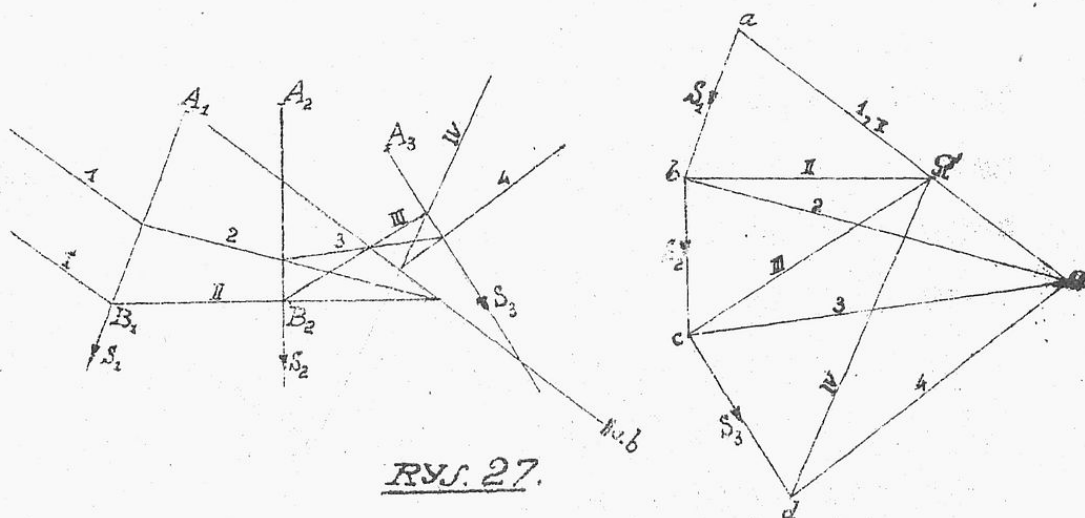
Niech będą dane 3 siły S_1, S_2, S_3 , przyłożone do punktów A_1, A_2, A_3 /rys. 27/; żądamy, aby bok drugi był na prostej $B_1 B_2$.

Wykreślamy naprzód dowolny wielobok sznurowy 1, 2, 3, 4 przy biegunie Ω . Następnie tak obieramy nowy biegun Ω' , aby dany bok II mógł być jednym z boków nowego wieloboku sznurowego. Oczywiście biegun ten musi leżeć na promieniu równoległym do zadanego boku II i przechodzącym przez koniec B siły S_2 . Innego ograniczenia dla bieguna Ω' nie mamy; przypuścmy, że leży on na promieniu I, a więc znajduje się w przecięciu się tego promienia z nowym promieniem II.

Wielobok sznurowy, zbudowany dla tego nowego bieguna Ω' , odpowiada postawionemu warunkowi.

Możnaby zadanie nasze rozwiązać w inny sposób: wiemy, że boki szukanego wieloboku sznurowego muszą być takie,

że z odpowiednimi bokami poprzednio wykreślonego wieloboku przecinają się na prostej, równoległej do osi



biegunów $\parallel ab$. Jeden punkt tej prostej znamy, jest nim bowiem przecięcie się boków 2 z II, kierunek jej znamy również /jest równoległy do SS' /, a zatem prosta ta jest całkowicie określona.

Wykreśliwszy ją, dopełniamy następnie szukany wielobok sznurowy, nie zwracając już zupełnie uwagi na wielobok sił. Tak więc np. bok I spotyka się z bokiem II na siłce S_1 , poźatem przechodzi on przez punkt przecięcia się boku 1 z prostą $\parallel ab$, czyli przez punkt nieskończenie odległy na tej prostej. Inaczej mówiąc, bok I jest równoległy do boku 1. Następnie wyznaczymy boki pozostałe.

32. ZASTOSOWANIE II.

POPROWADZIĆ WIELOBOK SZNUROWY PRZESZ DWA Z GÓRY ZADANE PUNKTY u i v .