

ograniczających badaną część belki i krzywą obciążeń.

W podobny sposób znaleźlibyśmy siłę, działającą na część belki AB , obliczywszy pole $AA'B'B'$; toż samo dla całej belki AK należałoby obliczyć pole - $AA'B'C'D'E'F'G'H'$.

Dla tego też pole, zawarte pomiędzy osią belki, krzywą obciążeń jednostkowych i dwiema rzędnymi, ograniczającymi rozpatrywaną część belki, nazywamy **POLEM OBCIĄŻEŃ**.

Wartość pola obciążeń, w zastosowaniach praktycznych, znajdziemy z dostatecznym przybliżeniem, dzieląc pole to na takie figury, aby pole każdej z nich można było łatwo obliczyć; wówczas pole obciążeń rozbite będzie na pola trójkątów, prostokątów, odcinków koła i t.p.

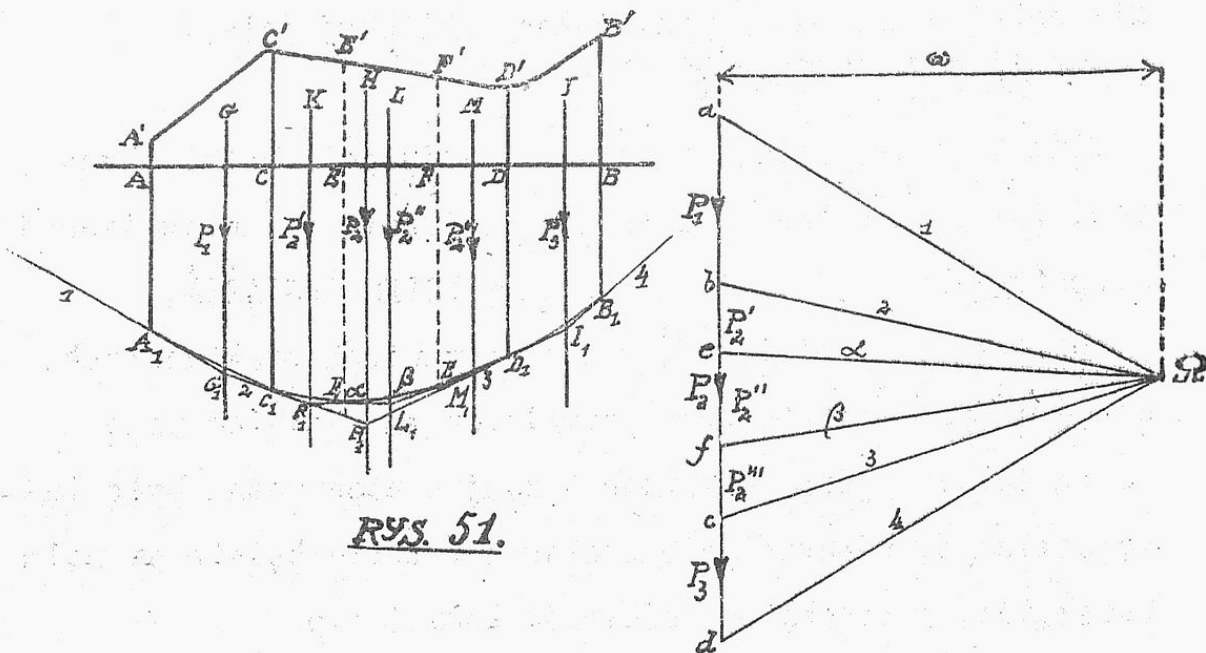
Wymiary tych figur otrzymywać należy, mierząc je - w kierunku równoległym do osi belki - w skali długości, w kierunku prostopadłym do osi - w skali obciążeń jednostkowych. Wówczas pole da nam wielkość o wymiarze:

$$m \times \frac{kg}{m} = kg.$$

51. WIELOBOK SZNUROWY DLA PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.

Przypuśćmy, że mamy belkę, obciążoną w sposób ciągły; pole obciążeń niech będzie $AA'C'E'F'D'B'B'$ /rys. 51/. Należy wykreślić wielobok sznurowy dla tego obciążenia.

Podzielmy pole obciążeń na kilka - w naszym przykła-



RYS. 51.

dzie na trzy części - $AA'C'C$, $CC'D'D$ i $DD'B'B$ z których każda łatwo da się obliczyć. Wartości tych pól niech będą P_1, P_2, P_3 . Wielkości wyznaczają nam siły, z którymi obciążenie ciągłe działa na poszczególne części belki AC , CD i DB . Uważamy siły P_1, P_2, P_3 jako siły skupione, które działają na poszczególne części belki i są przyłożone do środków ciężkości G, H, I poszczególnych pól wspomnianych. Dalej postępujemy jak z siłami skupionymi: kreślimy wielobok sił; obrawszy dowolny biegun Ω prowadzimy promienie 1, 2, 3, 4; następnie wykreślamy wielobok sznurowy 1, 2, 3, 4 - $A_1G_1H_1I_1B_1$. W danym przypadku

wielobok sznurowy posiada tylko 4 boki, gdyż obciążenie ciągłe zastąpiliśmy trzema siłami skupionymi. Gdybyśmy chcieli otrzymać rozwiązanie /wielobok sznurowy/ bardziej dokładnie, należałoby pole obciążeń podzielić na większą liczbę części. Dajmy na to, że, dążąc w tym kierunku, jedno z pól, naprz. $CC'DD'$ podzielimy jeszcze na kilka /trzy/ dowolnych części. W ten sposób zamiast jednej siły skupionej P_2 mieć ich będziemy trzy: P_2', P_2'', P_2''' , przyłożonych w środkach ciężkości K, L, M tych mniejszych pól.

Wykreślmy teraz dla układu sił skupionych

$$P_1, \underbrace{P_2', P_2'', P_2'''}_{P_2}, P_3$$

wielobok sił i wielobok sznurowy; zauważymy wtedy, że siły P_2', P_2'', P_2''' w wieloboku sił zajmą dokładnie miejsce między b i c , ponieważ $P_2' + P_2'' + P_2''' = P_2 = bc$, oraz że nowe promienie α i β , poprowadzone do końców $P_2' P_2''$ znajdą się między promieniami 2 i 3; promień za siłą P_2''' pokrywa promień 3; wielobok sznurowy wykreślimy, pozostawiając bok 1 pierwotny; bok 2 - za siłą P_1 i przed siłą P_2' - zostanie ten sam, co i pierwszej; lecz tylko dojdzie do siły P_2' , t.j. do punktu K_1 , stąd pójdzie bok α do siły P_2'' - do punktu L_1 , dalej poprowadzimy bok β do siły P_2''' - do punktu M_1 , zaś poza siłą P_2''' i przed siłą P_3 otrzymamy bok 3 - poprzedni - i dalej za P_3 - bok 4 - poprzedni.

Stąd widzimy, że po zastąpieniu obciążenia ciągłego trzema siłami - wielobok sznurowy otrzymuje 4 boki;

jeśli którąkolwiek część obciążenia, zastąpioną poprzednio przez jedną siłę, podzielimy na kilka sił, otrzymany wielobok sznurowy o zwiększonej liczbie boków; NOWO PRZYBYŁE BOKI ZOSTANĄ WPISANE W PIERWOTNY WIELOBOK sznurowy. Niech podział wspomnianego pola $CC'DD'$ będzie dokonany na znaczną liczbę części, co oznaczać będzie, że obciążenie tej części belki CD , zastąpione zostanie przez znaczną liczbę mniejszych sił.

Wszystkie te siły w wieloboku sił ułożą się między punktami b i c ; promienie $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ znajdą się między promieniami 2 i 3; w wieloboku sznurowym bok 1 pozostanie bez zmiany, bok 2 pozostanie ten sam, lecz pójdzie do pierwszej siły z grupy sił, zastępujących P_2 - a to będzie zaraz przy punkcie c_1 , odpowiadającym punktowi c ; od tego miejsca pójdzie szereg boków $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ wpisanych w wielobok pierwotny - aż dopiero ostatni bok poza siłą ostatnią z grupy sił, zastępujących P_2 - przy punkcie D , - przejdzie w bok 3 i wreszcie otrzymamy bok 4 na poprzednim miejscu.

Jeśli sił, zastępujących P_2 wyobrazimy sobie nieskończenie wiele, wielobok sznurowy na części między c_1 i

D , zamieni się w KRZYWĄ SZNUROWĄ. Krzywa ta, jak wynika to z poprzedniego rozumowania, posiada pierwszy element w punkcie c_1 /jako bok przed siłami grupy P_2 / wspólny z bokiem 2, zaś ostatni element - jako bok poza siłami grupy P_2 - wspólny z bokiem 3. Innymi słowy, krzywa



snurowa jest wpisana w pierwotny wielobok sznurowy, przytem w punktach C i D , - w punktach odpowiadających początkowi i końcowi badanego obciążenia ciągłego - krzywa ta jest styczną do odpowiednich boków pierwotnego wieloboku sznurowego. Krzywa sznurowa dla części belki CD będzie styczną do boków α i β w punktach E i F , odpowiadających podziałowi obciążenia.

Jeżeli poprzednie rozumowanie zastosujemy do pierwszego pola $AA'CC'$, to dla obciążenia ciągłego części belki AC wielobok sznurowy otrzyma się jako krzywa wpisana w wielobok 1,2, krzywa ta będzie styczną do boków 1 i 2 w punktach A i C .

Tak samo dla trzeciej części belki DB , obciążonej w sposób ciągły, otrzymamy krzywą sznurową wpisana w wielobok 3,4, przyczem krzywa ta w punktach D i B , będzie styczną do boków 3 i 4.

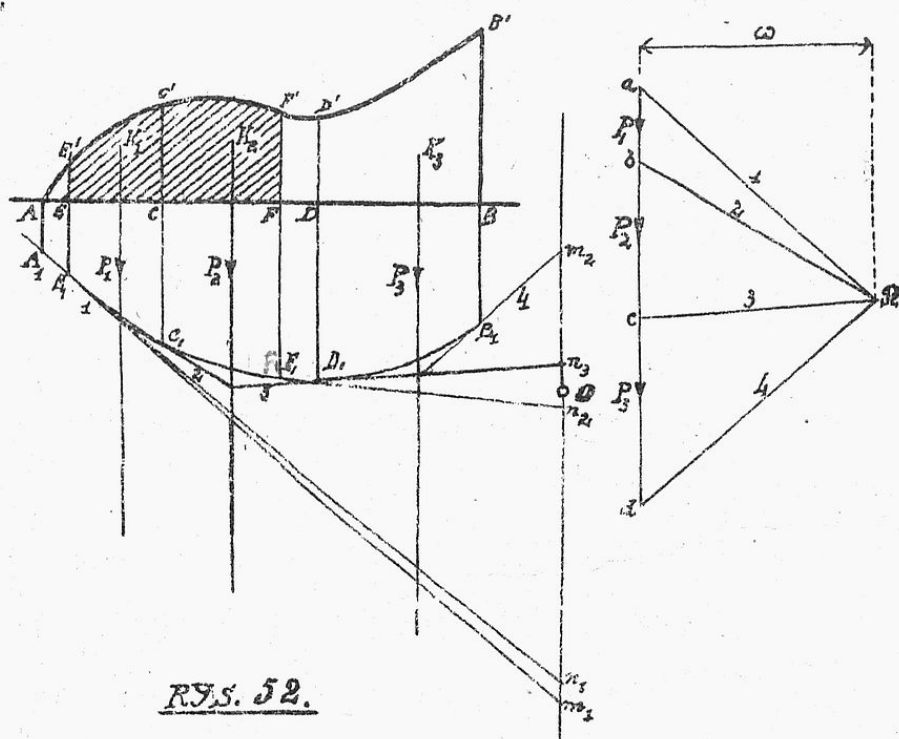
Stąd otrzymujemy następujące prawidło do wykreślenia krzywej sznurowej dla dowolnego obciążenia ciągłego:

- a/ pole obciążenia dzielimy na kilka części dogodnych do obliczenia; w środku ciężkości każdej części przykładamy skupione siły zastępcze, równe odpowiednim ciężarom;
- b/ wykreślamy wielobok sił dla zastępczych sił skupionych;
- c/ wykreślamy dla tych sił wielobok sznurowy;
- d/ wykreślamy krzywą sznurową, wpisując ją w otrzy-

ny wielobok sznurowy, przyczem korzystamy z tego, że krzywa szukana powinna być styczną do boków wieloboku sznurowego w tych punktach, które odpowiadają linjom podziału pola obciążeń.

Jeśli zachodzi obawa, że przy zadaniem dowolnem pola obciążeń niektóre części krzywej sznurowej mogą nie dać się dostatecznie dokładnie wykreślić, należy odpowiednio części pola obciążeń podzielić na większą liczbę drobniejszych pól.

52. MOMENT STATYCZNY W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.



Niech bel-
ka AB bę-
dzie oboią-
żona w spo-
sób ciągły.
Pole oboią-
żeń niech
będzie dane
 $AC'D'B'B$
/rys. 52/.
Mamy zna-
leźć mo-

ment statyczny dowolnej części obciążenia belki względem jakiegokolwiek punktu O .

Przypuśćmy, że sposobem wskazanym w poprzednim /51/ paragrafie, po podzieleniu obciążenia na 3 części / $AC'C, CC'DD', DD'B'B'$ / znaleźliśmy wielobok sznurowy 1,2,3,4, poczem w ten wielobok wpisaliśmy krzywą, która, zgodnie z poprzednim, jest styczną w punktach A, C, D, B , do boków 1,2,3,4 wieloboku sznurowego.

Zauważmy, że wykreślona krzywa sznurowa powinna być uważana, co wynika z poprzedniego, jako wielobok sznurowy o nieskończenie wielkiej liczbie boków.

Niech będzie żądane znaleźć moment statyczny względem punktu O sił, działających na belkę na długości od E do F . Postępujemy w tym celu zgodnie z prawidłem, wyjaśnionym w paragrafie 49. Przez punkt O prowadzimy PROSTĄ ODCINKÓW; następnie odnajdujemy boki "przed" i "za" siłami, działającymi na belkę EF . W punkcie E - spotykamy na krzywej sznurowej element jej, który jest właściwym boki "przed" i w punkcie F - element, który jest boki "za" siłami. Przedłużamy boki "przed" i "za" siłami do spotkania się z prostą odcinków. Przedłużenia tych elementów - boków - będą to styczne do krzywej sznurowej w punktach E , i F .

Styczna w E , spotyka prostą odcinków w punkcie n_1 , zaś styczna w F , przecina prostą odcinków w p. n_2 . Stąd: mom. stat. sił na dł. EF względem O = - $n_1 n_2 \cdot \omega$ gdzie ω = odległości biegunowej, a znak /-/ wskazuje, że moment będzie ujemnym, gdyż odcinek $n_1 n_2$ idzie z

dołu do góry. Jeśli mamy wykreśloną skalę momentów, to, mierząc w tej skali odcinek n, n_2 , znajdziemy odrazu wartości momentu.

W podobny sposób należy postępować przy szukaniu momentu statycznego względem zadanego punktu dla tej czy innej części obciążonej belki.

Gdyby, wypadkowo, chodziło o znalezienie momentu statycznego dla tej części obciążenia, która przy pierwotnym podziale, przyjęta była za odrębną część, wówczas nie ma potrzeby nawet wykreślania krzywej sznurowej: wystarczy zadowolnić się pierwotnym wielobokiem sznurowym.

Naprz. niech będzie potrzeba znalezienia momentu statycznego względem p. O dla części obciążenia belki od A do D . Wówczas "przed" siłami okaże się bok 1, zaś "za" siłami bok 3 i szukany moment statyczny =

$$= - \overline{m_1 n_3} \cdot \omega$$

Tak samo postępowalibyśmy, gdyby była potrzeba znalezienia momentu statycznego względem poprzedniego punktu dla całego obciążenia belki od A do B . Moment wtedy będzie =

$$= - \overline{m_1 m_2} \cdot \omega$$

53. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE JEDNOSTAJNE. Zbadamy teraz szczególny przypadek obciążenia ciągłego, gdy obciążenie to jest jednostajne. Krzywa obciążeń $A'B'$ staje się prostą równoległą do osi belki /rys.53/.

Aby wyznaczyć kształt linii sznurowej, odpowiadają-

Wielobok utworzony będzie z trzech boków, z których dwa skrajne /przed siłą P_1 i za siłą P_2 / będą temi samymi bokami 1 i 2, co poprzednio, zaś bok środkowy α połączy punkty przecięcia linii działania sił P_1 i P_2 z owymi bokami skrajnymi.

Z rozważań paragr. 51 wiemy, że krzywa sznurowa, której szukamy, posiada tę własność, że jest styczna do nowego wieloboku sznurowego w punktach, znajdujących się na jego bokach pod linjami podziałkowemi AA', BB', DD' . Oznaczmy te punkty styczności odpowiednio przez A_1, B_1, D_1 .

Przypuśćmy, że linja DD' dzieli obciążenia całkowite w stosunku $1:n-1$. Zatem $AD = \frac{\ell}{n}$ i $DB = \ell - \frac{\ell}{n} = \frac{n-1}{n} \ell$. Dalej mamy $AF = \frac{AD}{2} = \frac{\ell}{2n}$; $DE = \frac{1}{2} DB = \frac{n-1}{2n} \ell$.

Rozpatrzmy teraz odcinki, utworzone przez proste równoległe AA_1, FF_1, CC_1 , na prostych AC i A_1C_1 : między nimi zachodzi zależność następująca:

$$\frac{A_1F_1}{A_1C_1} = \frac{AF}{AC} = \frac{\ell}{2n} : \frac{\ell}{2} = \frac{1}{n};$$

skąd $A_1F_1 = \frac{A_1C_1}{n}$. Widzimy stąd, że punkt F_1 dzieli odcinek A_1C_1 na dwie części w stosunku $\frac{1}{n-1}$, t.j. w takim samym, w jakim linja DD' dzieli pole $AA'B'B$.

Analogicznie znajdziemy:

$$\frac{C_1E_1}{C_1B_1} = \frac{CE}{CB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{n} \quad \text{x/}$$

x/ Ponieważ $AD = AB - DB$

$$\text{i następnie } \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{DB}{2}$$

$$AF = BC - EB = CE$$

skąd $C, E_1 = \frac{C, B_1}{2}$. Zatem również i punkt E_1 , dzieli odcinek C, B_1 boku 2 na dwie części w tym samym stosunku: $\frac{1}{2}$

Wreszcie otrzymamy z łatwością, że

$$\frac{F, D_1}{F, E_1} = \frac{FD}{FE} = \frac{AF}{AC} = \frac{\ell}{2\ell} : \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}$$

czyli że punkt styczności D_1 boku α z krzywą sznurową dzieli ten bok również w stosunku $\frac{1}{2}$.

Reasumując wszystkie wyprowadzone tu wnioski, powiemy, że

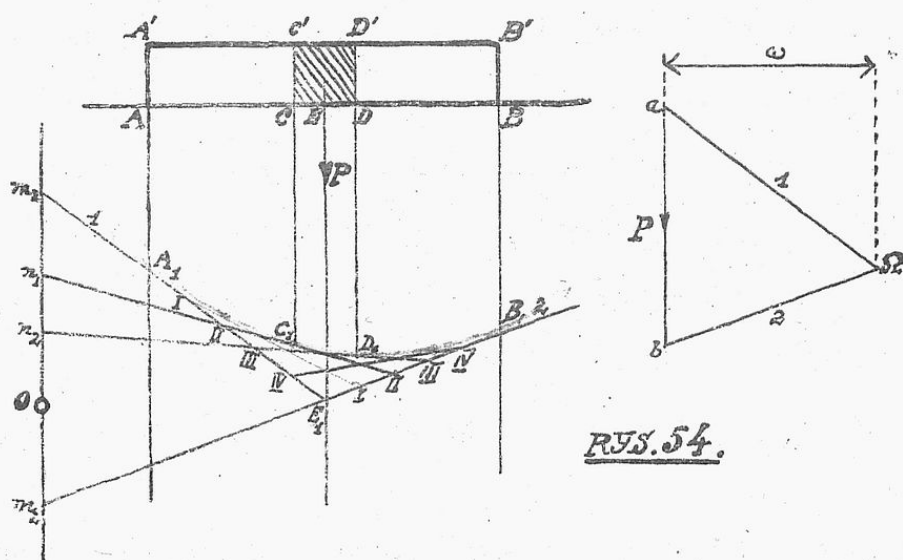
DOWOLNA STYCZNA α DO KRZYWEJ SZNUROWEJ, ODPOWIADAJĄCEJ OBCIĄŻENIU CIĄGŁEMU I JEDNOSTAJNEMU, DZIELI KAŻDĄ Z DWUCH INNYCH STYCZNYCH W JEDNAKOWYM STOSUNKU.

W TAKIM SAMYM STOSUNKU NOWA STYCZNA DZIELI SIĘ W JEJ PUNKCIE STYCZNOŚCI Z KRZYWĄ SZNUROWĄ.

Z geometrii analitycznej oraz rzutowej wiadomo, że takie własności posiada jedynie krzywa, zwana PARABOLĄ. Z tego więc wynika, że KRZYWĄ SZNUROWĄ W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO I JEDNOSTAJNEGO JEST PARABOLA.

54. Otrzymane poprzednie własności krzywej sznurowej paraboli pozwalają jednocześnie wykreślać ją w sposób nadzwyczaj prosty /rys. 54/.

Wystarczy w tym celu wykreślić wielobok sznurowy dla siły skupionej P , zastępującej całkowite obciążenie $AA'B'B$ i każdy z dwóch boków tego wieloboku, a więc A, E_1 i E_1, B_1 podzielić na jednakową liczbę



RYS. 54.

części. Punkty podziału na stycznej A, E , i oddzielnie na E, B , numerujemy kolejne, poczynając od A , i E . Następnie łączymy ze sobą punkty, zaopatrzone w jednakowe numery, i w ten sposób otrzymamy szereg prostych, których obwiednią jest właśnie szukana parabola^{x/}.

55. Gdy już mamy wykreśloną parabolę, jako krzywą sznurową dla jednostajnego obciążenia ciągłego, z łatwością możemy wyznaczyć momenty statyczne danego obciążenia lub jego części względem dowolnych punktów.

^{x/} UWAGA PRAKTYCZNA. Mając dostateczną liczbę stycznych do paraboli, niema już potrzeby jej wykreślać, bo styczne te zarysują parabolę dość dokładnie. Wykreślanie paraboli jest nawet niepożądane, bo poza tem, że zabiera dużo czasu, prawdopodobieństwo niedokładności będzie większe niż wtedy, gdy poprzestajemy tylko na stycznych.

Tak więc np. /rys.54/ moment statyczny obciążenia belki na dłuę. AB wzgl. punktu $O = M_o(\sum P)_{AB} = m_1 m_2 \cdot \omega$, podobnież: $M_o(\sum P)_{CD} = n_1 n_2 \cdot \omega$; odcinki m_1, m_2 i n_1, n_2 są wyznaczone na prostej odcinków przez styczne do paraboli w punktach, odpowiadających linjom podziału pola $AA'B'B$. Obydwa momenty w danym przypadku są dodatnie.

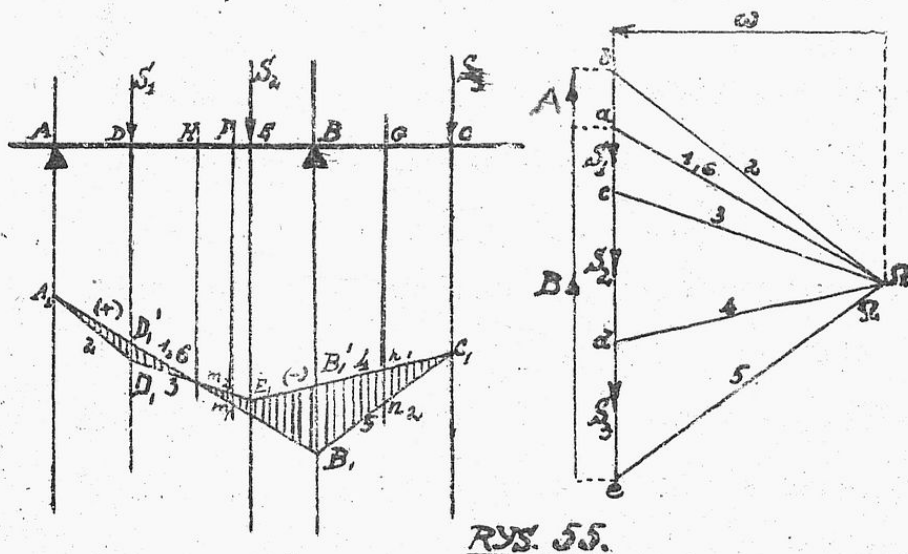
ROZDZIAŁ IV.

BELKA PROSTA NA DWUCH PODPORACH.

A. OBCIĄŻENIE BEZPOŚREDNIE.

56. OKREŚLENIE ODPORÓW.

Wyobraźmy sobie belkę prostą, opartą na dwóch podporach A i B i obciążoną pionowymi siłami skupionymi S_1, S_2, S_3 /rys.55/.



RYŚ. 55.

Podpory A i B wywołują odpory, których kierunki mogą być, wogóle, różnoredne. Jeśli

jednak przypuścimy, że jedna z podpor, dajmy na to A