

S_1, S_2 . Sposoby rozkładania sił, podane w niniejszym par. znajdują zastosowanie wówczas, kiedy linie działania sił nie przecinają się w obrębie rysunku.

ROZDZIAŁ III.

MOMENTY STATYCZNE SIŁ.

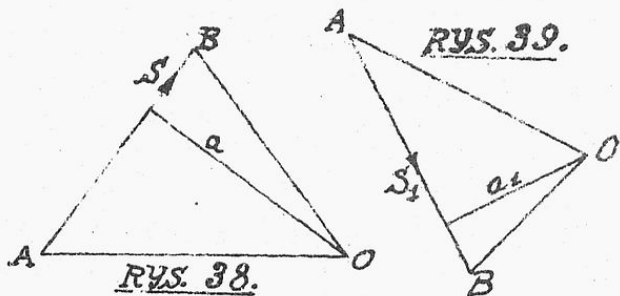
40. OKREŚLENIE MOMENTU STATYCZNEGO SIŁY. Przypuśćmy, że odcinek AB /rys.38/ przedstawia co do wartości, kierunku i lotu siłę S .

MOMENTEM STATYCZNYM TEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O NAZYWAĆ BĘDZIEMY ILOCZYN Z OWIEJ SIŁY PRZEZ JEJ ODLEGŁOŚĆ OD O , CZYLI PRZEZ T.ZW. RAMIĘ. PRZYTEM ILOCZYNOWI TEMU PRZYPISUJEMY ZNAK $+$ LUB $-$, ZALEŻNIE OD TEGO, CZY SIŁA S DĄŻY DO OBROTU OKOŁO O W KIERUNKU RUCHU WSKAZÓWEK ZEGAROWYCH, CZY TEŻ W KIERUNKU PRZECIWNYM.

Z określenia tego wynika, że w przypadku, przedstawionym na rys.38, moment jest dodatni; oznaczając zatem ramię przez a , będziemy mogli napisać

$$M_O S = S \cdot a;$$

lewa strona tej równości jest symbolem wyrażenia: "moment $/M/$ względem punktu O siły S ".



Natomiast moment siły

S_1 względem punktu

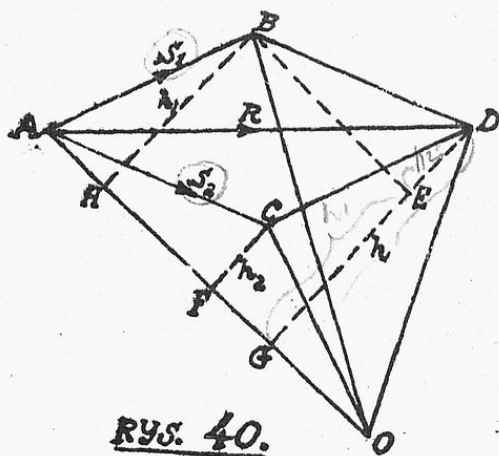
/rys.39/ jest ujemny,

więc $M_O S_1 = -S_1 \cdot a_1;$

41. Łącząc punkty A i B z O /rys.38/ otrzymamy trójkąt AOB , którego podwójne pole wynosi $S \cdot a$, a więc jest równe momentowi siły S względem punktu O .

Tak więc widzimy, że MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU JEST RÓWNY PODWÓJNEMU POLU TRÓJKĄTA, ZBUDOWANEGO NA TEJ SIŁE, JAK NA PODSTAWIE I POSIADAJĄCEGO WIERZCHOŁEK W OWYM PUNKCIE. Polu temu przypisujemy znak $+$ lub $-$ stosownie do powiedzianego w poprzednim paragrafie.

42. MOMENT SIŁY WYPADKOWEJ. Niech będą dwie siły S_1, S_2 /rys.40/, których linie działania przecinają się w punkcie A , oraz dowolny punkt O , położony w płaszczyźnie, wyznaczonej przez te siły. Po przesunięciu



rys. 40.

sił do punktu A znajdziemy za pomocą równoległoboku wypadkową R tych sił i w myśl ostatniego twierdzenia /§ 41/ wyznaczmy momenty statyczne danych sił składowych oraz moment tej wypadkowej,

względem obranego punktu. Wysokości trójkątów ABO, ACO, ADO względem wspólnej podstawy AO niech będą h_1, h_2, h ; wówczas otrzymamy:

$$M_0 S_1 = 2 \cdot \Delta AOB = \bar{AO} \cdot h, \dots \dots \dots (1)$$

$$M_0 S_2 = 2 \cdot \Delta AOC = \bar{AO} \cdot h_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$M_0 R = 2 \cdot \Delta AOD = \bar{AO} \cdot h \dots \dots \dots (3)$$

Poprowadźmy z punktu B prostopadłą do wysokości h i spodek jej oznaczmy przez E ; otrzymamy trójkąt BED , równy trójkątowi ACF /odpowiednie boki są równoległe, a prócz tego $BD=AC$ /, a więc $DE=CF=h_2$; prócz tego $EG=h_1$; ponieważ $DG=h=DE+EG$ zatem

$$h = h_1 + h_2 \dots \dots \dots (4)$$

Dodajmy stronami równości /1/ i /2/ i weźmy pod uwagę zależność /4/, wówczas

$$M_0 S_1 + M_0 S_2 = \bar{AO} \cdot h_1 + \bar{AO} \cdot h_2 = \bar{AO} (h_1 + h_2) = \bar{AO} \cdot h;$$

Ponieważ z /3/ iloczyn $\bar{AO} \cdot h$ jest równy momentowi siły wypadkowej R względem punktu O , więc

$$M_0 R = M_0 S_1 + M_0 S_2$$

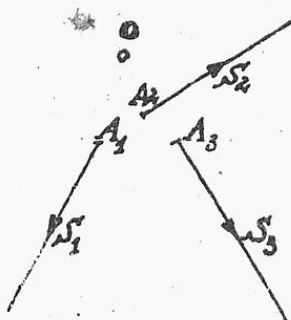
stąd mamy twierdzenie: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ R DWÓCH SIŁ S_1, S_2 WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O , OBRANEGO W PŁASZCZYŹNIE TYCH SIŁ, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW ICH WZGLĘDEM TEGOŻ PUNKTU.

43. Uogólnijmy powyższe twierdzenie dla ilukolwiek sił składowych.

Nie zmniejszając ogólności dowodu, przypuśćmy, że mamy dane tylko trzy siły S_1, S_2, S_3 /rys. 41/, znajdujące się w jednej płaszczyźnie; wyznaczmy momenty statyczne względem punktu O , obranego w tejże płaszczyźnie.

szczyźnie.

Znajdujemy naprzód wypadkową $R_{1,2}$ sił S_1, S_2 ; stosujemy do nich twierdzenie § 42 według którego:



RYS. 41.

$M_O R_{1,2} = M_O S_1 + M_O S_2; (1)$
Postępując tak samo z siłami $R_{1,2}$ i S_3 , jako składowymi oraz z R jako ich wypadkową, otrzymamy:

$$M_O R = M_O R_{1,2} + M_O S_3.$$

Jeżeli zamiast $M_O R_{1,2}$ podstawimy jego wartość z /1/, wypadnie

równość:

$$M_O R = M_O S_1 + M_O S_2 + M_O S_3;$$

wyrażająca twierdzenie, o które nam chodzi.

Gdybyśmy mieli dane więcej, niż 3 siły składowe, to, oznaczając ich liczbę przez n i rozumując, jak poprzednio, otrzymalibyśmy:

$$M_O R = M_O S_1 + M_O S_2 + \dots + M_O S_n;$$

lub krócej

$$M_O R = \sum_{i=1}^{i=n} M_O S_i;$$

Tak więc: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ ILUKOLWIEK SIŁ S_1, S_2, \dots, S_n BĘDĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU O , OBRANEGO W TEJŻE PŁASZCZYŹNIE, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW TYCH SIŁ WZGLĘDEM TEGO PUNKTU.

44. ZASTOSOWANIE WIELOBOKU SZNUROWEGO DO WYZNACZA-

NIA MOMENTU STATYCZNEGO. Przypuśćmy, że mamy znaleźć moment statyczny siły S względem punktu O , odległego od niej o a /rys.42/.

Wykreślmy dla tej siły wielobok sił oraz wielobok sznurowy. Promienie oraz odpowiednie boki oznaczmy przez 1, 2. Przez punkt O poprowadzmy prostą, równoległą do siły, którą nazwiemy PROSTĄ ODCINKÓW. Boki wieloboku sznurowego odetną na tej prostej odcinek m_1, m_2 . W ten sposób utworzy się trójkąt $m_1 B m_2$, podobny do trójkąta $a S b$ w wieloboku sił. Z podobieństwa tego wynika:

$$\frac{ab}{m_1 m_2} = \frac{\omega}{a}$$

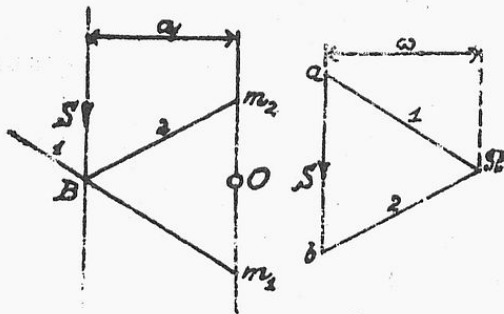
gdzie ω oznacza w wieloboku sił odległość biegunową Ω od siły S , czyli t.zw. ODLEGŁOŚĆ BIEGUNOWĄ. Ponieważ $ab = S$, zatem

$$S \cdot a = m_1 m_2 \cdot \omega;$$

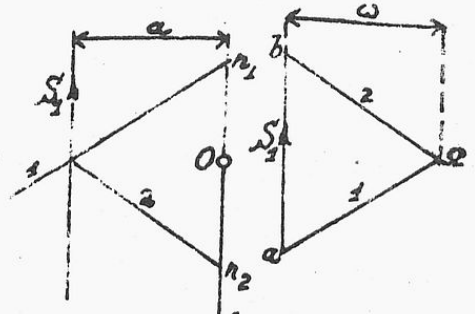
Lecz $S \cdot a$ jest to moment siły S względem punktu O ; zatem z równości tej wynika, że moment statyczny wyznaczyć możemy, gdy pomnożymy odcinek $m_1 m_2$ otrzymany na "prostej odcinków" przez odległość biegunową.

Stąd mamy następujące pravidło: ABY WYZNACZYĆ MOMENT SIŁY S WZGLĘDEM DANEGO PUNKTU O NALEŻY WYKREŚLIĆ DLA TEJ SIŁY JAKIKOLWIEK WIELOBOK SIŁ ORAZ ODPOWIEDNI WIELOBOK SZNUROWY, POPROWADZIĆ PRZECZ O PROSTĄ ODCINKÓW I ZNALEZĆ NA NIEJ ODCINEK, ZATARTY MIĘDZY BOKAMI

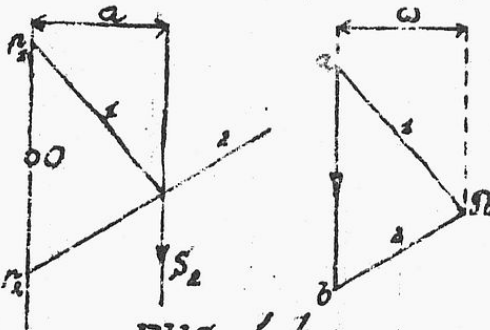
WIELOBOKU SZNUROWEGO; ILOCZYN Z TEGO ODCINKA PRZEZ OD-



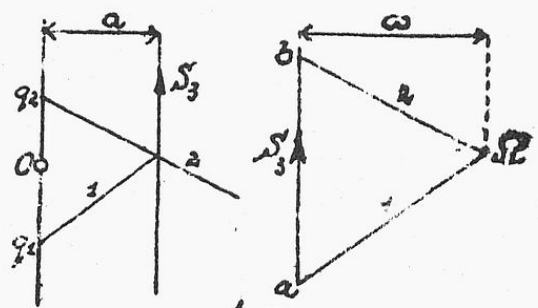
RYS. 42.



RYS. 43.



RYS. 44.



RYS. 45.

LEGŁOŚĆ BIEGUNOWĄ JEST RÓWNY SZUKANEMU MOMENTOWI
STATYCZNEMU.

45. Trzeba jeszcze wskazać cechę, które pozwoli
wprost z naszego wykresu określić znak, obliczonego
tym sposobem momentu.

Rozpatrując rozmaite możliwe położenia siły S
względem punktu O /rys.42 do 45/ przekonamy się, że
GDY MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM OWEGO PUNKTU JEST DO-
DATNI, TO PUNKT PRZECIĘCIA SIĘ BOKU 1 WIELOBOKU SZNU-
ROWEGO Z PROSTĄ ODCINKÓW LEŻY PONAD PUNKTEM PRZECIĘ-
CIA SIĘ BOKU 2 Z TĄŻ PROSTĄ, ORAZ, ŻE W PRZYPADKU OD-
WROTNYM JEST WRĘCZ PRZECIWNIE. Bok 1 nazywać będzie-
my też "bokiem przed siłą", zaś bok 2 - "bokiem po-

za siłą".

Istotnie: na rys.42 moment siły S względem punktu O jest ujemny /widać to bezpośrednio z kierunku, w którym ta siła stara się wykonać obrót około O /, jednocześnie widzimy, że punkt m_1 leży poniżej punktu m_2 , t.j. zgodnie z tem, jak możnaby przewidzieć, stosując dopiero co wymienione prawidło; na rys.43 mamy znów wypadek dodatniego momentu; odcinek n, n_2 biegnie z góry na dół, czyli znowu zgodnie z prawidłem. Tak samo potwierdzają to ostatnie pozostałe przypadki, rozpatrzone na rys.44 i 45.

Zwrócić należy uwagę, że powyższe prawidło będzie słuszne dotąd, dopóki biegun Ω obrany jest w wieloboku sił naprawo od linii sił. Gdybyśmy biegun obrali z lewej strony, prawidło powyższe należałoby sformułować, pod względem znaku momentów, wprost odwrotnie.

46. SKALE MOMENTÓW. Wypada jeszcze omówić sprawę skali, przy której pomocy należy w naszym wykresie mierzyć odpowiednie odcinki w celu wyznaczenia momentów statystycznych sił.

Otrzymaliśmy poprzednio proporcję:

$$\frac{S}{m_1 m_2} = \frac{\omega}{a} \dots \dots \dots (1)$$

gdzie znaczenie liter wyjaśnia rys.42. Z proporcji wynika, że najlogiczniej będzie przyjąć, iż stosunek w każdej z obu stron zawiera wielkości jednorodne, że więc m_1, m_2 jest wyrażone w takich samych jednostkach, jak S zaś ω - w takich samych jak a .

Z tego wnosimy, że m, m_2 NALEŻY MIERZYĆ W SKALI SIŁ, A ω - W SKALI DŁUGOŚCI.

Proporcję /1/ można napisać także w sposób następujący:

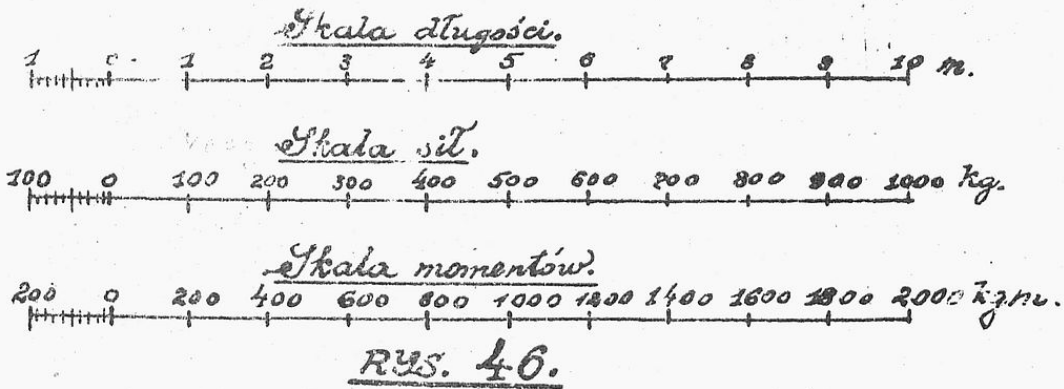
$$\frac{S}{\omega} = \frac{m, m_2}{a} \dots \dots \dots (2)$$

i rozumując, jak poprzednie, dojdziemy do wniosku, że MOŻNA ω MIERZYĆ W SKALI SIŁ, ZAŚ m, m_2 W SKALI DŁUGOŚCI, przyczem otrzymamy, oczywiście, ten sam wynik, co poprzednio.

Tak więc ODLEGŁOŚCI BIEGUNOWE I ODCINKI PROSTEJ ODCINKÓW NALEŻY MIERZYĆ W RÓŻNYCH SKALACH: JEŚLI PIERWSZĄ Z TYCH WIELKOŚCI MIERZYMY W SKALI DŁUGOŚCI, TO DRUGĄ TRZEBA MIERZYĆ W SKALI SIŁ, LUB ODWROTNIE.

Najczęściej stosować będziemy: dla odległości biegunowych - skalę długości, zaś dla odcinków - skalę sił.

47. Aby uniknąć wykonywania działań arytmetycznych przy wyznaczaniu momentów statycznych, kreślimy, zazwyczaj, obok skali długości i skali sił, specjalną "skalę momentów" /rys.46/. Każdą działkę tej skali, obieramy równą co do wielkości działce skali sił: działka skali momentów wskazać powinna iloczyn z liczby kg , przez odległość biegunową, zmierzoną w skali długości. Ponieważ odległość biegunowa jest wielkością stałą, zatem liczby, umieszczone nad skalą momentów, są liczbami krotnymi odpowiednich wartości na skali sił.

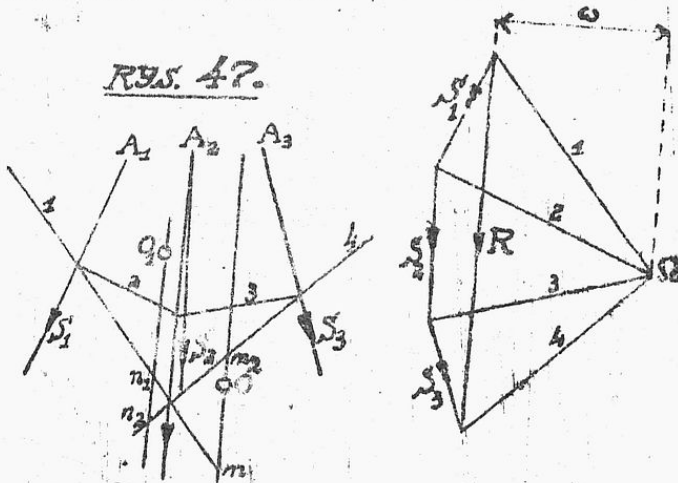


Na rys.46 są wykreślone skale do zadania, w którym odległość biegunowa wynosi 2 m., w skali długości lub 200 kg. w skali sił.

48. Wyznaczenie MOMENTU STATYCZNEGO ILUKOLWIEK SIŁ PRZY POMOCY WIELOBOKU SZNUROWEGO.

Przypuśćmy, że mamy np. trzy siły S_1, S_2, S_3 , chodzi nam o znalezienie ich momentu statycznego względem

dowolnego punktu O
/rys.47/.



W tym celu zastępujemy dany układ sił ich wypadkową R , a znalazłszy ją przy pomocy wieloboku

sił i sznurowego, a następnie, opierając się na twierdzeniu, dowiedzionem w § 43, wyznaczamy moment statyczny tej wypadkowej względem O .

Należy więc przez O poprowadzić prostą odcinków

równoległe do R i znaleźć punkty przecięcia się jej z bokami przed i za siłą R /t.j. z bokami 1 i 4/; otrzymamy odcinek $\overline{m, m_2}$; następnie obliczamy moment statyczny sił, jako iloczyn $\overline{m, m_2} \cdot \omega$; lub też zmierzwszy odcinek m, m_2 w skali momentów, znajdziemy wartość szukanego momentu.

Zauważymy, że można się obejść bez rysowania wypadkowej w wieloboku sznurowym, wyznaczając wprost przecięcia boków skrajnych z prostą odcinków.

Znak znalezionego tym sposobem momentu określamy zapomocą prawidła, przytoczonego w § 45. Stosując je, dojdziemy łatwo do wniosku, że w rozważanym przypadku /rys.47/ moment jest ujemny /odcinek m, m_2 biegnie z dołu do góry/.

Podobnie otrzymamy, że moment statyczny tego samego układu sił względem punktu O , wynosi $\overline{n, n_2} \cdot \omega$ i posiada znak dodatni.

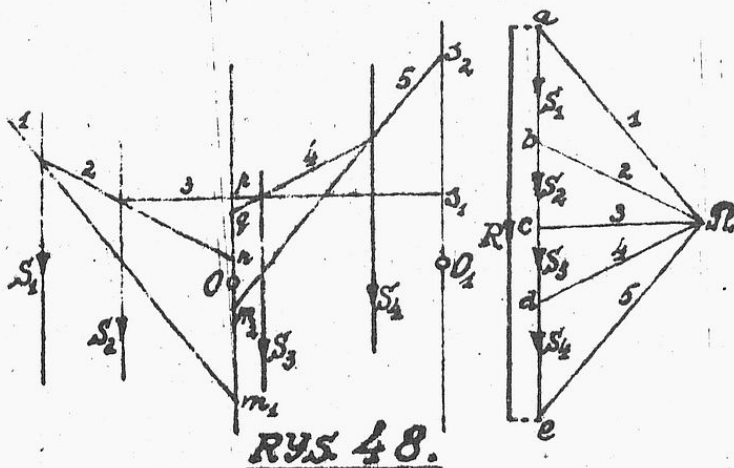
49. Na rys.48 widzimy zastosowanie powyższej metody do wyznaczenia MOMENTU STATYCZNEGO KILKU /czterech/ SIŁ RÓWNOLEGLYCH S_1, S_2, S_3, S_4 względem punktu O .

W tym razie rzecz się upraszcza, gdyż wypadkowa tych sił, a więc i prosta odcinków, jest równoległa do sił składowych.

Oznaczając momenty przecięcia się tej prostej z bokami skrajnymi wieloboku sznurowego przez m , i m_2 , napi-

szemy:

$$\sum_{i=1}^{i=4} M_0 S_i = - \overline{m, m_2} \cdot \omega \dots\dots\dots (1)$$



RYS 48.

Wynik ten łatwo sprawdzić bezpośrednio, wyznaczając moment statyczny każdej siły z osobna i następnie dodając

te momenty algebraicznie.

Istotnie: $M_0 S_1 = -\bar{m}_1 n \cdot \omega;$

$$M_0 S_2 = -\bar{n} \bar{\rho} \cdot \omega;$$

$$M_0 S_3 = +\bar{\rho} \bar{q} \cdot \omega;$$

$$M_0 S_4 = +q \cdot \bar{m}_2 \cdot \omega;$$

Dodając te równości i biorąc pod uwagę, że $-\bar{m}_1 n - \bar{n} \bar{\rho} + \bar{\rho} \bar{q} + q \bar{m}_2 = -\bar{m}_1 \bar{m}_2$ otrzymamy wzór /1/.

Za pomocą wykreślonego już wieloboku sznurowego można wyznaczyć również momenty statyczne grupy pewnych sił z danego układu, byleby siły tej grupy następowały w wieloboku sił bezpośrednio po sobie.

Tak więc np. łatwo znajdziemy, że

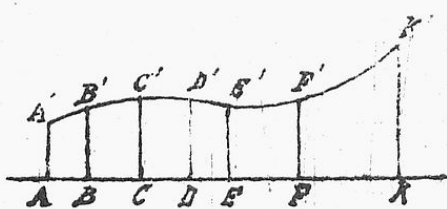
$$M_0 (S_1, S_2) = -\bar{m}_1 \bar{\rho} \cdot \omega$$

gdzie $\bar{m}_1 \bar{\rho}$ oznacza odcinek, znajdujący się na prostej odcinków pomiędzy punktami jej przecięcia się z bokami: przed siłą S_1 /bok 1/ i za siłą S_2 /bok 3/.

Zupełnie tak samo otrzymamy względem punktu O_1 , np.:

$$M_{O_1} (S_3, S_4) = -\bar{s}_1 \bar{s}_2 \cdot \omega; \quad \text{i t.d.}$$

50. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE. Dotychczas mieliśmy do czynienia jedynie z SIŁAMI SKUPIONEMI, to jest takimi, które mają pewną skończoną wartość i są przyłożone do określonych punktów danego ciała. Rozważymy teraz przypadek gdy na ciało działają SIŁY CIĄGŁE, zmieniające się od punktu do punktu. Będzie to, naprz. obciążenie warstwą kamieni lub piasku, nasypanego w sposób dowolny lub obciążenie tłumem ludzi, ustawionych na podłodze, spoczywającej na belce.



RYS. 49.

Przypuśćmy więc, że mamy belkę AK /rys.49/, obciążoną w sposób CIĄGŁY. Na dowolnie obraną część belki obciążonej przypadnie odpowiednia część ciężaru całkowitego.

Weźmy, dajmy na to, część belki CD o długości Δl ; przypuśćmy, że na tę długość przypada ciężar ΔP ; wtedy stosunek

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = \mu_0$$

wskaże nam ŚREDNIE OBCIĄŻENIE BELKI na jej części między C i D , przypadające na JEDNOSTKĘ jej długości.

Wartość tego ŚREDNIEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTKOWEGO dla obranego miejsca na belce zależeć będzie od długości Δl . Aby uniezależnić wartość μ_0 od długości Δl przyjmijmy, że długość Δl , mierzona od punktu C , m

leje, dążąc do zera; wówczas otrzymamy:

$$\lim_{(x \rightarrow a)} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{dP}{dx} = p;$$

będzie to OBCIĄŻENIE JEDNOSTKOWE W DANYM PUNKCIE C;

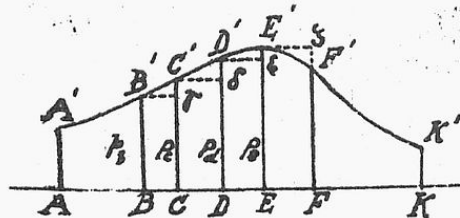
oznaczymy je przez p . Przypuśćmy, że w sposób podobny obliczyliśmy obciążenia jednostkowe we wszystkich punktach obciążonej belki. Obrawszy, następnie, odpowiednią SKALĘ OBCIĄŻEŃ JEDNOSTKOWYCH, wystawiamy w punktach A, B, C, \dots belki prostopadłe do niej i na tych prostopadłych odkładamy odcinki AA', BB', CC', DD' i t.d., równe obciążeniom jednostkowym, znalezionym dla każdego punktu belki.

Jeżeli końce tych odcinków połączymy linią ciągłą, otrzymamy poglądowe przedstawienie rozkładu obciążeń jednostkowych wzdłuż belki. Linję $A'B'C' \dots$, która w ogólnym przypadku będzie linią krzywą, nazywać będziemy KRZYWĄ OBCIĄŻEŃ.

Obciążenie jednostkowe mierzyć będziemy najczęściej w kilogramach na metr bieżący belki /kg./m./.

Mając krzywą obciążeń daną, łatwo jest obliczyć z niej siłę, przypadającą na dowolną część belki, względnie na całą belkę.

Przyjmijmy, że mamy znaleźć siłę, działającą na część BF belki /rys.50/. Podzielmy długość BF na dostatecznie małe części: BC, CD, DE i EF . Z pewnem przybliżeniem będziemy mogli przyjąć, że na całej długości części BC przypada jednakowe OBCIĄŻENIE JED-



RYS. 50.

NCSTKOWE, przedstawione odcinkiem $BB' = h_1$; na część CD odcinkiem $CC' = h_2$; na części DE - odcinkiem $DD' = h_3$ i t.d. Wówczas na część belki

BC	działać będzie siła /ciężar/	$= h_1 \cdot \overline{BC}$
CD	" " "	$= h_2 \cdot \overline{CD}$
DE	" " "	$= h_3 \cdot \overline{DE}$ i. t. d.

iloczyn $h_1 \cdot \overline{BC}$	jest to pole prostokąta $BB'C$
$h_2 \cdot \overline{CD}$	" " " " $CC'D$
" $h_3 \cdot \overline{DE}$	" " " " $DD'E$
" $h_4 \cdot \overline{EF}$	" " " " $EE'F$

Zatem siłę, działającą na część belki BF obliczymy /w przybliżeniu/ z pola, zawartego między rzędnymi krzywej obciążeń w punktach B i F , osią belki i linią schodkową $B'C'D'E'F'$.

Jeśli byśmy podział belki BF dokonali na bardzo wiele części o bardzo małej długości, wówczas pole nasze ograniczone będzie od góry linią schodkową, która bardziej, niż poprzednia, zbliżyć się będzie do krzywej obciążeń $B'C'D'E'F'$. Wyobraźmy sobie, że podział belki BF uskuteczniliśmy na nieskończenie wiele części; wtedy linia schodkowa zamieni się w krzywą $B' \dots F'$ i siłę, działającą na część belki BF , obliczymy z pola, zawartego między osią belki, rzędnymi w punktach,



ograniczających badaną część belki i krzywą obciążeń.

W podobny sposób znaleźlibyśmy siłę, działającą na część belki AB , obliczywszy pole $AA'B'B'$; toż samo dla całej belki AK należałoby obliczyć pole - $AA'B'C'D'E'F'G'H'$.

Dla tego też pole, zawarte pomiędzy osią belki, krzywą obciążeń jednostkowych i dwiema rzędnymi, ograniczającymi rozpatrywaną część belki, nazywamy **POLEM OBCIĄŻEŃ**.

Wartość pola obciążeń, w zastosowaniach praktycznych, znajdziemy z dostatecznem przybliżeniem, dzieląc pole to na takie figury, aby pole każdej z nich można było łatwo obliczyć; wówczas pole obciążeń rozbite będzie na pola trójkątów, prostokątów, odcinków koła i t.p.

Wymiary tych figur otrzymywać należy, mierząc je - w kierunku równoległym do osi belki - w skali długości, w kierunku prostopadłym do osi - w skali obciążeń jednostkowych. Wówczas pole da nam wielkość o wymiarze:

$$m \times \frac{kg}{m} = kg.$$

51. WIELOBOK SZNUROWY DLA PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.

Przypuśćmy, że mamy belkę, obciążoną w sposób ciągły; pole obciążeń niech będzie $AA'C'E'F'D'B'B'$ /rys. 51/. Należy wykreślić wielobok sznurowy dla tego obciążenia.

Podzielmy pole obciążeń na kilka - w naszym przykła-