

$S_1, S_2$ . Sposoby rozkładania sił, podane w niniejszym par. znajdują zastosowanie wówczas, kiedy linie działania sił nie przecinają się w obrębie rysunku.

### ROZDZIAŁ III.

#### MOMENTY STATYCZNE SIŁ.

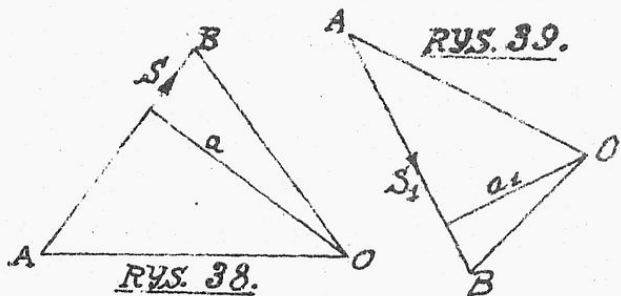
40. OKREŚLENIE MOMENTU STATYCZNEGO SIŁY. Przypuśćmy, że odcinek  $AB$ /rys.38/ przedstawia co do wartości, kierunku i lotu siłę  $S$ .

MOMENTEM STATYCZNYM TEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU  $O$  NAZYWAĆ BĘDZIEMY ILOCZYN Z OWIEJ SIŁY PRZEZ JEJ ODLEGŁOŚĆ OD  $O$ , CZYLI PRZEZ T.ZW. RAMIĘ. PRZYTEM ILOCZYNOWI TEMU PRZYPISUJEMY ZNAK  $+$  LUB  $-$ , ZALEŻNIE OD TEGO, CZY SIŁA  $S$  DĄŻY DO OBROTU OKOŁO  $O$  W KIERUNKU RUCHU WSKAZÓWEK ZEGAROWYCH, CZY TEŻ W KIERUNKU PRZECIWNYM.

Z określenia tego wynika, że w przypadku, przedstawionym na rys.38, moment jest dodatni; oznaczając zatem ramię przez  $a$ , będziemy mogli napisać

$$M_O S = S \cdot a;$$

lewa strona tej równości jest symbolem wyrażenia: "moment  $/M/$  względem punktu  $O$  siły  $S$ ".



Natomiast moment siły

$S_1$  względem punktu

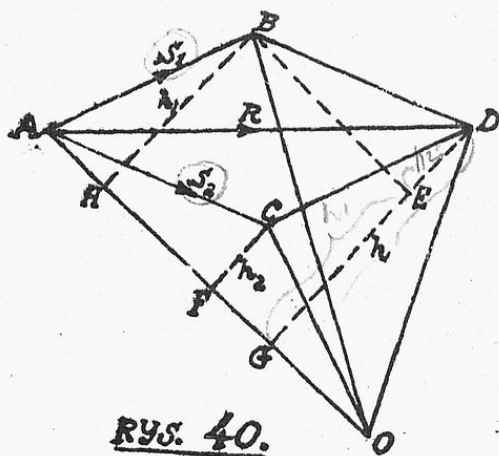
/rys.39/ jest ujemny,

więc  $M_O S_1 = -S_1 \cdot a_1;$

41. Łącząc punkty  $A$  i  $B$  z  $O$  /rys.38/ otrzymamy trójkąt  $AOB$ , którego podwójne pole wynosi  $S \cdot a$ , a więc jest równe momentowi siły  $S$  względem punktu  $O$ .

Tak więc widzimy, że MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU JEST RÓWNY PODWÓJNEMU POLU TRÓJKĄTA, ZBUDOWANEGO NA TEJ SIŁE, JAK NA PODSTAWIE I POSIADAJĄCEGO WIERZCHOŁEK W OWYM PUNKCIE. Polu temu przypisujemy znak  $+$  lub  $-$  stosownie do powiedzianego w poprzednim paragrafie.

42. MOMENT SIŁY WYPADKOWEJ. Niech będą dwie siły  $S_1, S_2$  /rys.40/, których linie działania przecinają się w punkcie  $A$ , oraz dowolny punkt  $O$ , położony w płaszczyźnie, wyznaczonej przez te siły. Po przesunięciu



RYS. 40.

sił do punktu  $A$  znajdziemy za pomocą równoległoboku wypadkową  $R$  tych sił i w myśl ostatniego twierdzenia /§ 41/ wyznaczmy momenty statyczne danych sił składowych oraz moment tej wypadkowej,

względem obranego punktu.

Wysokości trójkątów  $ABO, ACO, ADO$  względem wspólnej podstawy  $AO$  niech będą  $h_1, h_2, h$ ; wówczas otrzymamy:

$$M_0 S_1 = 2 \cdot \Delta AOB = \bar{AO} \cdot h, \dots \dots \dots (1)$$

$$M_0 S_2 = 2 \cdot \Delta AOC = \bar{AO} \cdot h_2 \dots \dots \dots (2)$$

$$M_0 R = 2 \cdot \Delta AOD = \bar{AO} \cdot h \dots \dots \dots (3)$$

Poprowadźmy z punktu  $B$  prostopadłą do wysokości  $h$  i spodek jej oznaczmy przez  $E$ ; otrzymamy trójkąt  $BED$ , równy trójkątowi  $ACF$  /odpowiednie boki są równoległe, a prócz tego  $BD=AC$ /, a więc  $DE=CF=h_2$ ; prócz tego  $EG=h_1$ ; ponieważ  $DG=h=DE+EG$  zatem

$$h = h_1 + h_2 \dots \dots \dots (4)$$

Dodajmy stronami równości /1/ i /2/ i weźmy pod uwagę zależność /4/, wówczas

$$M_0 S_1 + M_0 S_2 = \bar{AO} \cdot h_1 + \bar{AO} \cdot h_2 = \bar{AO} (h_1 + h_2) = \bar{AO} \cdot h;$$

Ponieważ z /3/ iloczyn  $\bar{AO} \cdot h$  jest równy momentowi siły wypadkowej  $R$  względem punktu  $O$ , więc

$$M_0 R = M_0 S_1 + M_0 S_2$$

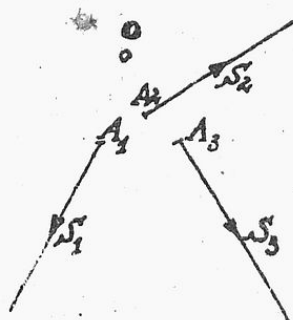
stąd mamy twierdzenie: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ  $R$  DWÓCH SIŁ  $S_1, S_2$  WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU  $O$ , OBRANEGO W PŁASZCZYŹNIE TYCH SIŁ, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW ICH WZGLĘDEM TEGOŻ PUNKTU.

43. Uogólnijmy powyższe twierdzenie dla ilukolwiek sił składowych.

Nie zmniejszając ogólności dowodu, przypuśćmy, że mamy dane tylko trzy siły  $S_1, S_2, S_3$  /rys. 41/, znajdujące się w jednej płaszczyźnie; wyznaczmy momenty statyczne względem punktu  $O$ , obranego w tejże płaszczyźnie.

szczyźnie.

Znajdujemy naprzód wypadkową  $R_{1,2}$  sił  $S_1, S_2$ ; stosujemy do nich twierdzenie § 42 według którego:



RYS. 41.

$M_o R_{1,2} = M_o S_1 + M_o S_2$ ; (1)  
Postępując tak samo z siłami  $R_{1,2}$  i  $S_3$ , jako składowymi oraz z  $R$  jako ich wypadkową, otrzymamy:

$M_o R = M_o R_{1,2} + M_o S_3$ .  
Jeżeli zamiast  $M_o R_{1,2}$  podstawimy jego wartość z /1/, wypadnie

równość:

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2 + M_o S_3;$$

wyrażająca twierdzenie, o które nam chodzi.

Gdybyśmy mieli dane więcej, niż 3 siły składowe, to, oznaczając ich liczbę przez  $n$  i rozumując, jak poprzednio, otrzymalibyśmy:

$$M_o R = M_o S_1 + M_o S_2 + \dots M_o S_n;$$

lub krócej

$$M_o R = \sum_{i=1}^{i=n} M_o S_i;$$

Tak więc: MOMENT STATYCZNY WYPADKOWEJ ILUKOLWIEK SIŁ  $S_1, S_2, \dots, S_n$  BĘDĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE WZGLĘDEM DOWOLNEGO PUNKTU  $O$ , OBRANEGO W TEJŻE PŁASZCZYŹNIE, JEST RÓWNY SUMIE ALGEBRAICZNEJ MOMENTÓW TYCH SIŁ WZGLĘDEM TEGO PUNKTU.

#### 44. ZASTOSOWANIE WIELOBOKU SZNUROWEGO DO WYZNACZA-



NIA MOMENTU STATYCZNEGO. Przypuśćmy, że mamy znaleźć moment statyczny siły  $S$  względem punktu  $O$ , odległego od niej o  $a$  /rys.42/.

Wykreślmy dla tej siły wielobok sił oraz wielobok sznurowy. Promienie oraz odpowiednie boki oznaczmy przez 1, 2. Przez punkt  $O$  poprowadzmy prostą, równoległą do siły, którą nazwiemy PROSTĄ ODCINKÓW. Boki wieloboku sznurowego odetną na tej prostej odcinek  $m_1, m_2$ . W ten sposób utworzy się trójkąt  $m_1 B m_2$ , podobny do trójkąta  $a S b$  w wieloboku sił. Z podobieństwa tego wynika:

$$\frac{ab}{m_1 m_2} = \frac{\omega}{a}$$

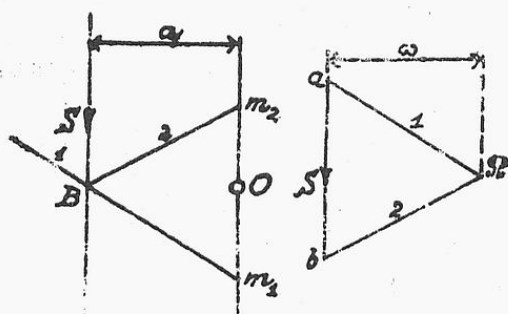
gdzie  $\omega$  oznacza w wieloboku sił odległość biegunową  $\Omega$  od siły  $S$ , czyli t.zw. ODLEGŁOŚĆ BIEGUNOWĄ. Ponieważ  $ab = S$ , zatem

$$S \cdot a = m_1 m_2 \cdot \omega;$$

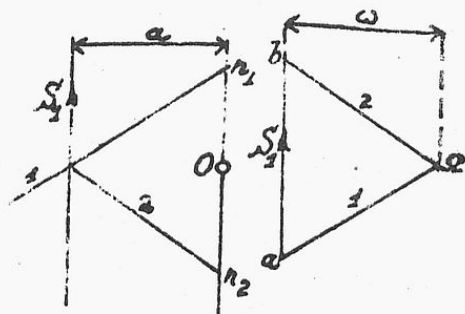
Lecz  $S \cdot a$  jest to moment siły  $S$  względem punktu  $O$ ; zatem z równości tej wynika, że moment statyczny wyznaczyć możemy, gdy pomnożymy odcinek  $m_1 m_2$  otrzymany na "prostej odcinków" przez odległość biegunową.

Stąd mamy następujące pravidło: ABY WYZNACZYĆ MOMENT SIŁY  $S$  WZGLĘDEM DANEGO PUNKTU  $O$  NALEŻY WYKREŚLIĆ DLA TEJ SIŁY JAKIKOLWIEK WIELOBOK SIŁ ORAZ ODPOWIEDNI WIELOBOK SZNUROWY, POPROWADZIĆ PRZEZ  $O$  PROSTĄ ODCINKÓW I ZNALEZĆ NA NIEJ ODCINEK, ZATARTY MIĘDZY BOKAMI

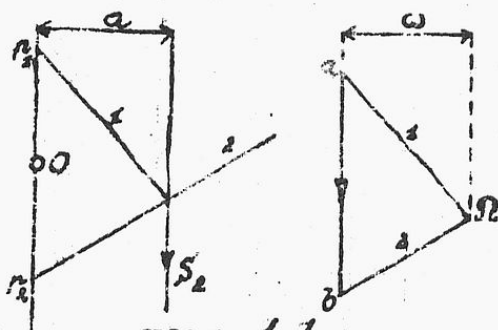
WIELOBOKU SZNUROWEGO; ILOCZYN Z TEGO ODCINKA PRZESZ OD-



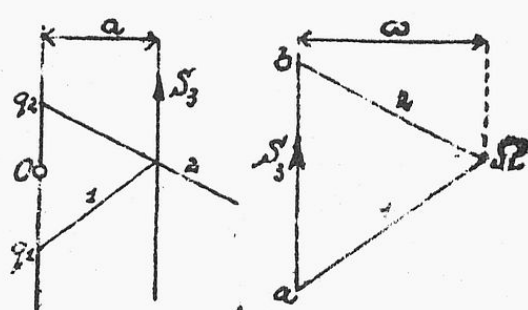
RYS. 42.



RYS. 43.



RYS. 44.



RYS. 45.

LEGŁOŚĆ BIEGUNOWĄ JEST RÓWNY SZUKANEMU MOMENTOWI  
STATYCZNEMU.

45. Trzeba jeszcze wskazać cechę, które pozwoli  
wprost z naszego wykresu określić znak, obliczonego  
tym sposobem momentu.

Rozpatrując rozmaite możliwe położenia siły  $S$   
względem punktu  $O$  /rys.42 do 45/ przekonamy się, że  
GDY MOMENT DANEJ SIŁY WZGLĘDEM OWEGO PUNKTU JEST DO-  
DATNI, TO PUNKT PRZECIĘCIA SIĘ BOKU 1 WIELOBOKU SZNU-  
ROWEGO Z PROSTĄ ODCINKÓW LEŻY PONAD PUNKTEM PRZECIĘ-  
CIA SIĘ BOKU 2 Z TĄŻ PROSTĄ, ORAZ, ŻE W PRZYPADKU OD-  
WROTNYM JEST WRĘCZ PRZECIWNIE. Bok 1 nazywać będzie-  
my też "bokiem przed siłą", zaś bok 2 - "bokiem po-

za siłą".

Istotnie: na rys.42 moment siły  $S$  względem punktu  $O$  jest ujemny /widać to bezpośrednio z kierunku, w którym ta siła stara się wykonać obrót około  $O$ /, jednocześnie widzimy, że punkt  $m_1$  leży poniżej punktu  $m_2$ , t.j. zgodnie z tem, jak możnaby przewidzieć, stosując dopiero co wymienione prawidło; na rys.43 mamy znów wypadek dodatniego momentu; odcinek  $n, n_2$  biegnie z góry na dół, czyli znowu zgodnie z prawidłem. Tak samo potwierdzają to ostatnie pozostałe przypadki, rozpatrzone na rys.44 i 45.

Zwrócić należy uwagę, że powyższe prawidło będzie słuszne dotąd, dopóki biegun  $\Omega$  obrany jest w wieloboku sił naprawo od linii sił. Gdybyśmy biegun obrali z lewej strony, prawidło powyższe należałoby sformułować, pod względem znaku momentów, wprost odwrotnie.

46. SKALE MOMENTÓW. Wypada jeszcze omówić sprawę skali, przy której pomocy należy w naszym wykresie mierzyć odpowiednie odcinki w celu wyznaczenia momentów statystycznych sił.

Otrzymaliśmy poprzednio proporcję:

$$\frac{S}{m_1 m_2} = \frac{\omega}{a} \dots \dots \dots (1)$$

gdzie znaczenie liter wyjaśnia rys.42. Z proporcji wynika, że najlogiczniej będzie przyjąć, iż stosunek w każdej z obu stron zawiera wielkości jednorodne, że więc  $m_1, m_2$  jest wyrażone w takich samych jednostkach, jak  $S$  zaś  $\omega$  - w takich samych jak  $a$ .

Z tego wnosimy, że  $m, m_2$  NALEŻY MIERZYĆ W SKALI SIŁ, A  $\omega$  - W SKALI DŁUGOŚCI.

Proporcję /1/ można napisać także w sposób następujący:

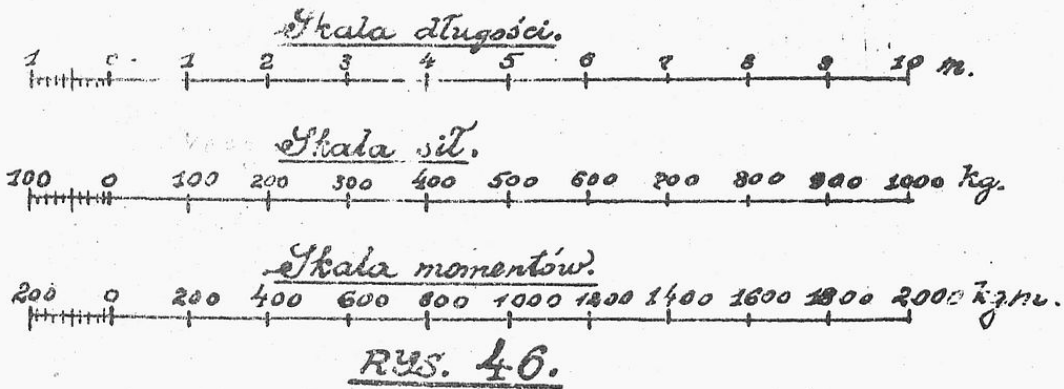
$$\frac{S}{\omega} = \frac{m, m_2}{a} \dots \dots \dots (2)$$

i rozumując, jak poprzednio, dojdziemy do wniosku, że MOŻNA  $\omega$  MIERZYĆ W SKALI SIŁ, ZAŚ  $m, m_2$  W SKALI DŁUGOŚCI, przyczem otrzymamy, oczywiście, ten sam wynik, co poprzednio.

Tak więc ODLEGŁOŚCI BIEGUNOWE I ODCINKI PROSTEJ ODCINKÓW NALEŻY MIERZYĆ W RÓŻNYCH SKALACH: JEŚLI PIERWSZĄ Z TYCH WIELKOŚCI MIERZYMY W SKALI DŁUGOŚCI, TO DRUGĄ TRZEBA MIERZYĆ W SKALI SIŁ, LUB ODWROTNIE.

Najczęściej stosować będziemy: dla odległości biegunowych - skalę długości, zaś dla odcinków - skalę sił.

47. Aby uniknąć wykonywania działań arytmetycznych przy wyznaczaniu momentów statycznych, kreślimy, zazwyczaj, obok skali długości i skali sił, specjalną "skalę momentów" /rys.46/. Każdą działkę tej skali, obieramy równą co do wielkości działce skali sił: działka skali momentów wskazać powinna iloczyn z liczby  $kg$ , przez odległość biegunową, zmierzoną w skali długości. Ponieważ odległość biegunowa jest wielkością stałą, zatem liczby, umieszczone nad skalą momentów, są liczbami krotnymi odpowiednich wartości na skali sił.

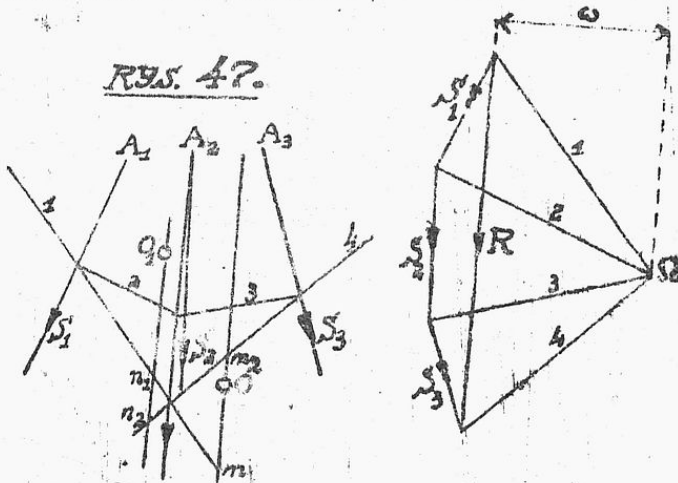


Na rys.46 są wykreślone skale do zadania, w którym odległość biegunowa wynosi 2 m., w skali długości lub 200 kg. w skali sił.

48. Wyznaczenie MOMENTU STATYCZNEGO ILUKOLWIEK SIŁ PRZY POMOCY WIELOBOKU, SZNUROWEGO.

Przypuśćmy, że mamy np. trzy siły  $S_1, S_2, S_3$ , chodzi nam o znalezienie ich momentu statycznego względem

dowolnego punktu  $O$   
/rys.47/.



W tym celu zastępujemy dany układ sił ich wypadkową  $R$ , a znalazłszy ją przy pomocy wieloboku

sił i sznurowego, a następnie, opierając się na twierdzeniu, dowiedzionem w § 43, wyznaczamy moment statyczny tej wypadkowej względem  $O$ .

Należy więc przez  $O$  poprowadzić prostą odcinków

równoległe do  $R$  i znaleźć punkty przecięcia się jej z bokami przed i za siłą  $R$  /t.j. z bokami 1 i 4/; otrzymamy odcinek  $\overline{m, m_2}$ ; następnie obliczamy moment statyczny sił, jako iloczyn  $\overline{m, m_2} \cdot \omega$ ; lub też zmierzwszy odcinek  $m, m_2$  w skali momentów, znajdziemy wartość szukanego momentu.

Zauważymy, że można się obejść bez rysowania wypadkowej w wieloboku sznurowym, wyznaczając wprost przecięcia boków skrajnych z prostą odcinków.

Znak znalezionego tym sposobem momentu określamy zapomocą prawidła, przytoczonego w § 45. Stosując je, dojdziemy łatwo do wniosku, że w rozważanym przypadku /rys.47/ moment jest ujemny /odcinek  $m, m_2$  biegnie z dołu do góry/.

Podobnie otrzymamy, że moment statyczny tego samego układu sił względem punktu  $O$ , wynosi  $\overline{n, n_2} \cdot \omega$  i posiada znak dodatni.

49. Na rys.48 widzimy zastosowanie powyższej metody do wyznaczenia MOMENTU STATYCZNEGO KILKU /czterech/ SIŁ RÓWNOLEGŁYCH  $S_1, S_2, S_3, S_4$  względem punktu  $O$ .

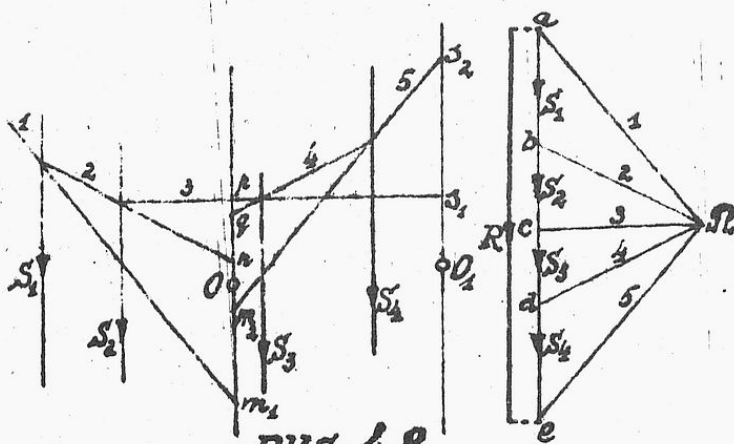
W tym razie rzecz się upraszcza, gdyż wypadkowa tych sił, a więc i prosta odcinków, jest równoległa do sił składowych.

Oznaczając momenty przecięcia się tej prostej z bokami skrajnymi wieloboku sznurowego przez  $m$ , i  $m_2$ , napi-

szemy:

$$\sum_{i=1}^{i=4} M_0 S_i = - \overline{m, m_2} \cdot \omega \dots\dots\dots (1)$$





RYS 48.

Wynik ten łatwo  
sprawdzić bezpo-  
średnio, wyznacza-  
jąc moment sta-  
tyczny każdej si-  
ły z osobna i na-  
stępnie dodając

te momenty algebraicznie.

Istotnie:  $M_0 S_1 = -\bar{m}_1 n \cdot \omega;$

$$M_0 S_2 = -\bar{n} \bar{\rho} \cdot \omega;$$

$$M_0 S_3 = +\bar{\rho} \bar{q} \cdot \omega;$$

$$M_0 S_4 = +q \cdot \bar{m}_2 \cdot \omega;$$

Dodając te równości i biorąc pod uwagę, że  $-\bar{m}_1 n - \bar{n} \bar{\rho} + \bar{\rho} \bar{q} + q \bar{m}_2 = -\bar{m}_1 \bar{m}_2$  otrzymamy wzór /1/.

Za pomocą wykreślonego już wieloboku sznurowego można wyznaczyć również momenty statyczne grupy pewnego <sup>ych</sup> cił z danego układu, byleby siły tej grupy następowały w wieloboku sił bezpośrednio po sobie.

Tak więc np. łatwo znajdziemy, że

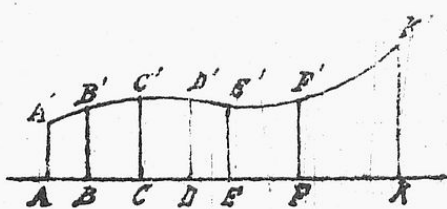
$$M_0 (S_1, S_2) = -\bar{m}_1 \bar{\rho} \cdot \omega$$

gdzie  $\bar{m}_1 \bar{\rho}$  oznacza odcinek, znajdujący się na prostej odcinków pomiędzy punktami jej przecięcia się z bokami: przed siłą  $S_1$  /bok 1/ i za siłą  $S_2$  /bok 3/.

Zupełnie tak samo otrzymamy względem punktu  $O_1$ , np.:

$$M_{O_1} (S_3, S_4) = -\bar{s}_1 \bar{s}_2 \cdot \omega; \quad \text{i t.d.}$$

50. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE. Dotychczas mieliśmy do czynienia jedynie z SIŁAMI SKUPIONEMI, to jest takimi, które mają pewną skończoną wartość i są przyłożone do określonych punktów danego ciała. Rozważymy teraz przypadek gdy na ciało działają SIŁY CIĄGŁE, zmieniające się od punktu do punktu. Będzie to, naprz. obciążenie warstwą kamieni lub piasku, nasypanego w sposób dowolny lub obciążenie tłumem ludzi, ustawionych na podłodze, spoczywającej na belce.



RYS. 49.

Przypuśćmy więc, że mamy belkę  $AK$  /rys.49/, obciążoną w sposób CIĄGŁY. Na dowolnie obraną część belki obciążonej przypadnie odpowiednia część ciężaru całkowitego.

Weźmy, dajmy na to, część belki  $CD$  o długości  $\Delta l$ ; przypuśćmy, że na tę długość przypada ciężar  $\Delta P$ ; wtedy stosunek

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = \mu_0$$

wskaże nam ŚREDNIE OBCIĄŻENIE BELKI na jej części między  $C$  i  $D$ , przypadające na JEDNOSTKĘ jej długości.

Wartość tego ŚREDNIEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTKOWEGO dla obranego miejsca na belce zależy będzie od długości  $\Delta l$ . Aby uniezależnić wartość  $\mu_0$  od długości  $\Delta l$  przyjmijmy, że długość  $\Delta l$ , mierzona od punktu  $C$ , m

leje, dążąc do zera; wówczas otrzymamy:

$$\lim_{(x \rightarrow a)} \frac{\Delta P}{\Delta l} = \frac{dP}{dl} = p;$$

będzie to OBCIĄŻENIE JEDNOSTKOWE W DANYM PUNKCIE C;

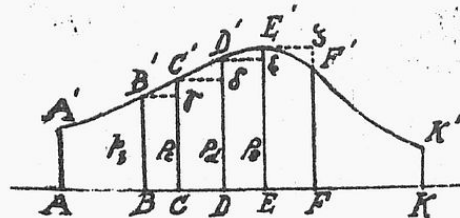
oznaczymy je przez  $p$ . Przypuśćmy, że w sposób podobny obliczyliśmy obciążenia jednostkowe we wszystkich punktach obciążonej belki. Obrawszy, następnie, odpowiednią SKALĘ OBCIĄŻEŃ JEDNOSTKOWYCH, wystawiamy w punktach  $A, B, C, \dots$  belki prostopadłe do niej i na tych prostopadłych odkładamy odcinki  $AA', BB', CC', DD'$  i t.d., równe obciążeniom jednostkowym, znalezionym dla każdego punktu belki.

Jeżeli końce tych odcinków połączymy linią ciągłą, otrzymamy poglądowe przedstawienie rozkładu obciążeń jednostkowych wzdłuż belki. Linję  $A'B'C' \dots$ , która w ogólnym przypadku będzie linią krzywą, nazywać będziemy KRZYWĄ OBCIĄŻEŃ.

Obciążenie jednostkowe mierzyć będziemy najczęściej w kilogramach na metr bieżący belki /kg./m./.

Mając krzywą obciążeń daną, łatwo jest obliczyć z niej siłę, przypadającą na dowolną część belki, względnie na całą belkę.

Przyjmijmy, że mamy znaleźć siłę, działającą na część  $BF$  belki /rys.50/. Podzielmy długość  $BF$  na dostatecznie małe części:  $BC, CD, DE$  i  $EF$ . Z pewnym przybliżeniem będziemy mogli przyjąć, że na całej długości części  $BC$  przypada jednakowe OBCIĄŻENIE JED-



RYS. 50.

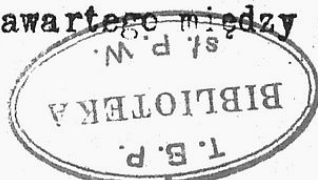
NASTĘPNE, przedstawione odcinkiem  $BB' = h_1$ ; na część  $CD$  odcinkiem  $CC' = h_2$ ; na części  $DE$  - odcinkiem  $DD' = h_3$  i t.d. Wówczas na część belki

$BC$	działać będzie siła /ciężar/	$= h_1 \cdot \overline{BC}$
$CD$	" " "	$= h_2 \cdot \overline{CD}$
$DE$	" " "	$= h_3 \cdot \overline{DE}$ i. t. d.

iloczyn $h_1 \cdot \overline{BC}$	jest to pole prostokąta $BB'C$
$h_2 \cdot \overline{CD}$	" " " " $CC'D$
" $h_3 \cdot \overline{DE}$	" " " " $DD'E$
" $h_4 \cdot \overline{EF}$	" " " " $EE'F$

Zatem siłę, działającą na część belki  $BF$  obliczymy /w przybliżeniu/ z pola, zawartego między rzędnymi krzywej obciążeń w punktach  $B$  i  $F$ , osią belki i linią schodkową  $B'C'D'E'F'$ .

Jeśli byśmy podział belki  $BF$  dokonali na bardzo wiele części o bardzo małej długości, wówczas pole nasze ograniczone będzie od góry linią schodkową, która bardziej, niż poprzednia, zbliżyć się będzie do krzywej obciążeń  $B'C'D'E'F'$ . Wyobraźmy sobie, że podział belki  $BF$  uskuteczniłszy na nieskończenie wiele części; wtedy linia schodkowa zamieni się w krzywą  $B' \dots F'$  i siłę, działającą na część belki  $BF$ , obliczymy z pola, zawartego między osią belki, rzędnymi w punktach,



ograniczających badaną część belki i krzywą obciążeń.

W podobny sposób znaleźlibyśmy siłę, działającą na część belki  $AB$ , obliczywszy pole  $AA'B'B'$ ; toż samo dla całej belki  $AK$  należałoby obliczyć pole -  $AA'B'C'D'E'F'K'K$ .

Dla tego też pole, zawarte pomiędzy osią belki, krzywą obciążeń jednostkowych i dwiema rzędnymi, ograniczającymi rozpatrywaną część belki, nazywamy **POLEM OBCIĄŻEŃ**.

Wartość pola obciążeń, w zastosowaniach praktycznych, znajdziemy z dostatecznym przybliżeniem, dzieląc pole to na takie figury, aby pole każdej z nich można było łatwo obliczyć; wówczas pole obciążeń rozbite będzie na pola trójkątów, prostokątów, odcinków koła i t.p.

Wymiary tych figur otrzymywać należy, mierząc je - w kierunku równoległym do osi belki - w skali długości, w kierunku prostopadłym do osi - w skali obciążeń jednostkowych. Wówczas pole da nam wielkość o wymiarze:

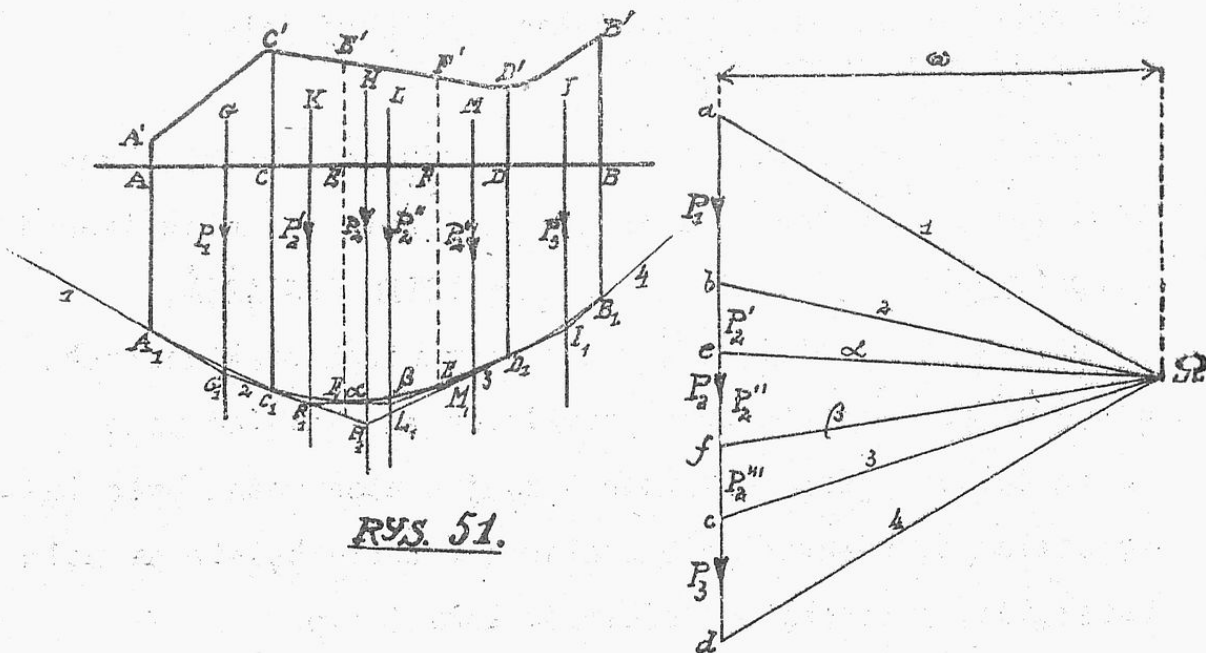
$$m \times \frac{kg}{m} = kg.$$

#### 51. WIELOBOK SZNUROWY DLA PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.

Przypuśćmy, że mamy belkę, obciążoną w sposób ciągły; pole obciążeń niech będzie  $AA'C'E'F'D'B'B$  /rys. 51/. Należy wykreślić wielobok sznurowy dla tego obciążenia.

Podzielmy pole obciążeń na kilka - w naszym przykła-





RYS. 51.

dzie na trzy części -  $AA'C'C$ ,  $CC'D'D$  i  $DD'B'B$  z których każda łatwo da się obliczyć. Wartości tych pól niech będą  $P_1, P_2, P_3$ . Wielkości wyznaczają nam siły, z którymi obciążenie ciągłe działa na poszczególne części belki  $AC$ ,  $CD$  i  $DB$ . Uważamy siły  $P_1, P_2, P_3$  jako siły skupione, które działają na poszczególne części belki i są przyłożone do środków ciężkości  $G, H, I$  poszczególnych pól wspomnianych. Dalej postępujemy jak z siłami skupionymi: kreślimy wielobok sił; obrawszy dowolny biegun  $\Omega$  prowadzimy promienie 1, 2, 3, 4; następnie wykreślamy wielobok sznurowy 1, 2, 3, 4 -  $A_1G_1H_1I_1B_1$ . W danym przypadku



wielobok sznurowy posiada tylko 4 boki, gdyż obciążenie ciągłe zastąpiliśmy trzema siłami skupionymi. Gdybyśmy chcieli otrzymać rozwiązanie /wielobok sznurowy/ bardziej dokładnie, należałoby pole obciążeń podzielić na większą liczbę części. Dajmy na to, że, dążąc w tym kierunku, jedno z pól, naprz.  $CC'DD'$  podzielimy jeszcze na kilka /trzy/ dowolnych części. W ten sposób zamiast jednej siły skupionej  $P_2$  mieć ich będziemy trzy:  $P_2', P_2'', P_2'''$ , przyłożonych w środkach ciężkości  $K, L, M$  tych mniejszych pól.

Wykreślmy teraz dla układu sił skupionych

$$P_1, \underbrace{P_2', P_2'', P_2'''}_{P_2}, P_3$$

wielobok sił i wielobok sznurowy; zauważymy wtedy, że siły  $P_2', P_2'', P_2'''$  w wieloboku sił zajmą dokładnie miejsce między  $b$  i  $c$ , ponieważ  $P_2' + P_2'' + P_2''' = P_2 = bc$ , oraz że nowe promienie  $\alpha$  i  $\beta$ , poprowadzone do końców  $P_2', P_2''$  znajdą się między promieniami 2 i 3; promień za siłą  $P_2'''$  pokrywa promień 3; wielobok sznurowy wykreślimy, pozostawiając bok 1 pierwotny; bok 2 - za siłą  $P_1$  i przed siłą  $P_2'$  - zostanie ten sam, co i pierwszej; lecz tylko dojdzie do siły  $P_2'$ , t.j. do punktu  $K_1$ , stąd pójdzie bok  $\alpha$  do siły  $P_2''$  - do punktu  $L_1$ , dalej poprowadzimy bok  $\beta$  do siły  $P_2'''$  - do punktu  $M_1$ , zaś poza siłą  $P_2'''$  i przed siłą  $P_3$  otrzymamy bok 3 - poprzedni - i dalej za  $P_3$  - bok 4 - poprzedni.

Stąd widzimy, że po zastąpieniu obciążenia ciągłego trzema siłami - wielobok sznurowy otrzymuje 4 boki;

jeśli którąkolwiek część obciążenia, zastąpioną poprzednio przez jedną siłę, podzielimy na kilka sił, otrzymany wielobok sznurowy o zwiększonej liczbie boków; NOWO PRZYBYŁE BOKI ZOSTANĄ WPISANE W PIERWOTNY WIELOBOK sznurowy. Niech podział wspomnianego pola  $CC'DD'$  będzie dokonany na znaczną liczbę części, co oznaczać będzie, że obciążenie tej części belki  $CD$  zastąpione zostanie przez znaczną liczbę mniejszych sił.

Wszystkie te siły w wieloboku sił ułożą się między punktami  $b$  i  $c$ ; promienie  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  znajdą się między promieniami 2 i 3; w wieloboku sznurowym bok 1 pozostanie bez zmiany, bok 2 pozostanie ten sam, lecz pójdzie do pierwszej siły z grupy sił, zastępujących  $P_2$  - a to będzie zaraz przy punkcie  $c_1$ , odpowiadającym punktowi  $c$ ; od tego miejsca pójdzie szereg boków  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  wpisanych w wielobok pierwotny - aż dopiero ostatni bok poza siłą ostatnią z grupy sił, zastępujących  $P_2$  - przy punkcie  $d$ , - przejdzie w bok 3 i wreszcie otrzymamy bok 4 na poprzednim miejscu.

Jeśli sił, zastępujących  $P_2$  wyobrazimy sobie nieskończenie wiele, wielobok sznurowy na części między  $c_1$  i

$d$ , zamieni się w KRZYWĄ SZNUROWĄ. Krzywa ta, jak wynika to z poprzedniego rozumowania, posiada pierwszy element w punkcie  $c_1$  /jako bok przed siłami grupy  $P_2$  / wspólny z bokiem 2, zaś ostatni element - jako bok poza siłami grupy  $P_2$  - wspólny z bokiem 3. Innymi słowy, krzywa



sznurowa jest wpisana w pierwotny wielobok sznurowy, przytem w punktach  $C$  i  $D$ , - w punktach odpowiadających początkowi i końcowi badanego obciążenia ciągłego - krzywa ta jest styczną do odpowiednich boków pierwotnego wieloboku sznurowego. Krzywa sznurowa dla części belki  $CD$  będzie styczną do boków  $\alpha$  i  $\beta$  w punktach  $E$  i  $F$ , odpowiadających podziałowi obciążenia.

Jeżeli poprzednie rozumowanie zastosujemy do pierwszego pola  $AA'CC'$ , to dla obciążenia ciągłego części belki  $AC$  wielobok sznurowy otrzyma się jako krzywa wpisana w wielobok 1,2, krzywa ta będzie styczną do boków 1 i 2 w punktach  $A$  i  $C$ .

Tak samo dla trzeciej części belki  $DB$ , obciążonej w sposób ciągły, otrzymamy krzywą sznurową wpisana w wielobok 3,4, przyczem krzywa ta w punktach  $D$  i  $B$ , będzie styczną do boków 3 i 4.

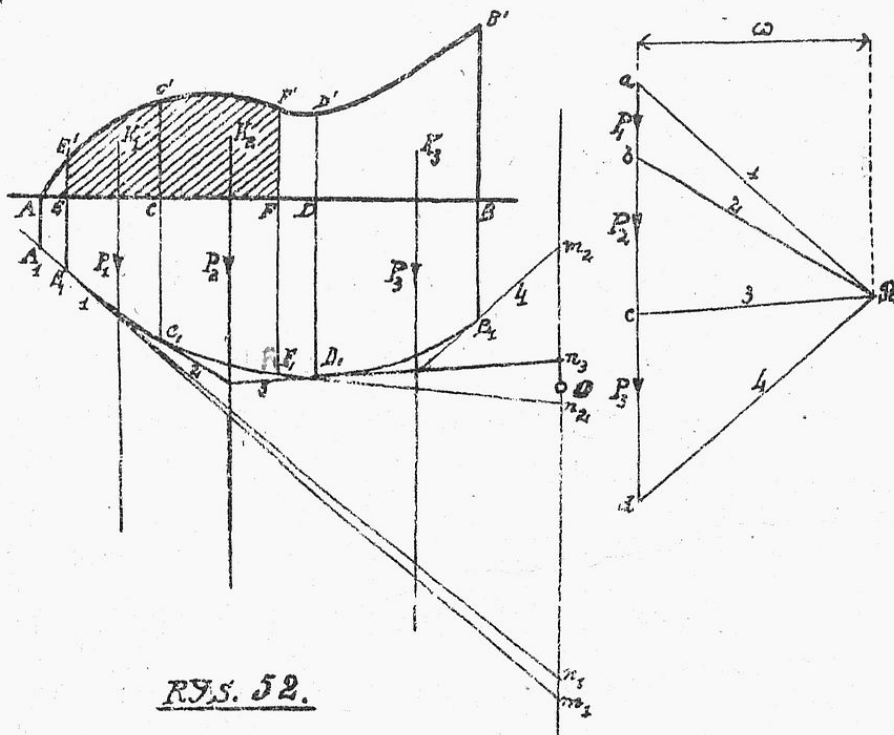
Stąd otrzymujemy następujące prawidło do wykreślenia krzywej sznurowej dla dowolnego obciążenia ciągłego:

- a/ pole obciążeń dzielimy na kilka części dogodnych do obliczenia; w środku ciężkości każdej części przykładamy skupione siły zastępcze, równe odpowiednim ciężarom;
- b/ wykreślamy wielobok sił dla zastępczych sił skupionych;
- c/ wykreślamy dla tych sił wielobok sznurowy;
- d/ wykreślamy krzywą sznurową, wpisując ją w otrzy-

ny wielobok sznurowy, przyczem korzystamy z tego, że krzywa szukana powinna być styczną do boków wieloboku sznurowego w tych punktach, które odpowiadają linjom podziału pola obciążeń.

Jeśli zachodzi obawa, że przy zadaniem dowolnem pola obciążeń niektóre części krzywej sznurowej mogą nie dać się dostatecznie dokładnie wykreślić, należy odpowiednio części pola obciążeń podzielić na większą liczbę drobniejszych pól.

## 52. MOMENT STATYCZNY W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO.



Niech belka  $AB$  będzie obciążona w sposób ciągły. Pole obciążeń niech będzie dane  $AC'D'B'B$  /rys.52/. Mamy znaleźć moment

statyczny dowolnej części obciążenia belki względem jakiegokolwiek punktu  $O$ .

Przypuśćmy, że sposobem wskazanym w poprzednim /51/ paragrafie, po podzieleniu obciążenia na 3 części / $AC'C, CC'DD, DD'B'B$ / znaleźliśmy wielobok sznurowy 1,2,3,4, poczem w ten wielobok wpisaliśmy krzywą, która, zgodnie z poprzednim, jest styczną w punktach  $A, C, D, B$ , do boków 1,2,3,4 wieloboku sznurowego.

Zauważmy, że wykreślona krzywa sznurowa powinna być uważana, co wynika z poprzedniego, jako wielobok sznurowy o nieskończenie wielkiej liczbie boków.

Niech będzie żądane znaleźć moment statyczny względem punktu  $O$  sił, działających na belkę na długości od  $E$  do  $F$ . Postępujemy w tym celu zgodnie z prawidłem, wyjaśnionym w paragrafie 49. Przez punkt  $O$  prowadzimy PROSTĄ ODCINKÓW; następnie odnajdujemy boki "przed" i "za" siłami, działającymi na belkę  $EF$ . W punkcie  $E$  - spotykamy na krzywej sznurowej element jej, który jest właściwym bokiem "przed" i w punkcie  $F$  - element, który jest bokiem "za" siłami. Przedłużamy boki "przed" i "za" siłami do spotkania się z prostą odcinków. Przedłużenia tych elementów - boków - będą to styczne do krzywej sznurowej w punktach  $E$  i  $F$ .

Styczna w  $E$ , spotyka prostą odcinków w punkcie  $n_1$ , zaś styczna w  $F$ , przecina prostą odcinków w p.  $n_2$ . Stąd: mom. stat. sił na dł.  $EF$  względem  $O$  = -  $n_1 n_2 \cdot \omega$  gdzie  $\omega$  = odległości biegunowej, a znak  $-$  wskazuje, że moment będzie ujemnym, gdyż odcinek  $n_1 n_2$  idzie z



dołu do góry. Jeśli mamy wykreśloną skalę momentów, to, mierząc w tej skali odcinek  $n, n_2$ , znajdziemy odrazu wartości momentu.

W podobny sposób należy postępować przy szukaniu momentu statycznego względem zadanego punktu dla tej czy innej części obciążonej belki.

Gdyby, wypadkowo, chodziło o znalezienie momentu statycznego dla tej części obciążenia, która przy pierwotnym podziale, przyjęta była za odrębną część, wówczas nie ma potrzeby nawet wykreślania krzywej sznurowej: wystarczy zadowolnić się pierwotnym wielobokiem sznurowym.

Naprz. niech będzie potrzeba znalezienia momentu statycznego względem p.  $O$  dla części obciążenia belki od  $A$  do  $D$ . Wówczas "przed" siłami okaże się bok 1, zaś "za" siłami bok 3 i szukany moment statyczny =

$$= - \overline{m_1 n_3} \cdot \omega$$

Tak samo postępowalibyśmy, gdyby była potrzeba znalezienia momentu statycznego względem poprzedniego punktu dla całego obciążenia belki od  $A$  do  $B$ . Moment wtedy będzie =

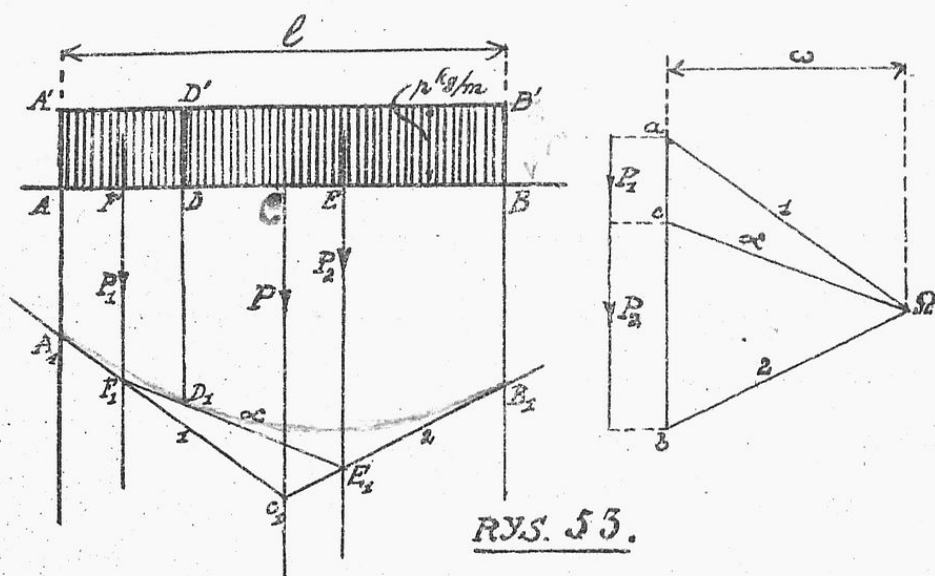
$$= - \overline{m_1 m_2} \cdot \omega$$

53. OBCIĄŻENIE CIĄGŁE JEDNOSTAJNE. Zbadamy teraz szczególny przypadek obciążenia ciągłego, gdy obciążenie to jest jednostajne. Krzywa obciążeń  $A'B'$  staje się prostą równoległą do osi belki /rys.53/.

Aby wyznaczyć kształt linii sznurowej, odpowiadają-



cej temu przypadkowi, przypuśćmy naprzód, że całkowite obciążenie  $P$  jest zastąpione siłą skupioną, przyłożoną do środka ciężkości pola obciążeń, czyli prostokąta  $AA'B'B$ . Linja działania siły  $P$  przechodzić będzie przez połowę długości obciążonej belki.



rys. 55.

Oczywiście,  $P = p \cdot l$  gdzie  $p$  oznacza stałe obciążenie jednostkowe, a  $l$  - długość belki obciążonej. Wykreślmy dla owej skupionej siły  $P$  wielobok sił oraz odpowiedni wielobok sznurowy. Promień pierwszego, a boki drugiego oznaczmy odpowiednio przez 1 i 2.

Podzielmy, następnie, obciążenie całkowite na dwie części linją podziału  $DD'$  i rozważajmy obciążenia każdej z tych części, które mogą być uważane jako siły skupione, przyłożone do odpowiednich środków ciężkości.

Budujemy nowy wielobok sznurowy dla owych sił zastępczych; które oznaczamy przez  $P_1$  i  $P_2$ .

Wielobok utworzony będzie z trzech boków, z których dwa skrajne /przed siłą  $P_1$  i za siłą  $P_2$ / będą temi samymi bokami 1 i 2, co poprzednio, zaś bok środkowy  $\alpha$  połączy punkty przecięcia linii działania sił  $P_1$  i  $P_2$  z owymi bokami skrajnymi.

Z rozważań paragr. 51 wiemy, że krzywa sznurowa, której szukamy, posiada tę własność, że jest styczna do nowego wieloboku sznurowego w punktach, znajdujących się na jego bokach pod linjami podziałkowemi  $AA', BB', DD'$ . Oznaczmy te punkty styczności odpowiednio przez  $A_1, B_1, D_1$ .

Przypuśćmy, że linja  $DD'$  dzieli obciążenia całkowite w stosunku  $1:n-1$ . Zatem  $AD = \frac{\ell}{n}$  i  $DB = \ell - \frac{\ell}{n} = \frac{n-1}{n} \ell$ . Dalej mamy  $AF = \frac{AD}{2} = \frac{\ell}{2n}$ ;  $DE = \frac{1}{2} DB = \frac{n-1}{2n} \ell$ .

Rozpatrzmy teraz odcinki, utworzone przez proste równoległe  $AA_1, FF_1, CC_1$ , na prostych  $AC$  i  $A_1C_1$ : między nimi zachodzi zależność następująca:

$$\frac{A_1F_1}{A_1C_1} = \frac{AF}{AC} = \frac{\ell}{2n} : \frac{\ell}{2} = \frac{1}{n};$$

skąd  $A_1F_1 = \frac{A_1C_1}{n}$ . Widzimy stąd, że punkt  $F_1$  dzieli odcinek  $A_1C_1$  na dwie części w stosunku  $\frac{1}{n-1}$ , t.j. w takim samym, w jakim linja  $DD'$  dzieli pole  $AA'B'B$ .

Analogicznie znajdziemy:

$$\frac{C_1E_1}{C_1B_1} = \frac{CE}{CB} = \frac{AF}{AC} = \frac{1}{n} \quad \text{x/}$$

x/ Ponieważ  $AD = AB - DB$

$$\text{i następnie } \frac{AD}{2} = \frac{AB}{2} - \frac{DB}{2}$$

$$AF = BC - EB = CE$$

skąd  $C, E_1 = \frac{C, B_1}{2}$ . Zatem również i punkt  $E_1$ , dzieli odcinek  $C, B_1$  boku 2 na dwie części w tym samym stosunku:  $\frac{1}{2}$

Wreszcie otrzymamy z łatwością, że

$$\frac{F, D_1}{F, E_1} = \frac{FD_1}{FE_1} = \frac{AF}{AC} = \frac{\ell}{2\ell} : \frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}$$

czyli że punkt styczności  $D_1$  boku  $\alpha$  z krzywą sznurową dzieli ten bok również w stosunku  $\frac{1}{2}$ .

Reasumując wszystkie wyprowadzone tu wnioski, powiemy, że

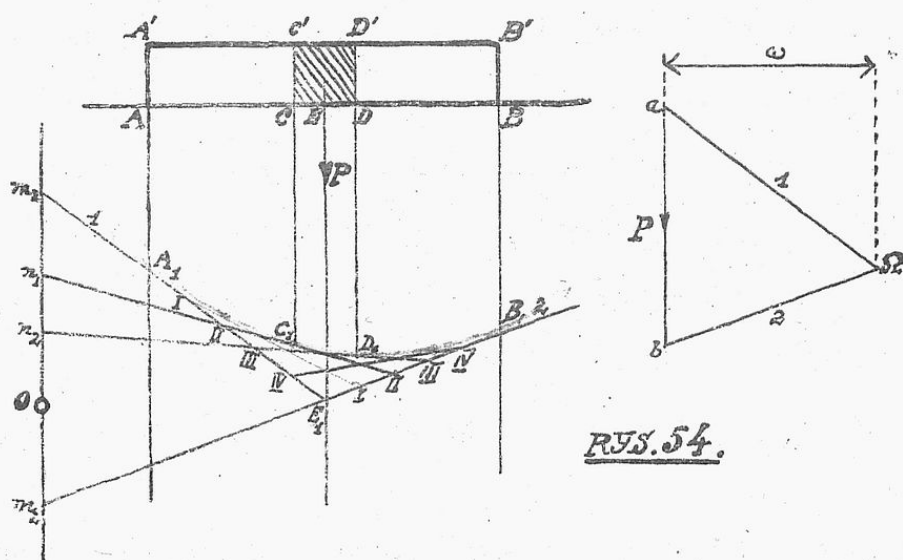
DOWOLNA STYCZNA  $\alpha$  DO KRZYWEJ SZNUROWEJ, ODPOWIADAJĄCEJ OBCIĄŻENIU CIĄGŁEMU I JEDNOSTAJNEMU, DZIELI KAŻDĄ Z DWUCH INNYCH STYCZNYCH W JEDNAKOWYM STOSUNKU.

W TAKIM SAMYM STOSUNKU NOWA STYCZNA DZIELI SIĘ W JEJ PUNKCIE STYCZNOŚCI Z KRZYWĄ SZNUROWĄ.

Z geometrii analitycznej oraz rzutowej wiadomo, że takie własności posiada jedynie krzywa, zwana PARABOLĄ. Z tego więc wynika, że KRZYWĄ SZNUROWĄ W PRZYPADKU OBCIĄŻENIA CIĄGŁEGO I JEDNOSTAJNEGO JEST PARABOLA.

54. Otrzymane poprzednie własności krzywej sznurowej paraboli pozwalają jednocześnie wykreślać ją w sposób nadzwyczaj prosty /rys. 54/.

Wystarczy w tym celu wykreślić wielobok sznurowy dla siły skupionej  $P$ , zastępującej całkowite obciążenie  $AA'B'B$  i każdy z dwóch boków tego wieloboku, a więc  $A, E_1$  i  $E_1, B_1$  podzielić na jednakową liczbę



RYS. 54.

części. Punkty podziału na stycznej  $A, E$ , i oddzielnie na  $E, B$ , numerujemy kolejne, poczynając od  $A$ , i  $E$ . Następnie łączymy ze sobą punkty, zaopatrzone w jednakowe numery, i w ten sposób otrzymamy szereg prostych, których obwiednią jest właśnie szukana parabola<sup>x/</sup>.

55. Gdy już mamy wykreśloną parabolę, jako krzywą sznurową dla jednostajnego obciążenia ciągłego, z łatwością możemy wyznaczyć momenty statyczne danego obciążenia lub jego części względem dowolnych punktów.

<sup>x/</sup> UWAGA PRAKTYCZNA. Mając dostateczną liczbę stycznych do paraboli, niema już potrzeby jej wykreślać, bo styczne te zarysują parabolę dość dokładnie. Wykreślanie paraboli jest nawet niepożądane, bo poza tem, że zabiera dużo czasu, prawdopodobieństwo niedokładności będzie większe niż wtedy, gdy poprzestajemy tylko na stycznych.

Tak więc np. /rys.54/ moment statyczny obciążenia belki na dłuę.  $AB$  wzgl. punktu  $O = M_o (\sum P)_{AB} = m_1 m_2 \cdot \omega$ , podobnież:  $M_o (\sum P)_{CD} = n_1 n_2 \cdot \omega$  ; odcinki  $m_1, m_2$  i  $n_1, n_2$  są wyznaczone na prostej odcinków przez styczne do paraboli w punktach, odpowiadających linjom podziału pola  $AA'B'B$  . Obydwa momenty w danym przypadku są dodatnie.

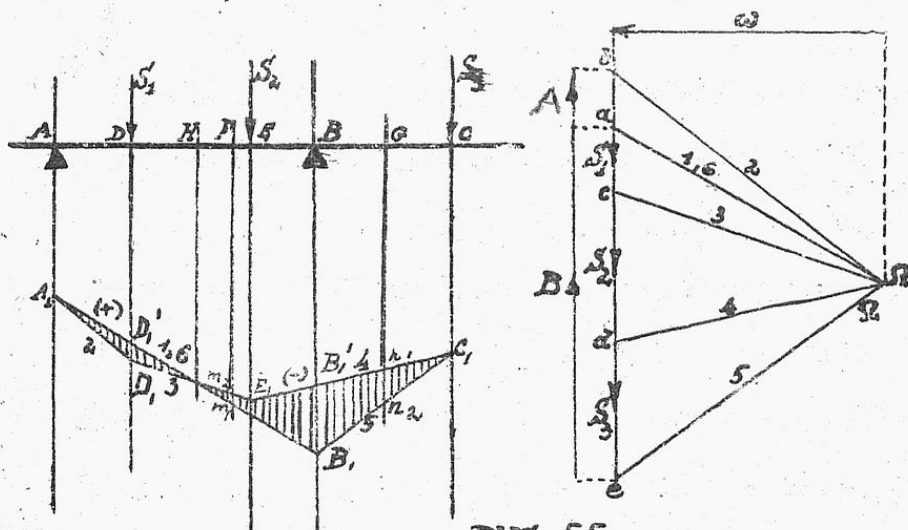
## ROZDZIAŁ IV.

### BELKA PROSTA NA DWUCH PODPORACH.

#### A. OBCIĄŻENIE BEZPOŚREDNIE.

#### 56. OKREŚLENIE ODPORÓW.

Wyobraźmy sobie belkę prostą, opartą na dwóch podporach  $A$  i  $B$  i obciążoną pionowymi siłami skupionymi  $S_1, S_2, S_3$  /rys.55/.



RYŚ. 55.

Podpory  $A$  i  $B$  wywołują odpory, których kierunki mogą być, wogóle, różnoredne. Jeśli

jednak przypuścimy, że jedna z podpor, dajmy na to  $A$