

chaotyczny, każdy inaczej rzecz traktował.

Dopiero w w.XIX Culmann zebrał prace swych poprzedników, usystematyzował i powiązał je; można powiedzieć, że on właśnie stworzył statykę wykreślną, jako odrębną naukę. Stąd nazwa "ojca statyki wykreślnej", słusznie mu się należy.

Po ukazaniu się dzieła Culmanna rozwój statyki wykreślnej nabiera szybkiego tempa. Wymienimy tu tylko nazwiska Mohr'a, Winklera, Maxwella, Cremony, Müllera-Breslau, którzy, poza wielu innymi, do rozwoju tej gałęzi wiedzy znacznie się przyczynili.

Zauważmy wreszcie, że rozwój statyki wykreślnej był jedną z pobudek do stworzenia w drugiej połowie zeszłego stulecia nowej nauki - rachunku kwaternionowego, lub wektorowego.

ROZDZIAŁ I.

SKŁADANIE I ROZKŁADANIE SIŁ DO JEDNEGO PUNKTU PRZYŁOŻENIA.

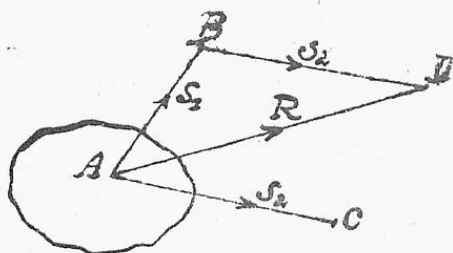
8. SKŁADANIE SIŁ. WARUNKI RÓWNOWAGI. Gdy na dowolny punkt ciała działają dwie siły, to umiemy już na zasadzie metody równoległoboku /rys.6/ wyznaczać ich wypadkową.

Wskazaną wyżej konstrukcję można uprościć, zważywszy, że do końca D siły wypadkowej R można także dojść, prowadząc z punktu B jako z początku, odcinek BD , równy i równoległy do siły S_2 ; koniec tego odcinka jest punktem szukanym. Widzimy więc, że można się obejść bez

przewodzenia linii CD , poprzestając na zbudowaniu TRÓJKĄTA SIŁ.

W tym samym celu możnaby skorzystać również z trójkąta ACD .

Z powyższego wynika następujące pravidło: Aby znaleźć wypadkową dwóch sił S_1 i S_2 , przyłożonych do ciała w punkcie A , należy wykreślić siłę S_1 , z końca jej wykreślić siłę S_2 , równą, równoległą i posiadającą zadany lot; punkt D - koniec siły S_2 będzie końcem wypadkowej R ; początkiem jej zaś będzie punkt A .

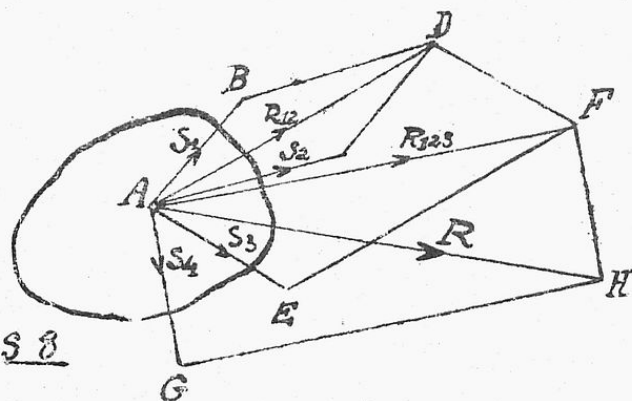


RYS. 7.

Podkreślamy: W obiegu wzdłuż boków trójkąta ABD LOT WYPADKOWEJ ZNAJDUJEMY PRZECIWNY LOTOWI SIŁ S_1 i S_2 .

Podobnie, przenosząc równoległe siłę S_2 tak, aby początek jej przypadł w końcu siły S_1 , dojdziemy do tego samego wyniku, co poprzednio.

Przejdziemy teraz do przypadku, gdy na ciało działa więcej sił, niż dwie, przyczem posiadają one wspólny



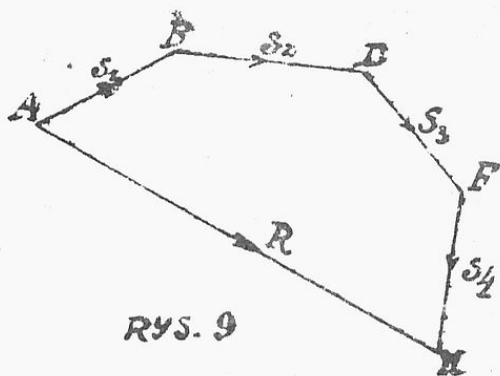
rys 8

punkt przyłożenia A /rys.8/ i są położone w płaszczyźnie rysunku.

Przypuśćmy, dla przykładu, że działają 4 takie siły; oznaczmy je przez S_1, S_2, S_3, S_4

Aby znaleźć ich wypadkową postępujemy w sposób taki:
Na zasadzie równoległoboku sił wyznaczamy wypadkową R_{12} składowych S_1 i S_2 ; następnie, budując równoległobok, o bokach równych R_{12} i S_3 otrzymamy, jako przekątną AF , wypadkową R_{123} sił R_{12} i S_3 /albo też sił $S_1, S_2, S_3/$. Postępując podobnie z R_{123} i S_4 otrzymamy wreszcie wypadkową $AH=R$ danego układu sił.

Zauważymy, że można dojść do tej samej wypadkowej, nie kreśląc wcale linii CD, AD, AF, EF i GH ; mianowicie odcinki BD, DF, FH są odpowiednio równe, równoległe do składowych sił: S_2, S_3, S_4 . Jeżeli



RYS. 9

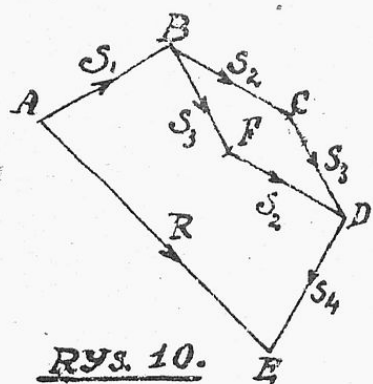
tym odcinkom nadamy lot, właściwy siłom, otrzymamy możliwość znalezienia punktu H bez uciekania się do budowy szeregu równoległoboków; będziemy mogli wypadkową tę wyznaczyć na rysunku

pomocniczym, a następnie przenieść ją równolegle tak, aby początek jej przypadł w punkcie A . Taki rysunek pomocniczy, przedstawiony na rys.9, nazywamy WIELOBOKIEM SIŁ.

Z poprzedniego wyniku następujące prawidło: Aby wyznaczyć wypadkową sił S_1, S_2, S_3, \dots działających na ciało w punkcie A , obieramy w płaszczyźnie rysunku dowolny punkt A ; prowadzimy z niego odcinek równy, równoległy do siły S_1 ; nadajemy mu lot taki, jaki posiada ta siła

z końca tego odcinka prowadzimy odcinek, wyrażający co do kierunku, wartości i lotu siłę \mathcal{S}_2 i t.d. Postępując tak samo ze wszystkimi pozostałymi siłami układu otrzymamy wielobok sił. Jeżeli połączymy początek pierwszego boku z końcem ostatniego, wykreślimy t.zw. bok zamykający, który da nam szukaną wypadkową co do kierunku i wartości - lot zaś siły wypadkowej trzeba przyjmować: od początku pierwszego do końca ostatniego boku.

10. Łatwo dowieść, że PORZĄDEK DODAWANIA SIŁ NIE WPŁYWA NA WYNIK.



Rys. 10.

Istotnie, przypuśćmy, że R jest wypadkową sił $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$ /rys.10/, dodawanych w wymienionym porządku. Dodajmy teraz w innym porządku np. $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4$. Zmieni się skutek tego tylko to, że zamiast wieloboku $ABCDE$

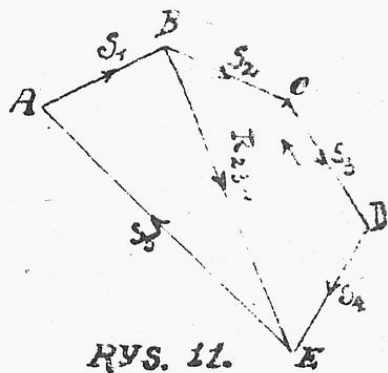
który mieliśmy poprzednio, otrzymamy wielobok $ABFDE$. Oczywiście jest, że ta zmiana nie wpłynie wcale na wypadkową. Tworząc inne przestawienia sił, otrzymamy zawsze ten sam wynik, co świadczy o słuszności twierdzenia, o które chodzi.

11. Przy dodawaniu sił przy pomocy wieloboku może zdarzyć się tak, że koniec ostatniego boku wieloboku sił zbiegnie się z początkiem boku pierwszego: w tym razie wypadkowa całego układu sił będzie równa zero, wówczas

układ sił będzie w równowadze. Możemy powiedzieć inaczej, że UKŁAD SIŁ PRZYŁOŻONYCH DO JEDNEGO PUNKTU I DZIAŁAJĄCYCH W JEDNEJ PŁASZCZYŹNIE BĘDZIE W RÓWNOWADZE, JEŚLI WIELOBOK SIŁ BĘDZIE SAM PRZEZ SIĘ ZAMKNIĘTY.

12. Na zasadzie poprzedniego można rozwiązać zagadnienie takie: jaką siłę trzeba dodać do danego układu sił S_1, S_2, S_3, S_4 /rys.8 i 9/, aby zachodziła równowaga? Jest rzeczą jasną, że ta siła szukana musi zrównoważyć wypadkową danych sił, a więc będzie nią siła, przyłożona w punkcie A , równa co do wartości i kierunku wypadkowej R , lecz posiadająca lot odwrotny, niż ta ostatnia.

13. Wskażemy jeszcze inną własność wieloboku zamkniętego.



Przypuśćmy więc, że siły S_1, S_2, S_3, S_4 /rys.11/ przyłożone do jednego punktu, tworzą wielobok zamknięty, a więc równoważą się. Gdy zmienimy lot którejkolwiek z sił wieloboku, to będziemy mogli uważać,

że ta siła odwrócona jest wypadkową wszystkich sił pozostałych, jak to wynika bezpośrednio z rozważań poprzedzających. Tak więc np. odwróconą siłę S_5 można traktować, jako wypadkową sił S_1, S_2, S_3, S_4 .

14. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że każdą przekątną

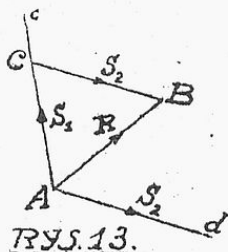
z $AB=R$ tworzą trójkąt i mają stosowne loty.

Widzimy, że odpowiedzi mamy bardzo wiele, gdyż trójkątów takich, jak ABC, ABD, ABE i t.d. możemy wykreślić bez liku.

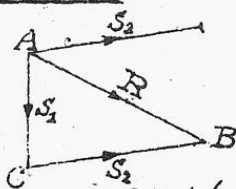
Podamy kilka /z bardzo wielu/ przykładów, w których będziemy mieli pewne ograniczenia w rozkładzie:

a/ Dajmy na to, że dana jest siła R , przyłożona w punkcie A /rys.13/ i że trzeba ją rozłożyć na dwie składowe, których linje działania c i d są dane.

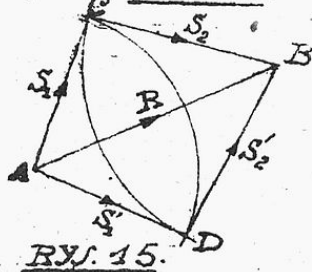
W tym celu, mając wykreśloną prostą c z końca B siły R prowadzimy równoległą do linji d ; w przecięciu z prostą c otrzymamy punkt C . Odcinek AC z lotem od A do C i odcinek CB z lotem od C do B wyrażają szukane składowe S_1 i S_2 .



RYS. 13.



RYS. 14.



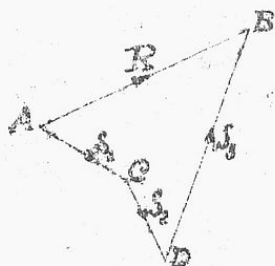
RYS. 15.

b/ Przypuśćmy teraz, że dana jest siła $R=AB$ i jedna ze składowych np. $S_1=AC$ /rys.14/. Oczywiście druga składowa S_2 jest określona pod względem wartości i kierunku odcinkiem CB ; lot posiada od C do B .

c/ Załóżmy, wreszcie, że dana jest siła $R=AB$ i dane są wartości obydwu składowych, mianowicie S_1 i S_2 /rys.15/. Aby znaleźć

ich kierunki i loty, zataczamy z punktów A i B łuki promieniami, równymi odpowiednio S_1 i S_2 . Łuki te przecinają się w dwóch punktach C i D . Łącząc je z punktem A i B , otrzymamy dwie odpowiedzi, czyniące zadość naszemu warunkowi. Jedną stanowią siły, przedstawione odcinkami AC i CB , drugą - AD i BD .

Gdy chodzi o rozkład jednej siły na większą liczbę składowych, to mamy jeszcze większą dowolność, niż



rys. 16.

poprzednio, i trzeba mieć jeszcze więcej warunków, ograniczających tę dowolność, jeśli zadanie ma być określone. Tak więc np.

gdy mamy rozłożyć siłę $R = AB$ /rys.16/ na trzy składowe, to

możemy za takie uważać dowolne

trzy siły, przedstawione odcinkami, tworzącymi wielobok, w którym AB jest bokiem zamykającym.

19. WARUNEK ANALITYCZNY RÓWNOWAGI SIŁ DO JEDNEGO

PUNKTU PRZYŁOŻONYCH. Przypuśćmy, że do punktu A /rys.17/

są przyłożone 4 siły: S_1, S_2, S_3, S_4 . Znanym sposobem

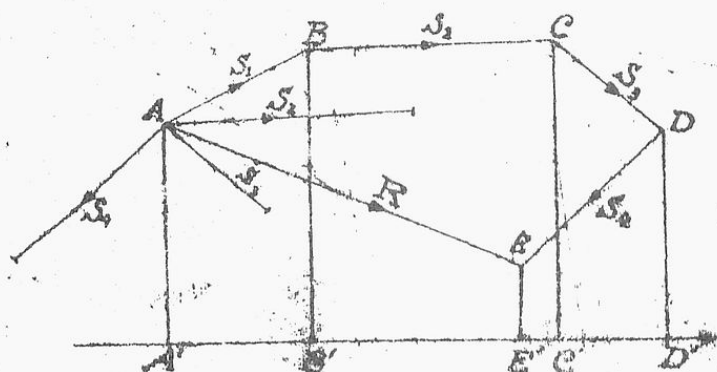
wieloboku sił wyznaczmy ich wypadkową R . Obierzmy

następnie w przestrzeni dowolną oś i pewien kierunek

(na rys. jest on oznaczony

wektorem).

Wykonajmy teraz rzut całego wieloboku na tę oś.

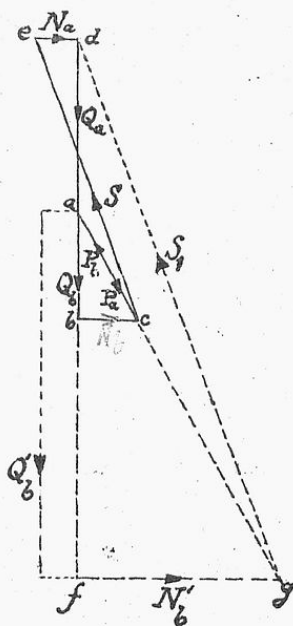
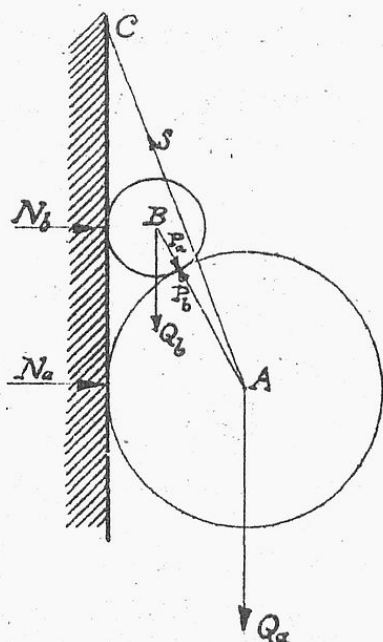


RYS. 17.

Rzutem siły S_1 będzie odcinek $A'B'$, a rzuty pozostałych sił wyniosą kolejno $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, przyozem pierwsze trzy z tych rzutów są dodatnie, ostatni jest ujemny. W re-

zultacie można powiedzieć, że rzutem wieloboku $ABCDE$ jest odcinek $A'E'$. Bezpośrednio z rys. widać, że rzut boku zamykającego $AE=R$ też jest równy $A'E'$; z tego wynika twierdzenie następujące: SUMA RZUTÓW POSZCZEGÓLNYCH BOKÓW WIELOBOKU SIĘ NA DOWOLNA OŚ JEST RÓWNA RZUTOWI BOKU ZAMYKAJĄCEGO. Gdy wielobok się jest zamknięty, wówczas bok zamykający jest równy zero i rzut jego na każdą oś równa się zero. Z tego widać, że GDY UKŁAD SIŁ PRZYŁOŻONYCH DO JEDNEGO PUNKTU CIAŁA JEST W RÓWNOWADZE, TO SUMA RZUTÓW SIŁ TAKIEGO UKŁADU NA KAŻDĄ OŚ JEST RÓWNA ZERU.

19. PRZYKŁAD. Kula A , o ciężarze Q opiera się o gładką ścianę i jest przywiązana za pomocą linki do ściany w punkcie C . Na kulę tę kładziemy inną kulę B , o ciężarze Q_1 . Obydwie kule są gładkie. Wyznaczyć siłę w linie, oddziaływania ściany na każdą z kul, oddziaływania kul na siebie oraz znaleźć, jaki powinien



RYS. 18.

być ciężar
kuli B ,
aby oddzia-
ływanie
ściany na
kulę A by-
ło równe
zeru
/rys. 18/.
Oznaczmy
szukane
oddziały-

wanie ściany odpowiednio przez N_a i N_b , oddziaływa-
nie kuli B na kulę A przez P_a , wreszcie oddziaływanie
 A na B przez P_b .

Oczywiście dwie pierwsze z tych sił są normalne do
ściany, bo ściana jest gładka, dwie pozostałe mają kie-
runek linii środków, są równe i posiadają loty przeciw-
ne.

Rozpatrzmy naprzód kulę B . Ponieważ ma ona być
w równowadze, więc siły Q_b , P_b i N_b na nią działające,
winny tworzyć wielobok zamknięty. Wielobok ten wykreśli-
my na rysunku pomocniczym, rysując naprzód odcinek ab
przedstawiający co do wartości, kierunku i lotu ciężar

Q_b , prowadząc następnie z punktu a równoległą do
linii środków kul, a z punktu b równoległą do kierunku

oddziaływania N_b . W przecięciu otrzymamy punkt c ; wówczas odcinki bc i ca przedstawiać będą co do wartości szukane siły N_b i P_b . Loty ich otrzymamy łatwo, zważywszy, że powinny one być we wspólnym obiegu z lotem siły Q_b .

Rozpatrujemy w dalszym ciągu siły, działające na kulę A . Są niemi: ciężar Q_a , oddziaływania N_a i P_a oraz siła w lince S . Siły te tworzą również wielobok zamknięty, gdyż i kula A jest w równowadze.

Aby wielobok ten otrzymać, rozpoczynamy od wykreślenia odcinka da , wyobrażającego siłę Q_a ; z początku jej d prowadzimy równoległą do kierunku oddziaływania N_a , z końca a mamy wykreślony już odcinek ac , przedstawiający oddziaływanie $P_a = P_b$; lot P_a będzie od a do c . Z końca P_a / z punktu c / prowadzimy linię równoległą do kierunku siły S .

W przecięciu linii sił N_a i S znajdziemy punkt e i wówczas $ce = S$ i $ed = N_a$. Loty sił Q_a, P_a, S, N_a powinny być we wspólnym obiegu.

Aby odpowiedzieć na ostatnie z postawionych pytań, zauważmy, że N_a będzie zerem, gdy siły Q_a, S i P_a utworzą trójkąt, kiedy e upadnie na d ; wówczas $Q'_b = af$, zaś $S'_b = gd$ i $P'_a = ag, N'_b = fg$. Przy Q'_b większem niż af , N_a będzie skierowane ku ścianie, a więc kulę A trzeba będzie dociskać do ściany.