

Tak więc np. /rys.54/ moment statyczny obciążenia belki na dłuę. AB wzgl. punktu $O = M_o (\sum P)_{AB} = m, m_2 \cdot \omega$, podobnież: $M_o (\sum P)_{CD} = n, n_2 \cdot \omega$; odcinki m, m_2 i n, n_2 są wyznaczone na prostej odcinków przez styczne do paraboli w punktach, odpowiadających linjom podziału pola $AA'B'B$. Obydwa momenty w danym przypadku są dodatnie.

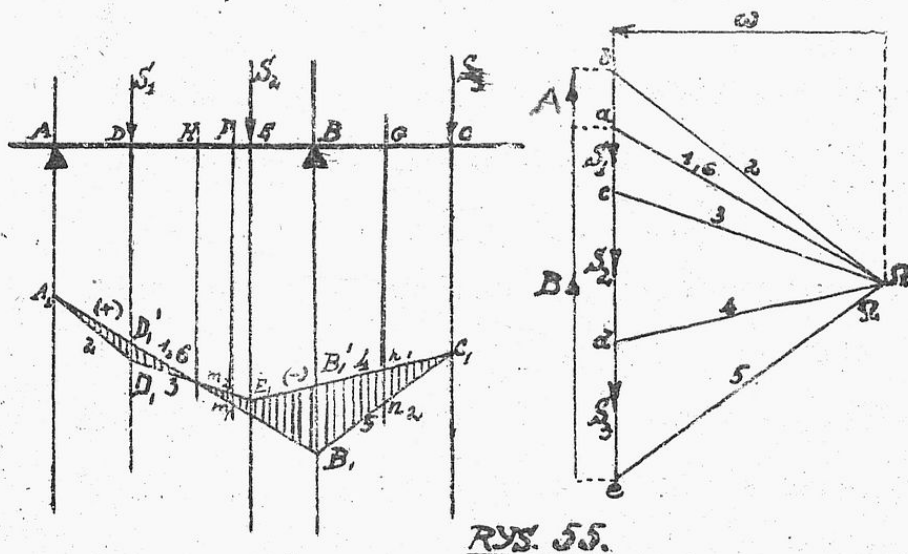
ROZDZIAŁ IV.

BELKA PROSTA NA DWUCH PODPORACH.

A. OBCIĄŻENIE BEZPOŚREDNIE.

56. OKREŚLENIE ODPORÓW.

Wyobraźmy sobie belkę prostą, opartą na dwóch podporach A i B i obciążoną pionowymi siłami skupionymi S_1, S_2, S_3 /rys.55/.



RYŚ. 55.

Podpory A i B wywołują odpory, których kierunki mogą być, wogóle, różnoredne. Jeśli

jednak przypuścimy, że jedna z podpor, dajmy na to A

stanowi jakgdyby ostrze, mogące wywierać działanie jedynie w pewnym kierunku naprz. pionowym, to również i oddziaływanie drugiej podpory będzie określone; w danym razie będzie pionowe.

Wynika to z tego, że pod wpływem sił pionowych S_1 , S_2 , S_3 albo ich wypadkowej R równoległej do nich, a więc siły pionowej oraz odporów A i B belka znajduje się w równowadze, zatem siła R odpory A i B powinny przeciąć się w jednym punkcie. Punkt ten znajduje się w nieskończoności, gdyż siły R i A są siłami równoległymi. Odpór B , wobec tego, musi być do nich równoległym.

Mając już kierunki oddziaływań A i B możemy wyznaczyć ich wartości, budując wielobok sił, o dowolnym biegunie O , oraz odpowiedni wielobok sznurowy i pamiętając, że zarówno wielobok sił jak i sznurowy powinny być zamknięte.

W tym celu układamy siły w szereg tak, aby NIEZNANE ODPORY A i B stały jeden na początku i drugi na końcu tego szeregu: A, S_1, S_2, S_3, B .

Przystępujemy do wykreślenia wieloboku sił: powinniśmy go zacząć od siły A , której początek niech będzie w p. a , koniec zaś w p. b . Ponieważ tej siły nie znamy, możemy narazie obrać tylko punkt b , JAKO KONIEC SIŁY A ; od punktu b odkładamy: odcinek bc , przedstawiający siłę S_1 , za nim odcinek cd - siłę S_2 .

odcinek de - siłę S_3 ; w p. e znaleźć się powinien POCZĄTEK SIŁY B , koniec tej siły upadnie na punkt a , gdyż wielobok sił ma być zamknięty. Na razie jednak punktu a nie znamy.

Obieramy, dalej, dowolny biegun P i kreślimy promienie: do punktu a - na razie nieznanego - niech pójdzie promień 1 /nie wykreślamy go/;

do p. b - prowadzimy promień 2

" " c " " 3

" " d " " 4

" " e " " 5

promień ostatni 6 powinien być poprowadzony do punktu a t.j. powinien się ułożyć wzdłuż promienia 1.

Promienie 1 i 6 będziemy mogli dopiero później wyznaczyć.

Przystępujemy teraz do budowy wieloboku sznurowego.

Bok 1 powinien przejść przez dowolny punkt A_1 , obrany na linii działania siły A , równoległe do promienia 1. Tego promienia nie znamy i, wobec tego, nie możemy też na razie wykreślić boku 1.

Wykreślamy dalsze boki wieloboku sznurowego:

przez p. A_1 bok 2 /równoległe do prom.2/ do siły S_1 -

do p. D_1

" p. D_1 " 3 / " " 3/ do siły S_2 -

do p. E_1

" p. E_1 " 4 / " " 4/ do siły S_3 -

do p. C_1

przez p. C_1 bok 5 /równolegle do prom.5/ do siły B
- do p. B_2

" p. B_2 powinien przejść bok 6, równolegle do promienia 6.

Ponieważ promienie 1 i 6, ze względu na równowagę układu sił pokrywają się, więc boki 1 i 6 powinny być równoległe; a że, dalej, wielobok sznurowy ma być zamknięty, zatem boki 1 i 6 powinny się pokrywać, czyli że jedyne ich położenie jest wzdłuż prostej, łączącej punkty A_1 i B_2 . Znaleźliśmy więc boki 1 i 6, tem samym mamy możność wykreślenia promieni 1, 6, prowadząc z bieguna R prostą równoległą do boku 1, 6.

Tą samą drogą znajdujemy punkt a , w którym przypadają POCZĄTEK SIŁY A i KONIEC SIŁY B . Zatem odcinek ab przedstawia nam odpór A , zaś odcinek ea - odpór B .

Znaleźliśmy więc oba odpory belki, podpartej w dwóch punktach, oraz wykreśliliśmy wielobok sznurowy dla sił, działających na belkę.

Zaznaczyć należy, że powyższy sposób, cokolwiek szczegółowiej opisany, daje się zastosować bez żadnej trudności do każdego najbardziej zawiłego przypadku belki, podpartej w dwóch punktach.

57. MOMENTY GNĄCE BELKI. Do wyznaczenia wymiarów belki, poddanej działaniu jakiegokolwiek układu sił^{x/},

x/ Jest to zagadnienie, rozpatrywane w "Wytrzymałości materiałów".

potrzebna jest znajomość t.zw. "momentu gnącego", który można określić w sposób następujący:

MOMENTEM GNĄCYM BELKI, WZGLĘDEM DANEGO PRZEKROJU, NAZYWAMY SUMĘ MOMENTÓW STATYCZNYCH WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NA LEWO OD TEGO PRZEKROJU WZGLĘDEM ŚRODKA CIĘŻKOŚCI TEGO PRZEKROJU.

Warunek, aby brać pod uwagę siły, leżące NA LEWO od rozważanego przekroju /nie zaś na prawo/ nie jest istotny, a ma jedynie na celu ujednolicienie postępowania. W samej rzeczy: zważmy, że wszystkie siły, działające na belkę, są w równowadze, a więc suma momentów statycznych wszystkich sił, leżących NA LEWO i NA PRAWO od danego przekroju względem jakiegokolwiek punktu, a więc względem środka ciężkości tego przekroju – jest = zeru; stąd mamy, że suma mom.stat. wszystkich sił, wziętych NA LEWO od danego przekroju i suma wszystkich sił, wziętych NA PRAWO od niego, muszą być sobie równe, różniąc się tylko znakiem. Posiadając wielobok sznurowy, możemy znajdować wprost momenty gnące względem któregośkolwiek przekroju belki, a to na zasadzie § 49. Tak więc np., aby wyznaczyć moment gnący, w przypadku zadania na rys.55, względem przekroju F czyli $(M_g)_F$, prowadzimy przez F prostą odcinków i szukamy przecięcia się jej z bokami przed i za siłami, znajdującymi się na lewo od F .

Aby znaleźć te boki zważy, że na lewą część belki od zadanego przekroju działają siły A i S , które w wieloboku się mają początek w punkcie a i kończą się w punkcie C ; do tych punktów idą promienie 1 i 3; zatem przed siłami mamy bok 1, zaś za siłami bok 3.

Boki 1 i 3 przecinają się z linią odcinków w punktach m_1, m_2 ; wobec tego

$$(M_g)_F = -\overline{m_1 m_2} \cdot \omega$$

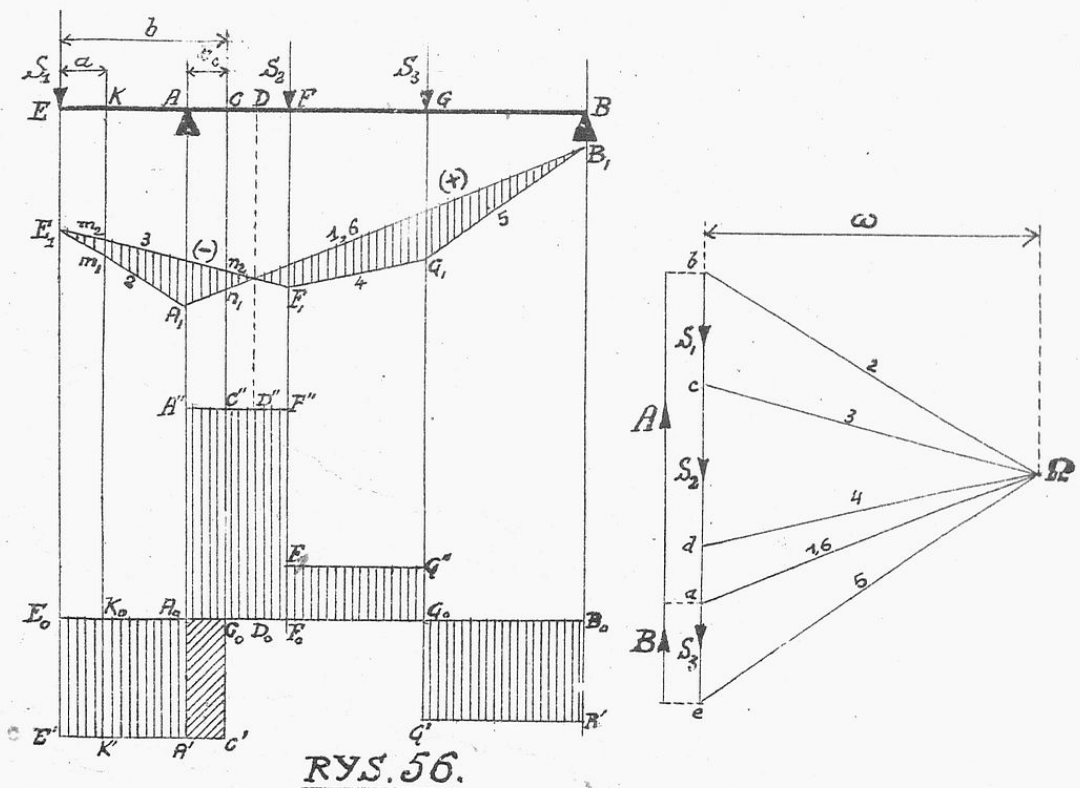
przyczem ω oznacza, jak zwykle, odległość biegunową.

Jeżeli będziemy obierali przekroje na prawo od poprzedniego przekroju F , to znajdować będziemy dla nich coraz większe wartości momentów gnących, przyczem będą one wciąż ujemne. Nad podporą B , panuje, jak widzimy, moment gnący największy $= (M_g)_B = -\overline{B_1 B_2} \cdot \omega$ poczem momenty zaczynają się zmniejszać; w przekroju G $(M_g)_G = -\overline{n_1 n_2} \cdot \omega$ i dalej staje się zerem dla przekroju, w którym działa siła S_3 . Łatwo dostrzeżemy, że w przekrojach na lewo od F moment gnący maleje, w przekroju H jest równy zeru, następnie zmienia znak /staje się więc dodatni/ i wzrasta aż do punktu D przyłożenia siły S_1 , gdzie $(M_g)_D = +\overline{D_1 D_2} \cdot \omega$, poczem maleje i nad podporą A jest zerem.

Widzimy, że wielobok sznurowy daje nam bezpośrednio możliwość wyznaczania momentów gnących dla dowolnego przekroju belki i wskazania, gdzie i jakie są momenty gnące. Wielobok ten obejmuje pewne pole, które możemy nazwać **POLEM MOMENTÓW GNĄCYCH** lub wprost **POLEM MOMENTÓW**

58. INNY PRZYKŁAD. Na rys.56 mamy wykreślone pole momentów, dla przykładu, stanowiącego nieznaczącą odmianę przykładu, rozwiązanego w paragrafie poprzednim. Można do niego bez zmiany zastosować te rozumowania, które przytaczaliśmy tam; nie chcąc się więc powtarzać, poprzestaniemy na samym wykresie, sądząc, że czytelnik sam da sobie radę.

59. SILY TNĄCZ. Na rys.56 pod polem momentów widzimy jeszcze inny wykres, zwany WYKRESEM SIŁ TNĄCZYCH.



RYS. 56.

Poznamy zaraz znaczenie nowego pojęcia, zaznaczając, że znajomość sił tnących jest potrzebna, według "wytrzymałości materiałów" do obliczania belek.

Otóż SIŁĄ TNĄCĄ, ALBO SIŁĄ POPRZECZNĄ DLA DANEGO PRZEKROJU BELKI NAZYWAMY ALGEBRAICZNĄ SUMĘ WSZYSTKICH SIŁ, LEŻĄCYCH NA LEWO OD TEGO PRZEKROJU.

Tak więc np. dla wszystkich przekrojów belki od E do A siła tnąca ma wartość stałą i równą S_1 . Chcąc zbudować wykres tej siły tnącej, odmierzamy od dowolnej osi poziomej E_0B_0 odcinek $E_0E' = S_1$, i skierowany tak, jak siła S_1 , czyli w dół. Przez E' prowadzimy prostą $E'A'$ równoległą do E_0B_0 . Otrzymamy w ten sposób linię prostą, której rzędne będą oznaczały w każdym miejscu wartość siły tnącej.

Gdy przejdziemy wzdłuż belki, tuż poza przekrój A w prawo, to po lewej stronie dostrzegamy już dwie siły, mianowicie S_1 i odpór A . Te dwie siły dają wypadkową $A_0A_1 + A'A'' = A_0A''$ i skierowaną do góry, a więc taki odcinek należy odłożyć od osi E_0B_0 ku górze. Pomiędzy przekrojami A i F siła tnąca ma znowu wartość stałą, a więc wykresem jej jest prosta $A''F'' \parallel E_0B_0$. W dalszym ciągu dla punktów, leżących na prawo od F , przybywa jeszcze siła $S_2 = F'F'$, skierowana w dół, a więc jako siłę tnącą dla przekrojów między F i G będziemy uważali wypadkową sił S_1 , A i S_2 czyli $F_0F'' + F'F' = F_0F'$ i t.d. Postępując w dalszym ciągu w taki sam sposób, dojdziemy wreszcie do punktu B' , od którego w górę powinniśmy odłożyć odpór B . O ile wykres był wykonany prawidłowo, wtedy odcinek $B'B_0$ powinien być właśnie równy temu odporowi.

Wynika to stąd, że w przekroju B siła tnąca jest równa zeru /belka bowiem jest w równowadze, a więc suma wszystkich sił zewnętrznych musi być równą 0/.

Figura $E_o E' A' A'' F F' G G' B B_o$ nosi nazwę WYKRESU SIŁ TNĄCYCH lub SIŁ POPRZECZNYCH.

60. ZWIĄZEK, POMIĘDZY WYKRESEM MOMENTÓW GNĄCYCH I WYKRESEM SIŁ POPRZECZNYCH.

Weźmy pod uwagę przekrój belki K /rys.56/, odległy o a od przekroju E . Moment gnący dla tego przekroju możemy wyznaczyć:

$$(M_g)_K = -S_1 \cdot a$$

Ponieważ, z drugiej strony, $E_o E' = S_1$, a $E_o K_o = a$, zatem widzimy, że pole prostokąta $E_o E' K' K_o$ jest liczbowo równe momentowi gnącemu względem przekroju K .

Gdy przekrój K obierać będziemy coraz bliżej podpory A , to moment gnący względem tego przekroju będzie wzrastał, gdyż ramię a będzie coraz większe i pole $E_o E' K' K_o$ też będzie wzrastać.

O wzrastaniu momentów gnących ku podporze A wnioskujemy też z pola momentów.

Gdy rozważany przekrój przesuniemy na prawo od podpory, to do wyznaczenia momentu gnącego będzie trzeba wziąć pod uwagę już dwie siły, mianowicie S_1 i odpór A . Będzie zatem

$$(M_g)_c = -S_1 \cdot b + A c \dots\dots\dots /1/$$

gdzie b i c oznaczają odpowiednie odległości przekroju C od sił S_1 i A .

Pierwszy składnik tej sumy wyraża pole $E_o E' C' C_o$, drugi zaś - pole $A' A'' C'' C'$, zatem otrzymujemy: $(M_g)_c = -E_o E' C' C_o + A' A'' C'' C' = -E_o E' A' A_o - A_o A' C' C_o + A_o A' C' C_o + A_o A' C'' C_o = -E_o E' A' A_o + A_o A' C'' C_o$.

Umówmy się pola POD osią $E_o B_o$ uważać za ujemne, zaś NAD osią $E_o B_o$ za dodatnie, wówczas $(M_g)_c$ obliczymy jako sumę pól, zawartych między osią $E_o B_o$, linią sił tnących oraz dwiema rzędnymi, z których jedna należy do lewego końca belki, druga poprowadzona jest przez dany przekrój.

Łatwo dostrzeżemy, że gdy tylko przekroczymy podporę A , to zjawiają się pola dodatnie, które będą zmniejszały sumę poprzednią. Z tego wynika, że, o ile linia sił tnących przecina oś $E_o B_o$ w pewnym miejscu, to moment gnący w tym miejscu posiada wartość największą, a więc i rzędne wieloboku sznurowego osiągają tutaj maximum^{x/}.

W przekroju D moment gnący jest zerem, co wskazuje, że pole $E_o E' A' A_o$ musi być równe polu $A_o A'' D'' D_o$. Poza przekrojem D będą już momenty dodatnie, rosnące w miarę zbliżania się do przekroju F . Za tym przekrojem mamy mo-

^{x/} Wartość momentu gnącego nad podporą A w naszym przykładzie jest ujemna; wobec tego właściwie należałoby uważać ją jako "minimum". Ponieważ, jednak, z punktu widzenia "wytrzymałości materiałów" jest wszystko jedno, czy mamy do czynienia z momentem gnącym ujemnym, czy dodatnim, więc największe wartości tych momentów będziemy zawsze notowali jako "maximum".

menty, wprowadzie wciąż dodatnie, ale już wolniej rosnące, bo przybywa tu działanie siły S_2 , dającej momenty ujemne. To samo wynika z rozpatrywania wykresu sił tnących, gdzie, jak widzimy, przy przesuwaniu się do przekroju F przybywają pola prostokątów o większych wysokościach, niż poza tym przekrojem. Dla przekroju G mamy znowu moment "maximum" i jednocześnie widzimy, że linja sił tnących w tem miejscu przecina oś $E_0 B_0$.

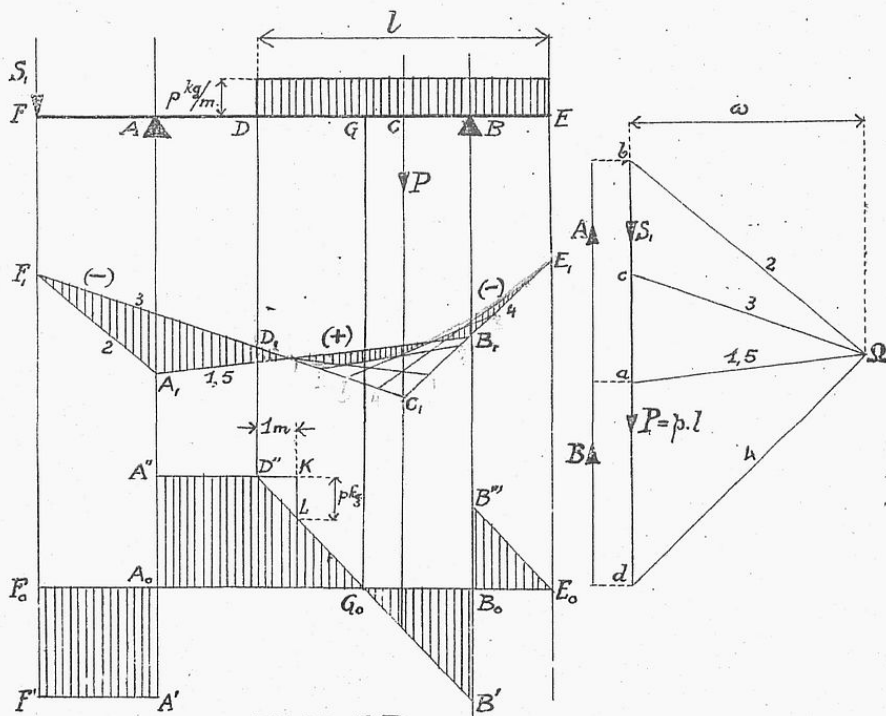
Dla punktu B moment gnący otrzymujemy równy zero; jednocześnie dostrzegamy, że linja sił tnących tworzy ponad osią pola dodatnie i pod osią pola ujemne, przyczem wartości pól dodatnich i ujemnych są równe - w sumie dają zero.

Z powyższego można wyprowadzić następujący wniosek ogólny: MAXIMUM MOMENTU GNĄCEGO ZNAJDESIEMY DLA TYCH PRZEKROJÓW BELKI, W KTÓRYCH WYKRES SIŁ TNĄCYCH PRZECINA OŚ BELKI.

61. WYKRES SIŁ TNĄCYCH DLA CIĄGŁEGO OBCIĄŻENIA JEDNOSTAJNEGO. Rys. 57 zawiera wielobok sznurowy - inaczej pole momentów oraz wykres sił tnących dla belki, obciążonej jedną siłą skupioną S_2 oraz na długości l siłą ciągłą, wynoszącą p kg/m.

Wykreślenie wieloboku sznurowego wykonany z łatwością; stąd otrzymany pole momentów.

Tak samo nie znajdziemy trudności przy wykreśleniu linji sił tnących, aż do punktu D , gdzie zaczyna się obciążenie ciągłe.



RYS. 57.

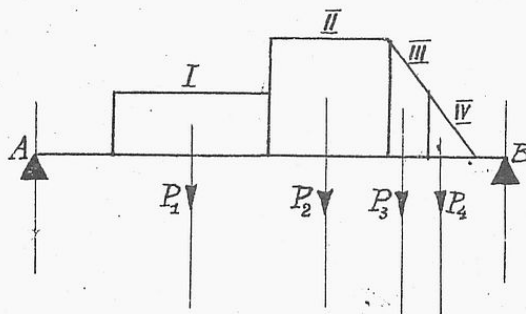
Od tego punktu siła tnąca maleje stale, a ponieważ obciążenie jest jednostajne, więc ubytek jej będzie proporcjonalny do odległości od przekroju D , czyli wyrazi się za pomocą prostej pochyłej $D''B'$. Wykreślimy tę prostą, korzystając z tego warunku, że w odległości 1 m. $D''K$ od D'' siła tnąca jest o ρ kg. = KL /nie ρ kg/m./ mniejszą, niż w przekroju D .

W przekroju na podporze B zachodzi skok w wartości siły tnącej o wartość oporu $B = B'B''$, a następnie mamy znowu spadek według prostej $B''E_0$, równoległej do $D''B'$; prosta $B''E_0$ powinna przeciąć oś F_0E_0 w punkcie E_0 , gdyż tu siła tnąca = 0.

Linia sił tnących $F_0FA'A''D''B'B''E_0$ przecina oś F_0E_0

w trzech punktach: A_0 , G_0 i B_0 , co wskazuje, że w przekrojach, odpowiadających punktom A , G i B mom. gnące otrzymają wartość maximum.

62. OBCIĄŻENIE NIEJEDNOSTAJNE. Aby wyznaczyć wykresy momentów i sił tnących dla przypadku obciążenia ciągłego niejednostajnego, postępujemy na zasadzie par. 51 /rys. 58/. Dzielimy więc pole obciążeń na części, wyznaczamy środek ciężkości każdej z nich i uważamy, że w tych środkach są skupione odpowiednie ciężary i dla nich budujemy nasze wykresy.



RYŚ. 58.

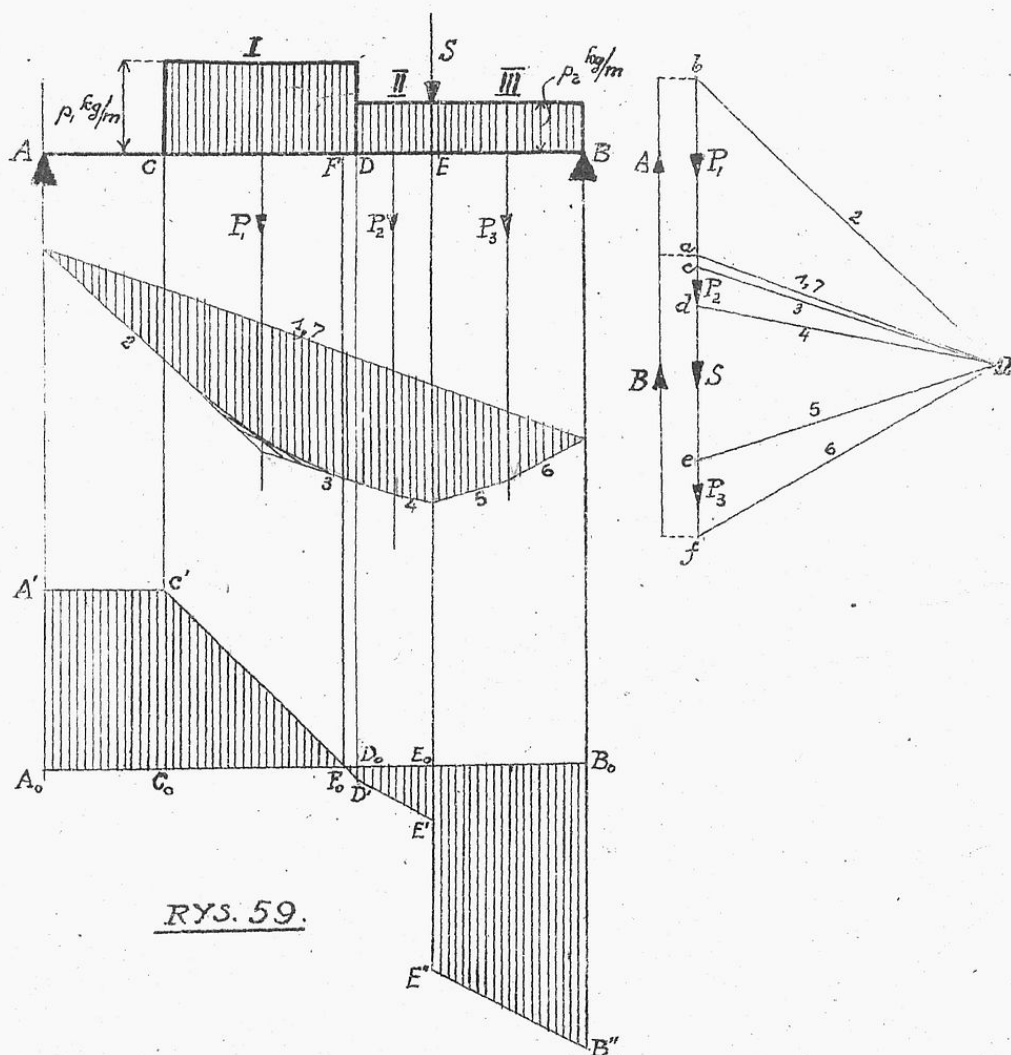
O ile owe części są prostokątami, to wykres momentów trzeba uzupełnić odpowiednimi parabolami; w przeciwnym razie zadawaliśmy się przybliżeniem, poprzestając na siłach skupionych, otrzymanych przez podział pola obciążeń na możliwie znaczną liczbę pól cząstkowych. Analogicznie postępujemy przy wykreślaniu sił tnących.

63. PRZYKŁAD. Na rys. 59 mamy przykład obciążenia ciągłego niejednostajnego współ z działaniem siły skupionej S . Podział pola obciążeń uskuteczniamy w punktach D /gdzie zachodzi zmiana obciążenia/, i E , gdzie jest

przyłożone siła skupiona S , a dalej postępujemy w sposób, wskazany w par. poprzednim.

Wykres siły tnącej, otrzymany od obciążenia I, tworzy prosta $C'D'$, której pochyłość wyznacza obciążenie jednostkowe p_1 kg/m. Pochyłość prostych $D'E'$ i $E''B''$, odpowiadających obciążeniom II i III jest inna; wyznaczamy ją z obciążenia jednostkowego p_2 kg/m.

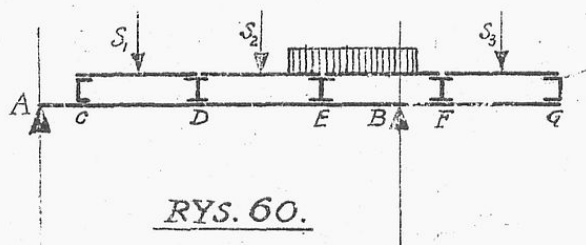
Odcinek $E'E''$ jest równy sile S , a o ile wykres był prawidłowo wykonany, powinno być $B''B_0 = Bfa$ /w wieloboku sił/.



RYS. 59.

B. OBCIĄŻENIE POŚREDNIE.

64. Dotychczas rozważaliśmy te przypadki, w których na belkę, podpartą w dwóch punktach, działają siły, przyłożone bezpośrednio do belki.



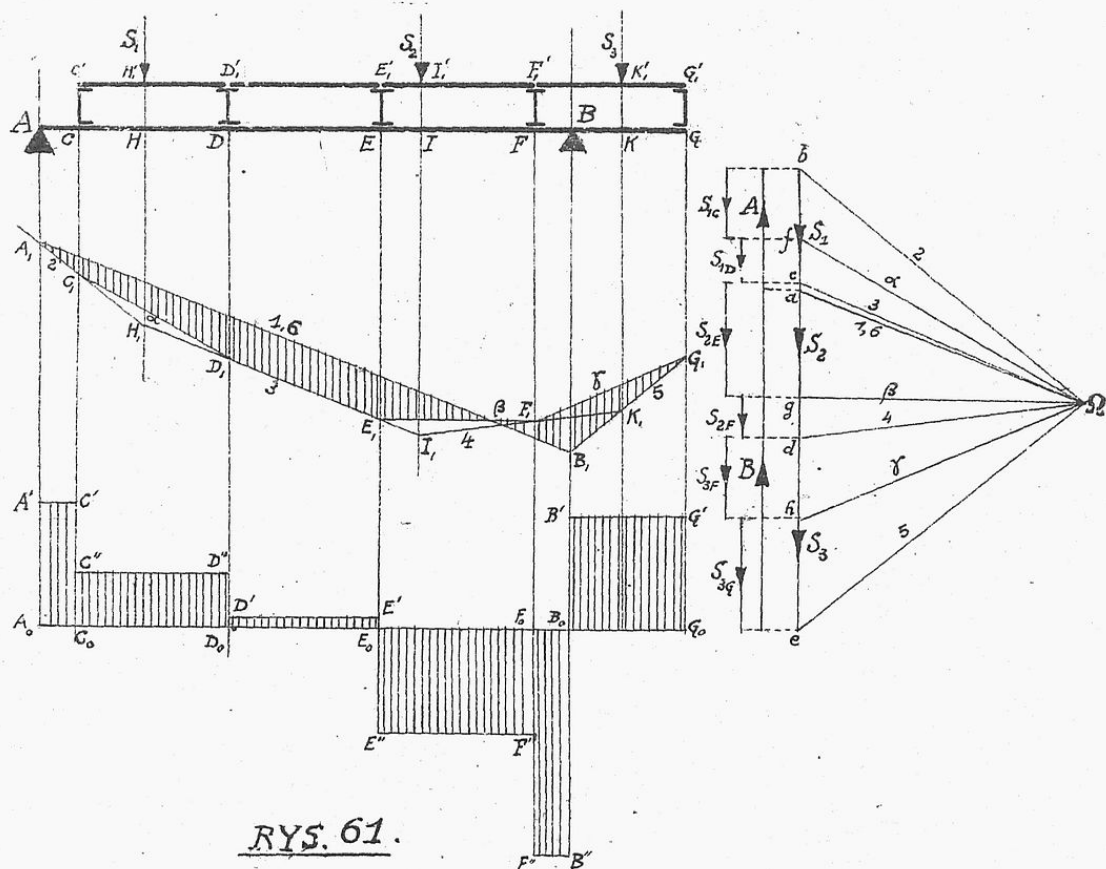
Teraz zbadamy przypadek, gdy obciążenie działa na belkę rozważaną za pośrednictwem beleczek poprzecznych C, D, E, F, G, \dots , jak to, zresztą, wyjaśnia dostatecznie rys. 60.

65. Rozpatrujemy dla przykładu OBCIĄŻENIE POŚREDNIE SIŁAMI SKUPIIONEMI S_1, S_2, S_3 /rys. 61/. W tym celu badamy z początku działanie siły S_1 . Siła ta działa bezpośrednio na belkę $C'D'$, wpływ jej natomiast na belkę główną AB ujawnia się jedynie przez podpórki CC' oraz DD' . Możemy zatem uważać, że zamiast siły S_1 mamy tylko jej dwie składowe S_{1C} i S_{1D} , przyłożone w przekrojach C i D belki AB . Składowe te znajdziemy łatwo zapomocą wieloboku sił i sznurowego, o bokach 2, 3, α , przy czem α oznacza bok zamykający.

Podobnie rozkładamy siłę S_2 na dwie składowe, działające w punktach E i F . Posiłkujemy się przytem rozpoczętymi poprzednio wielobokami; tak więc za bok przed siłą S_2 uważamy bok 3, kreślimy promień 4 oraz odpowia-

dający mu bok 4, a wreszcie budujemy bok zamykający β .
Promień β podzieli nam S_2 na szukane dwie składowe S_{2E}
i S_{2F} .

Zupełnie tak samo postępujemy z siłą S_3 , rozkładając ją na składowe S_{3F} i S_{3G} . Przytem bokiem przed siłą S_3 jest bok 4, bokiem za siłą - bok 5, zaś bokiem zamykającym



cym - bok γ .

Kiedy we wskazany sposób rozłożyliśmy siły S_1, S_2, S_3 , możemy zagadnienie nasze tak przedstawić: należy wykreślić pole momentów gnących oraz linię sił poprzecznych dla belki AB , obciążonej BEZPOŚREDNIO siłami: 1/ S_{1C} w przekroju C , 2/ S_{1D} - w D , 3/ S_{2E} - w E ; 4/ S_{2F} i S_{3F}

- w F , oraz 5/ S_{3G} — w G .

Widzimy więc, że zadanie nasze sprowadziliśmy do rozwiązanego w § 56. Należy tylko skorzystać z wykonanej dotychczas budowy.

Rzut oka na rys. 61 pozwala nam stwierdzić, że za wielobok sznurowy dla wymienionego układu sił przy biegu nie Ω /tym samym, co poprzednio/, można uważać wielobok A, C, D, E, F, G, B, A_1 , złożony z gotowych już boków $2, \alpha, 3, \beta, \gamma, 5$. Łącząc punkty A_1 z B_1 , otrzymamy bok zamykający 1,6 owego wieloboku, a wtedy, poprowadziwszy promień 1,6, znajdziemy odpory A i B : $A = \overline{ab}$, $B = \overline{ea}$. Pole, ograniczone tym wielobokiem /zakreskowane na rys. 61/ przedstawia szukane pole momentów.

Z powyższych rozważań widzimy, że dla otrzymania pola momentów w przypadku obciążenia pośredniego, należy tak postępować, jakgdyby siły S_1, S_2, S_3 działały bezpośrednio na belkę AB ; w tem założeniu wykreślić odpowiedni wielobok sznurowy i połączyć prostymi α, β, γ punkty przecięcia się boków owego wieloboku sznurowego z pionowymi, przechodzącymi przez węzły C, D, E, \dots

66. Wykres sił tnących otrzymamy tak samo, jak w § 59 , pamiętając wciąż o tem, że nie mają dla nas znaczenia istotnie działające siły S_1, S_2, S_3 , a tylko ich składowe w punktach oparcia beleczek CC', DD', \dots

67. SIŁY CIĄGŁE. Rozumowania nasze dla obciążenia

dzących przez C i D . Robimy to zapomocą sposobu, wyłożonego w par.65, korzystając przytem z tego samego biegunu Ω i z boku 4 - jako boku przed siłą S_3 . Bok zamykający oznaczony jest na rys.62 przez α .

Dalej dzielimy obciążenie ciągłe P na dwie części, prowadząc linię podziału przez podpórkę E ; zastępcze siły skupione są P_1 i P_2 ; rozłożymy każdą z nich na składowe P_{1D} , P_{1E} i P_{2E} , P_{2F} , przyczem postępujemy tak samo, jak w przypadku obciążenia skupionego. Rozkład ten wykonujemy zapomocą dalszego ciągu wieloboku sznurowego, rozpoczętego poprzednio. Wypadnie tylko dobudować do niego nowe boki 5, 6, 7 oraz boki zamykające β , γ .

Tak więc możemy w danym razie uważać, że belka AB jest obciążona bezpośrednio siłami $S_1, S_2, S_{3C}, S_{3D}, P_{1D}, P_{1E}, P_{2E}, P_{2F}$; dla nich trzeba wyznaczyć wielobok sznurowy. Oczywiście jest nim 1, 2, 3, 4, α , β , γ , 7, 8, przyczem 1,8 oznacza bok zamykający, który pozwoli określić odpory A i

B . Pole, ograniczone powyższym wielobokiem, jest szukanem polem momentów; na rysunku pole momentów dla belki ABF jest zakreskowane.

Sposób otrzymania wykresu sił poprzecznych nie wymaga bliższego omówienia, gdyż nie różni się on od tego sposobu, który przytaczaliśmy w par.66.

68. BELKI KONSOLOWE, znane również pod nazwą belek o podporach wiszących, belek rozciętych, belek Gerbera, belek wielopodporowych /podpór > 2 /.

Mówić tu będziemy tylko o belkach statycznie wyznaczalnych, poddanych działaniu sił, znajdujących się we wspólnej z osią belki płaszczyźnie.

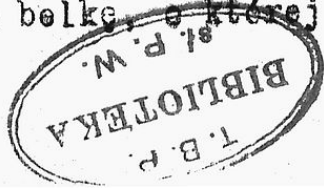
Aby lepiej zrozumieć cel i treść belek konsolowych, rozważmy zwykłą belkę, podpartą na dwóch podporach; siły niech będą dowolnie skierowane, byleby znajdowały się w jednej płaszczyźnie. Oddziaływania tych podpór wyznaczmy dokładnie wtedy, kiedy jedna z nich jest tego rodzaju, że może okazać odpór o ŚCIŚLE WYZNACZONYM KIERUNKU /naprz. przy podparciu belki na wałku, na wózku, lub na ostrzu/, druga zaś podpora powinna być wykonana na sposób przegubu, który może okazać odpór w DOWOLNYM KIERUNKU.

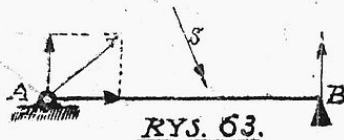
Dla ułatwienia dalszych rozumowań nazwijmy podpory o ściśle wyznaczonym kierunku działania - PODPORAMI 1-go RODZAJU, zaś podpory, oddziałujące w dowolnym kierunku, PODPORAMI 2-go RODZAJU.

Wykreślnie już wiemy, jak wyznaczać w poprzednim przykładzie odpory; wiemy również, że odpowiedź będzie tylko jedna /porównaj §56 /.

Analitycznie sprawa powyższa da się wyjaśnić w następujący sposób. Podpora 1-go rodzaju daje się zastąpić jedną siłą o określonej linii działania /rys.63 - podpora B /; podpora 2-go rodzaju może być zastąpiona dwiema siłami z obranymi linjami działania /rys.63 - podpora A /.

Na belkę, o której poprzednio mówiliśmy, działają przez





RYS. 63.

danych sił zewnętrznych jeszcze 3 siły odporowe ; siły te co do wartości są nam nieznane. Mamy więc 3 niewiadome. Do wyznaczenia tych niewiadomych potrzeba trzech równań, które otrzymamy z 3 warunków równowagi belki, poddanej działaniu sił zadanych i odporów. Z tych właśnie równań znajdziemy niewiadome odpory.

69. Gdybyśmy belkę, o której poprzednio była mowa, podparli nie w dwóch, lecz w trzech punktach, lub w większej ich liczbie, albo dali choćby dwie podpory, lecz obie drugiego rodzaju, wówczas ścisłe określenie odporów drogą statyki będzie niewykonalne. Belka taka będzie statycznie niewyznaczalna, gdyż więcej mamy niewiadomych niż równań. Aby nieokreśloność odporów usunąć, przecinamy belkę taką na pewną liczbę części i w odpowiedni sposób ustawiamy jedne części na zadanych podporach, STAŁYCH, inne zaś części belki opieramy na zwieszających się końcach tamtych części; te ostatnie podpory nazwiemy WISZĄCEM. Podpory wiszące mogą być wykonane zarówno jako podpory I-go lub 2-go rodzaju.

Poznajmy zależność pomiędzy liczbą podpór stałych i liczbą podpór wiszących, jeśli belka ma być statycznie wyznaczalna. Niech, dajmy na to, będzie S podpór sta-

łych, w tem S_1 podpór 1-go rodzaju i S_2 - 2-go rodzaju, oraz w podpór wiszących, w tem w_1 pierwszego rodzaju i w_2 - drugiego rodzaju. Jeśli jest w podpór wiszących, zatem cała belka jest w W miejscach przecięta na $(w+1)$ części.

Niewiadomych sił /zastępujących działania podpór/ będzie, zgodnie z poprzedniem, S_1+2S_2 dla podpór stałych i w_1+2w_2 dla podpór wiszących, a razem

$$S_1+2S_2+w_1+2w_2.$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych należy skorzystać z warunków równowagi poszczególnych części belki.

Ponieważ tych części jest $w+1$, a dla każdej z nich możemy napisać 3 warunki równania - /suma rzutów na jedną oś, - na drugą oś i suma momentów statycznych/, więc razem ustawimy 3 $(w+1)$ równań.

Jeśli zadanie ma być określone, powinien istnieć związek: $S_1+2S_2+w_1+2w_2=3(w+1)$ albo, ponieważ $W=w_1+w_2$, więc

$$S_1+2S_2-2w_1-w_2=3 \quad (S_1-w_1)+2(S_2-w_1)=3$$

Tak sprawa się przedstawia, jeśli na belkę działają siły, znajdujące się w jednej płaszczyźnie, lecz dowolnie skierowane.

70. Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy wszystkie siły są pionowe, jak to zazwyczaj mieć będziemy przy mostach;

również niech podpory 1-go rodzaju okazują oddziaływania w kierunku pionowym. Wówczas podpory 2-go rodzaju okażą odpory pionowe.

W takim razie każdy z odporów, niezależnie od rodzaju podpory, możemy zastąpić jedną tylko siłą pionową. Niewiadomych zatem będzie:

$$S_1 + S_2 + W_1 + W_2 = S + W.$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych możemy utworzyć po dwa równania dla każdej części belki /suma rzutów na oś pionową i suma momentów statycznych/. Ponieważ podpór wiszących jest w , zatem części będzie $w+1$ i równań niezależnych utworzymy $2(w+1)$. Jeśli więc belka ma być statycznie wyznaczalna, powinno być

$$S + W = 2(w+1), \quad \text{albo}$$

$$S - W = 2$$

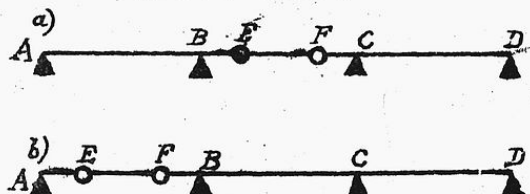
t.j. podpór stałych powinno być o dwie więcej, niż wiszących. Zaznaczyć tu trzeba, że warunek powyższy powinien być zachowany nie tylko dla całej belki, lecz dla każdej części, na które belka jest podzielona; przyczem w miejscu podpór wiszących należy przyłożyć odpowiednie siły zewnętrzne.

71. Wyjaśnimy powyższe na przykładach.

Rozpatrzmy belki, przedstawione na rys. 64.

Dla pierwszej z nich $s=4$, /A,B,C,D/ $w=2$ /E,F/.

więc $s-w=2$; dla części AE mamy $s=2$ /A i B/; $w=0$,
więc $s-w=2$ i t.d. Z tego wynika, że belka /a/ jest sta-
tycznie wyznaczalna.



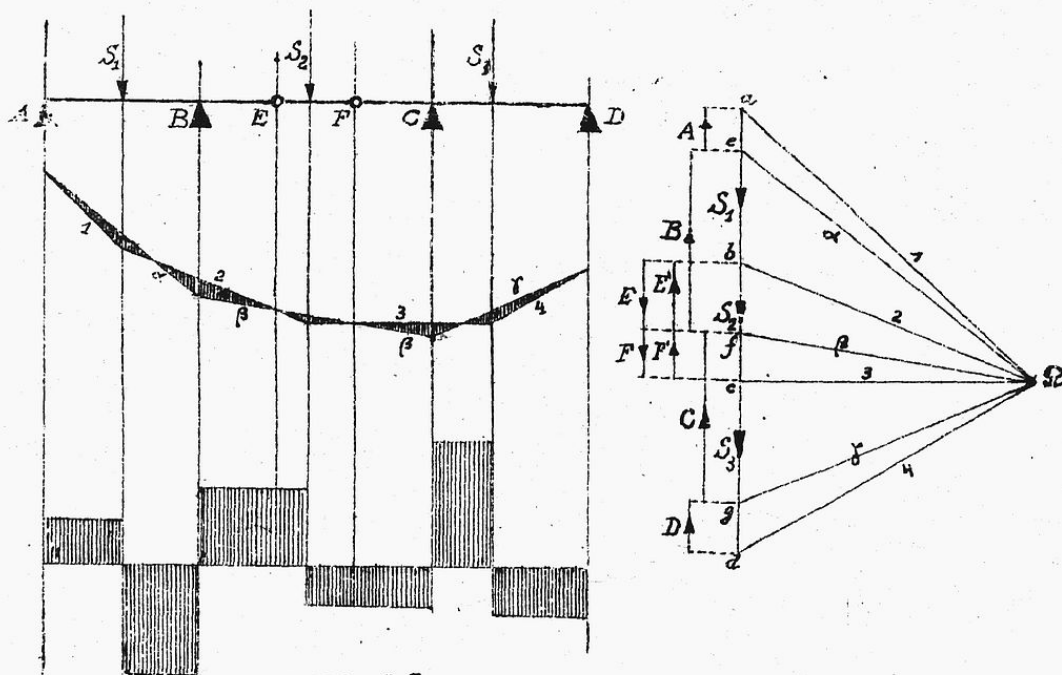
RYS. 64.

Dla belki drugiej /b/
mamy $s=4$, $w=2$, $s-w=2$;
lecz dla części AF: $s=1$,
 $w=1$; $s-w=0$; tak samo

dla części FD $s=3$, $w=0$; $s-w=3$.

Belka /b/ jest więc statycznie niewyznaczalna.

72. Pole momentów dla belki konsolowej. Dla przykładu
rozpatrzmy belkę, przedstawioną na rys.65, obciążoną si-



RYS. 65.

łami pionowymi S_1, S_2, S_3 . Belka składa się z trzech czę-

ści, spoczywających na czterech podporach stałych:

A, B, C i D i dwóch podporach wiszących E i F.

Rozpatrzmy część belki EF, wspartą na wiszących podporach wraz z siłami do niej przyłożonemi. Jeśli jedna z tych podpór jest 1-go rodzaju /§ 68/, a oddziaływanie jej będzie pionowe, wówczas obydwa odpory będą pionowe, gdyż siły zewnętrzne, obciążające daną belkę, mają kierunek pionowy. Aby znaleźć odpory należy wykreślić dla siły S_2 wielobok sił oraz odpowiedni wielobok sznurowy /z bokami 2,3/; następnie należy połączyć punkty przecięcia się boków skrajnych /2 i 3/ wieloboku sznurowego z linjami działania odporów E i F linią prostą, otrzymamy bok zamykający β . Równoległy do tego boku promień β podzieli siłę S_2 na dwie: $\overline{f\beta} = E'$ i $\overline{cf} = F'$. Odpory te idą z dołu do góry.

Przechodzimy następnie do jednej z belek skrajnych, naprz. do belki lewej. Na belkę tę, podpartą w punktach A i B, działają siły: S_1 i nacisk końca belki EF; nacisk ten = poprzednio znalezionemu odporowi E' , skierowany jest z góry na dół i w wieloboku sił może być przeestawiony odcinkiem $\delta f = E$.

Zatem na belkę AB działają siły S_1 , E oraz odpory nieznanne A i B. Aby znaleźć odpory, postępujemy w sposób, we właściwym miejscu wyjaśniony. Ustawiamy siły w

szeręg, w którym niewiadome staną po brzegach szeregu: A, S_2, E, B . Siły S_2 i E w wieloboku sił już są zaznaczone. Prowadzimy promienie w wieloboku sił i boki wieloboku sznurowego w takim porządku: za siłą A i przed siłą S_2 /do punktu a / - promień i bok 1; za siłą S_2 i przed siłą E /do punktu b / - promień i bok 2; za siłą E i przed siłą B /do punktu f / - promień i bok β . Zauważyć tu należy, że zarówno w wieloboku sił, jak i w wieloboku sznurowym - podczas rozpatrywania belki EF - były już wykreślone promienie i boki 2 i β ; teraz dodaliśmy tylko promień i bok 1.

Następnie przez punkt przecięcia się boku 1 z linią działania odporu A i przez punkt przecięcia się boku β z linią działania odporu B prowadzimy bok α , który będzie bokiemy zamykającym. Promień α , równoległy do boku α , w wieloboku sił daje nam punkt e , który będzie początkiem siły A i końcem B . Stąd znajdziemy: odpór $A = \overline{ea}$, odpór $B = \overline{fe}$. Jednocześnie widzimy, że wielobok sił jest $abfea$ oraz że wielobok sznurowy tworzą boki: 1, 2, β , α .

Zupełnie w ten sam sposób rozpatrzmy belkę prawą FD : na nią działają siły S_3 , w końcu F siła $F = \overline{fc}$ /w wieloboku sił/ oraz odpory C i D . Skorzystamy z gotowych już promieni i boków i po dopełnieniu promieniami i bokami 4, γ otrzymamy: odpór $C = \overline{gf}$, odpór

$D = \overline{d_g}$, wielobok sił $fcdgf$, oraz wielobok sznurowy, utworzony z boków: β , 3, 4, γ ; γ jest tu bokiem zamykającym.

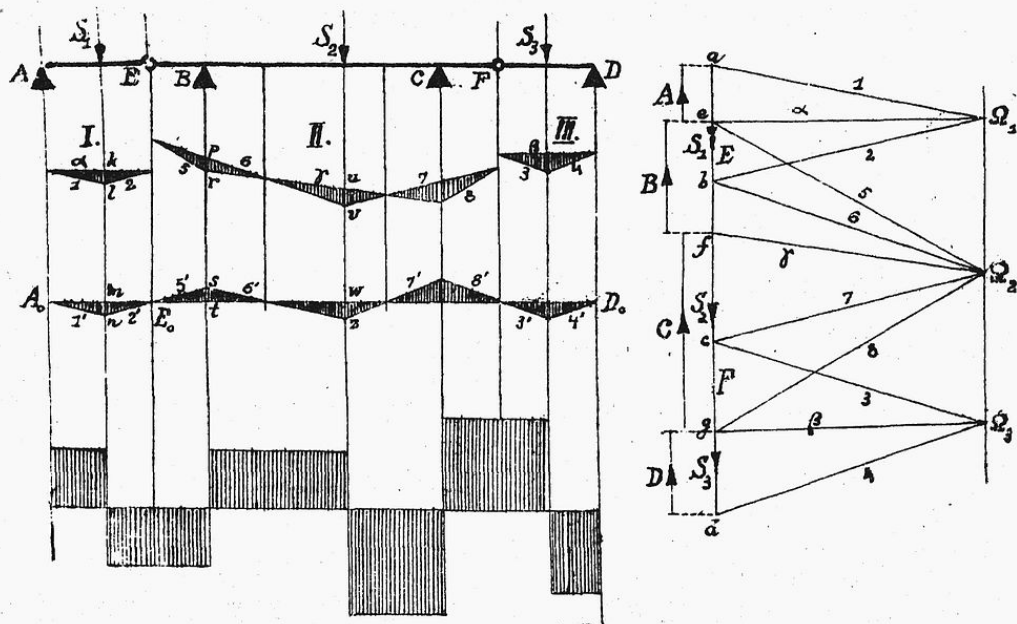
Ostatecznie więc otrzymujemy, że pole momentów dla całej belki AD jest ograniczone wielobokiem sznurowym, o bokach 1, 2, 3, 4, γ , β , α .

73. Budowa WYKRESU SIŁ TNĄCYCH dla belki konsolowej nie nastrocza żadnych trudności. Należy wykonać wykres w sposób zwykły, pamiętając, że odpory działające w podporach wiszących, jako równe i odwrotnie skierowane, nie wpływają wcale na zmianę siły tnącej. /Nie znaczy to jednak, że siły tnące nie zależą od owych podpór; tak nie jest, można dostrzedz bowiem łatwo, że odpory A, B, C, D, są zależne od rozstawienia podpór wiszących, a od oddziaływań tych zależą znowu siły tnące/.

74. INNY SPOSÓB wykreślenia pola momentów: na przykładzie par. poprzedzającego dostrzegamy, że, obierając dla wszystkich części belki przegubowej wspólny biegun Ω , otrzymujemy wielobok sił o promieniach tworzących ze sobą bardzo ostre kąty, co może spowodować niedokładności przy obliczaniu momentów gnących z wieloboku sznurowego.

Niedogodności tej unikniemy, gdy dla każdej części belki konsolowej obierzemy inny biegun, korzystając zresztą wciąż z tego samego wieloboku sił. Otrzymamy wtedy dla każdej czę-

ści belki wielobok sznurowy, niezależny od innych wielo-



RYS. 66.

boków. Aby jednak każdy z tych wieloboków dawał wartości momentów gnących w tej samej skali, należy obrać bieguny na jednej prostej, równoległej do linii sił /odległość biegunowa jest wtedy jednakowa dla wszystkich wieloboków/.

Na rys.66 mamy przykład, rozwiązany w sposób powyższy. Rozważania zaczynamy od belek skrajnych AE i FD, gdyż mamy w nich tylko po dwie niewiadome, mianowicie po jednym oddziaływaniu stałej podpory i po jednym - wiszącej podpory.

Dla belki AE obieramy biegun Ω_1 i znany sposób znajdujemy odpory $A = e\bar{a}$ i $E = b\bar{e}$. Potem przechodzimy do belki FD: odmierzamy na linii sił odcinek $bc = S_2$ a dalej $cd = S_3$; następnie obieramy biegun Ω_3 i znowu

sposobem znanym wyznaczamy siły $D = \bar{d}g$ i $F = \bar{g}c$.

Wreszcie rozpatrujemy belkę środkową EF. Robimy to, obrawszy biegun \mathcal{R}_2 , pomiędzy \mathcal{R}_1 i \mathcal{R}_3 . Podobnie, jak poprzednio, znajdziemy jedyne dwa niewiadome-odpory B i C. Pola momentów dla poszczególnych części belek są: dla belki AE - pole I, dla belki EF - pole II, dla belki FD - pole III. Aby dogodniej było korzystać z pól momentów, sprowadzamy je często do jednej osi. Wówczas postępujemy tak:

Prowadzimy prostą A_oD_o , równoległą do osi belki, i od punktów przecięcia się jej z linjami działania sił i linjami podpór odmierzamy odpowiednie wartości momentów, odczytane z pól I, II, III. Tak np. w przekroju, na który działa siła S_1 , mamy moment gnący $= kl$, odcinamy więc od osi A_oD_o $mn = kl$. Tak samo $st = pr$, $wz = uv$ i t.d. Łącząc ze sobą prostymi znalezione w ten sposób punkty

A_o, n, E_o, s, z, \dots , otrzymamy wielobok, który ogranicza pole momentów, sprowadzone do osi A_oD_o .

Wykres sił tnących wyznaczamy tak samo, jak w § 73.

ROZDZIAŁ IV.

ŚRODEK SIŁ I ŚRODEK CIEŻKOŚCI.

75. ŚRODEK DWUCH SIŁ. Przypuśćmy, że do punktów A i B dowolnego ciała sztywnego są przyłożone dwie siły S_1, S_2 . Niech siły te będą jakiekolwiek, byleby tylko leżały w jednej