

R O Z D Z I A Ł V I I I .

ŚCIANY OPOROWE.

135. PRZEDMIOT ROZDZIAŁU. Każdy materiał sypki, po-
zestawiony sam sobie, przybiera kształt pewnej, właści-
wej sobie powierzchni, która nie może tworzyć z pozio-
mem kąta, większego od t.zw. KĄTA ZESYPU φ . Kąt ten
jest różny dla rozmaitych materiałów.

Dla przykładu przytoczymy kilka wartości kąta zesypu,
podając również ciężar właściwy odpowiedniego materiału.

MATERJAŁ.	Kąt zesypu φ	tg. φ	Cięż. właściwy w kg/m^3 .
Gлина sucha	40° - 46°	0,84-1,04	1500
Gлина mokra	20° - 25°	0,36-0,47	1900
Ziemia nasypowa	30° - 37°	0,58-0,75	1650
Żwir mokry	25°	0,47	1860
Tłuczeń /szaber/ mokry	35° - 40°	0,7 - 0,84	1600

Gdy chcemy którykolwiek z tych materiałów utrzymać
w równowadze przy pochyłości, większej od kąta zesypu,
to trzeba podeprzeć go t.zw. ŚCIANĄ OPOROWĄ.

Zadaniem danego rozdziału będzie rozpatrzenie równo-
wagi /stateczności i wytrzymałości/ tych ścian.

Rozróżniać będziemy dwa przypadki ściany oporowej

a/ kiedy ziemia /lub inny sypki materiał/ prze na mur, dążąc do obalenia go; będziemy wtedy mówili o NAPO-
RZE ziemi;

b/ kiedy mur opiera się o ziemię, dążąc do wyciśnięcia jej z za siebie; wówczas ziemia jakby odpiera mur; będzie-
my wtedy mówili o ODPORZE ziemi.

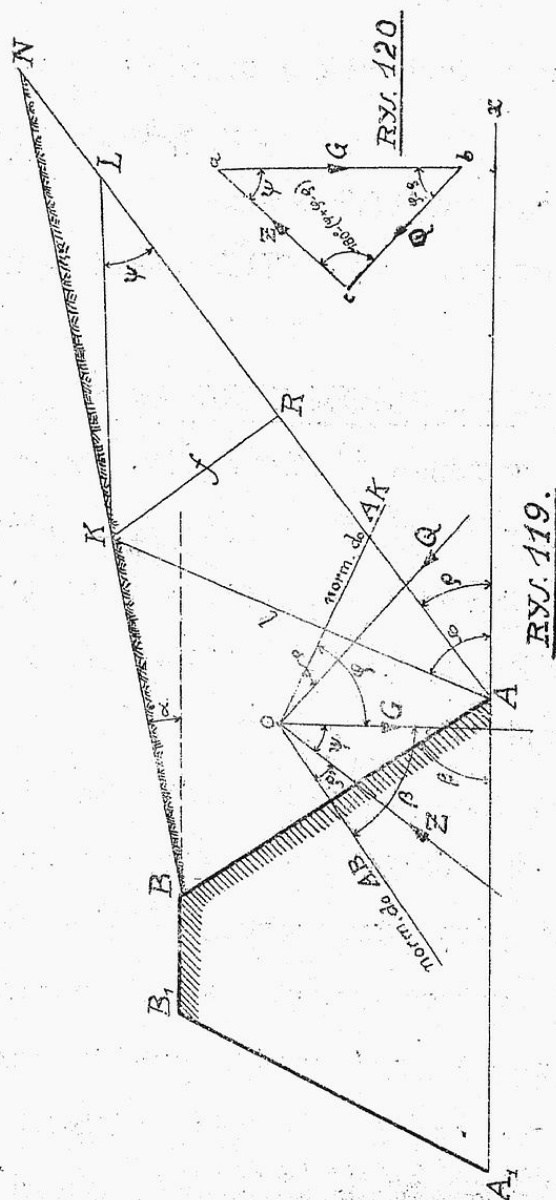
Łatwo to zrozumieć, że ODPÓR ziemi będzie zawsze więk-
szy niż NAPÓR.

136. WYZNACZANIE NAPORU ZIEMI NA ŚCIANĘ. Przypuśćmy,
że chodzi o utrzymanie w równowadze bryły ziemi, ograni-
czonej płaszczyznami BN i AB /rys.119/. Długość ścia-
ny, na którą badamy parcie, STAŁE BĘDZIEMY w dalszym wy-
kładzie PRZYJMOWALI RÓWNĄ 1 METROWI /w kierunku presto-
padłym do rysunku/.

Gdyby ściany AB nie było, wówczas ziemia, pozostawio-
na sama sobie, w równowadze nie pozostanie; część ziemi,
ograniczona od góry płaszczyzną AN , tworzącą z pozi-
mem kąt $\alpha AN =$ kątowi zesypu φ , pozostanie w równowa-
dze sama przez się, zaś część, znajdująca się ponad płasz-
czyzną AN , zsunie się po niej. Zapobiedz temu zesunię-
ciu ma za zadanie ściana ABB_1A_1 ; o nią właśnie oprze
się ruchoma bryła ziemi.

Oddziaływanie ściany (Z) na ziemię powinno być takie,
aby mogło zrównoważyć dwie inne siły, działające na ruch-
mą bryłę, mianowicie: ciężar własny (G) oraz oddziaływa-

nie(Q) ziemi nieruchomej. Doświadczenie wskazuje, że,



gdyby ścianę AB cokolwiek odsunąć, to z bryły ziemi $xABN$ odetnie się część jej, ograniczona płaszczyzną AK , tworzącą z poziomem kąt φ , inny niż φ . /Kąt φ nazywamy kątem OSUWU /odłamu/, a płaszczyznę AK płaszczyzną OSUWOWĄ /odłamu/. Reszta bryły pozostanie na

razie bez ruchu.

Stąd widać, że na ścianę oporową wywiera napór bryła ziemi ABK , dążąca do osunięcia się. Wobec tego należy rozważyć równowagę takich sił: ciężaru G bryły ABK , oddziaływania muru Z na tę bryłę oraz oddziaływania Q pozostającej w spoczynku ziemi poniżej płaszczyzny AK .

Gdyby powierzchnie ziemi i ściany były zupełnie gładkie, to siły Z i Q byłyby normalne, odpowiednio do AB i AK . Ponieważ, jednak, powierzchnie te są chropowate, więc oddziaływania Z i Q tworzą z normalnymi do tych płaszczyzn kąty tarcia, które oznaczmy przez φ' i φ ; drugi z nich /kąt φ / jest, oczywiście, równy kątowi zesypu.

Tak więc na bryłę ABK działają trzy siły Z , G i Q ; pod działaniem ich bryła ta jest w równowadze; stąd wynika, że trójkąt sił abc /rys. 120/ musi być zamknięty. Mając więc wartość G oraz kierunki sił Z i Q łatwo wyznaczymy oddziaływania tych sił Z i Q . Powyżej przyjmowaliśmy kąt φ jako dany; nie możemy jednak ani obliczyć ani też doświadczalnie znaleźć kąta φ , a od niego zależy wartość Z . Dlatego też przyjmujemy, że względu na bezpieczeństwo ściany oporowej, iż kąt φ otrzymuje taką wartość, przy której siła Z przybiera wartość NAJWIEKSZĄ. Tę wartość siły Z będziemy uważali za miarodajną przy obliczaniu ściany oporowej.

137. KĄT OSUWU φ , ODPOWIADAJĄCY MAXIMUM SIŁY Z .

Wprowadzając oznaczenia z rys. 120, napiszemy z trójkąta abc :

$$\frac{Z}{Q} = \frac{\sin(\varphi - \rho)}{\sin(\psi + \varphi - \rho)} \dots\dots\dots /1/$$

gdyż $\sphericalangle(Q, Q) = \varphi - \rho$, a $\sphericalangle(Q, Z) = 180^\circ - (\psi + \varphi - \rho)$.

Z /1/ mamy, dalej:

$$Z = \frac{Q \sin(\varphi - \rho)}{\sin(\psi + \varphi - \rho)} \dots\dots\dots /2/$$

Aby znaleźć, przy jakiej wartości φ , Z osiąga maximum, trzeba znaleźć pochodną $\frac{dZ}{d\varphi}$ i przyrównać ją do zera. Należy przytem zauważyć, że jedynie Q i Z są funkcjami kąta φ , natomiast kąt ψ wcale nie zależy od φ .

Będzie więc

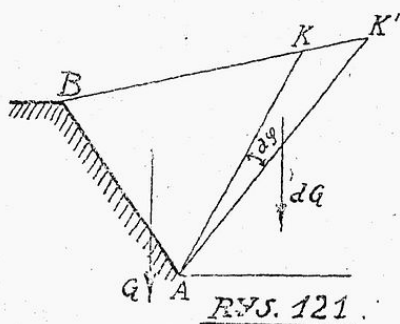
$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{dQ}{d\varphi} \cdot \frac{\sin(\varphi - \rho)}{\sin(\psi + \varphi - \rho)} + Q \frac{\sin(\psi + \varphi - \rho) \cos(\varphi - \rho) - \sin(\varphi - \rho) \cos(\psi + \varphi - \rho)}{\sin^2(\psi + \varphi - \rho)} = 0,$$

albo, sprowadzając otrzymane wyrażenie do wspólnego mianownika, znajdziemy:

$$\frac{\frac{dQ}{d\varphi} \sin(\varphi - \rho) \sin(\psi + \varphi - \rho) + Q [\sin(\psi + \varphi - \rho) \cos(\varphi - \rho) - \sin(\varphi - \rho) \cos(\psi + \varphi - \rho)]}{\sin^2(\psi + \varphi - \rho)} = 0$$

Ponieważ mianownik nie może być $= \infty$, więc licznik $= 0$. Jeśli ponadto zauważymy, że wyrażenie, ujęte w nawias kwadratowy, jest to sinus różnicy kątów $(\psi + \varphi - \rho)$ i $(\varphi - \rho)$, to otrzymamy:

$$\frac{dQ}{d\varphi} \sin(\varphi - \varphi) \sin(\psi + \varphi - \varphi) + Q \sin \psi = 0 \dots \dots /3/$$



Z rys. 121 wynika, że przyrost ciężaru Q jest równy przyrostowi pola ABK , pomnożonemu przez ciężar właściwy ziemi $= q$. A więc

$$dQ = - \frac{AK \cdot AK \cdot d\varphi}{2} q,$$

gdyż pole elementarne AKK' można w przybliżeniu uważać za pole wycinka koła, o kącie środkowym $= d\varphi$ i promieniu $= AK$. Znak $-$ wynika stąd, że ze wzrostem Q kąt φ maleje; kiedy więc dQ jest dodatnie, $d\varphi$ jest ujemne.

Oznaczając jeszcze AK przez l , otrzymamy stąd:

$$dQ = - \frac{l^2 \cdot d\varphi}{2} q,$$

albo

$$\frac{dQ}{d\varphi} = - \frac{l^2}{2} q.$$

Podstawiając tę wartość w /3/, otrzymamy:

$$- \frac{l^2}{2} q \sin(\varphi - \varphi) \sin(\psi + \varphi - \varphi) + Q \sin \psi = 0$$

albo

$$- \frac{q}{2} l \sin(\varphi - \varphi) \cdot l \sin(\psi + \varphi - \varphi) + Q \sin \psi = 0 \dots \dots /4/$$

Z trójkąta AKR /rys. 119/ widzimy, że $l \cdot \sin(\varphi - \varphi)$ jest to rzut AK na KR , prostopadłą do AN ; oznaczmy ten rzut przez f i poprowadźmy dalej prostą KL pod kątem ψ do AN i oznaczmy jeszcze AL przez b ,

wtedy z trójkąta AKL znajdziemy:

$$\frac{l}{b} = \frac{\sin \psi}{\sin [180 - (\psi + \varphi - \varrho)]} = \frac{\sin \psi}{\sin (\psi + \varphi - \varrho)}$$

Stąd

$$l \sin (\psi + \varphi - \varrho) = b \sin \psi$$

Podstawiając to w /4/, znajdziemy:

$$-\frac{q}{2} f b \sin \psi + Q \sin \psi = 0$$

a po skróceniu przez $\sin \psi \neq 0$:

$$-\frac{q}{2} f b + Q = 0$$

i ostatecznie

$$Q = q \cdot f \cdot \frac{b}{2} = \text{pole } \triangle AKL \cdot q$$

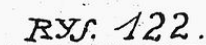
Z drugiej strony ciężar Q jest równy iloczynowi z polem $\triangle ABK$, pomnożonego przez q , czyli $Q = \text{pole } \triangle ABK \cdot q$, zatem $\text{pole } \triangle ABK = \text{pole } \triangle AKL$.

Tak więc widzimy, że SIŁA Z OSIĄGA MAXIMUM PRZY TAKIM KĄCIE φ , PRZY KTÓRYM PROSTA AK POŁOWI POLE $ABKL$.

Postarajmy się teraz wyznaczyć punkt L : praktycznie /rys. 122/.

W tym celu poprowadźmy dwie proste pomocnicze: jedną przez punkt B pod kątem ψ do AN ; nazwiemy ją prostą „kierunkową”^{x/}, oraz drugą przez punkt L , równoległą

^{x/} Prosta „kierunkową” dogodniej jest wykreślić, odkładając kąt $ABJ = \varphi + \varphi'$. Że tak jest, wynika to stąd: Niech ściana AB tworzy kąt β z poziomem /rys. 122/; wówczas



$\beta = \beta'$, wówczas wykreślimy "kierunkową" odkładając kąt $ABJ = 2\beta$.

$$\frac{KL}{AL} = \frac{\sin(\varphi - \varrho)}{\sin(\varphi + \varrho - \varrho)},$$

więc

$$Z = \text{pole } \triangle AKL \cdot q \cdot \frac{KL}{AL}.$$



Lecz pole trójkąta $AKL = \frac{1}{2} \overline{AL} \cdot \overline{KR}$, zatem

$$Z = \frac{1}{2} \overline{AL} \cdot \overline{KR} \cdot q \cdot \frac{KL}{AL} = \frac{1}{2} \overline{KR} \cdot \overline{KL} \cdot q.$$

Oznaczając, wreszcie, wysokość \overline{KR} przez f , a KL przez d , otrzymamy:

$$Z = \frac{1}{2} f \cdot d \cdot q.$$

Iloczyn $\frac{1}{2} f d$ wyraża pole trójkąta o podstawie d i wysokości f . Trójkąt ten możemy łatwo zbudować, zataczając łuk z punktu L promieniem $= KL$ do przecięcia się z AN w punkcie M ; widoczne jest, że pole trójkąta $KLM = \frac{1}{2} f d$; zatem oddziaływanie ściany na ziemię, a więc napór ziemi na ścianę Z jest równe polu trójkąta KLM pomnożonemu przez q .

Trójkąt „ KLM ” nazywać będziemy TRÓJKĄTEM NAPORU.

Zauważmy, że w zastosowaniu praktycznym powyższego wykresu nie potrzeba prowadzić wcale linii LH , AH i AK .

140. INNA BUDOWA. Gdy odcinek AN nie mieści się w granicach rysunku, to sposób określenia największego naporu ziemi, wskazany w par. poprzedzającym, jest niewykonalny. Wówczas należy postąpić inaczej /rys. 123/. mianowicie, po przeprowadzeniu kierującej BJ , trzeba zatoczyć półkole na AB , jak na średnicy, przez J poprowadzić równoległą do naziomu BN aż do punktu J_1 przecięcia się JJ_1 z AB

do AK . Punkt przecięcia się tej ostatniej z naziemem BN oznaczmy przez H , a punkt przecięcia się kierującej z AN -przez J .

Zgodnie z poprzednim: pola $\triangle AKB$ i $\triangle AKL$ mają być równe, a że pola $\triangle AKL$ i $\triangle AKH$ też są równe^{x/}, więc pole $\triangle AKB$ jest równe polu $\triangle AKH$.

Ponieważ, wreszcie, trójkąty ABK i AKH mają równe wysokości (względem podstaw BK i KH), więc wobec równości pól, $BK=KH$.

Oznaczmy $\overline{AJ}=a$, $\overline{AL}=b$, $\overline{AN}=c$, otrzymamy z trójkątów podobnych BJN i CLN :

$$\frac{BK}{KN} = \frac{JL}{LN} = \frac{b-a}{c-b} \dots\dots\dots/5/$$

Zaś z trójkątów podobnych AKN i LHN mamy:

$$\frac{KH}{HN} = \frac{AL}{LN} = \frac{b}{c-b};$$

stąd

$$\frac{KH+HN}{KH} = \frac{b+(c-b)}{b},$$

stąd, ponieważ $BK=KH$:

$$\frac{KN}{BK} = \frac{c}{b}$$

Porównując to z /5/ otrzymamy:

$$\frac{b-a}{c-b} = \frac{b}{c},$$

albo po uproszczeniu $b=\sqrt{ac}$.

^{x/}

Podstawa AK jest wspólna, a wierzchołki L i H leżą na równoległej do tej podstawy.

z J wyprowadzić prostopadłą do AB , a wreszcie zato-
czyć łuk koła o promieniu $= AD$ ze środka A ; przecię-
cie się AB z łukiem tym niech będzie punkt L_1 ; rów-
noległa do BN , przeprowadzona przez L_1 , wyznaczy
w przecięciu się z AN punkt L , ten sam, który zna-
leźliśmy w poprzednim paragrafie. Że tak jest istotnie,
wynika wprost z uwagi, że trójkąty AJJ_1 , ALL_1 , ANB
są podobne, a zatem pomiędzy odcinkami AJ_1 , AL_1 , AB
zachodzą te same stosunki, co pomiędzy AJ , AL , AN .

141. ROZKŁAD CIŚNIEŃ ZIEMI NA ŚCIANĘ OPOROWĄ. Z rys.
119 i 120 i wyjaśnić w par. 137 wynika bezpośrednio,
że napór Z ziemi na ścianę zależy od ciężaru G tej
bryły ziemi, która może mieć dążność do osuwania się;
ciężar ten zaś jest, jak wiemy, proporcjonalny do pola
trójkąta ABK , w którym AK oznacza płaszczyznę osuwo-
wą; zatem i napór ziemi Z jest proporcjonalny do pola
trójkąta ABK .

Rozważmy teraz rys. 123. Napór Z na ścianę AB jest,
jak mówiliśmy, proporcjonalny do pola trójkąta ABK ,
gdzie AK oznacza płaszczyznę osuwową.

Jeślibyśmy obliczyli napór ziemi na część ściany,
naprz. $A_y B$, otrzymalibyśmy, że napór ten Z_y będzie
proporcjonalny do pola trójkąta $A_y BK_y$. Ten ostatni
trójkąt jest podobny do trójkąta ABK .

We wzorze tym znane są wielkości α i c ; możemy więc wyznaczyć zen β , a stąd i punkt L ; następnie będziemy mogli poprowadzić prostą LK i AK ; znajdziemy w ten sposób, kąt osuwu φ , przy którym będzie Z max.

138. Można łatwo zbudować znaleziony wzór: $\delta = \sqrt{ac}$

Zatoczmy na AN /rys. 122/, jak na średnicy, półkole; przez punkt J poprowadzmy prostopadłą do AN , aż do przecięcia się z owym półkolem w punkcie C , i, wreszcie, zatoczmy z punktu A promieniem równym AC łuk. Przecięcie się tego łuku z AN da nam szukany punkt L . Wynika to z twierdzenia, że cięciwa AC jest średnią geometryczną średnicy koła i przyległego odcinka AJ .

Mając punkt L prowadzimy przezeń równoległą do kierunku BJ . Przecięcie się jej z BN daje punkt K ; jeśli poprowadzimy prostą KA , będziemy mieli położenie płaszczyzny osuwowej, przy której siła Z otrzyma wartość największą.

139. WYZNACZENIE ODDZIAŁYWANIA ŚCIANY OPOROWEJ NA ZIEMIĘ I ODWROTNIE: NAPORU ZIEMI NA ŚCIANĘ.

Uskutecznimy to drogą wykreślną.

W par. 137 mieliśmy wzór /2/:

$$Z = G \cdot \frac{\sin(\varphi - \varphi)}{\sin(\psi + \varphi - \varphi)}$$

gdzie G oznacza ciężar bryły AKB , który jest równy polu trójkąta AKL , pomnożonemu przez ciężar właściwy ziemi q . Z rysunku 122 mamy:

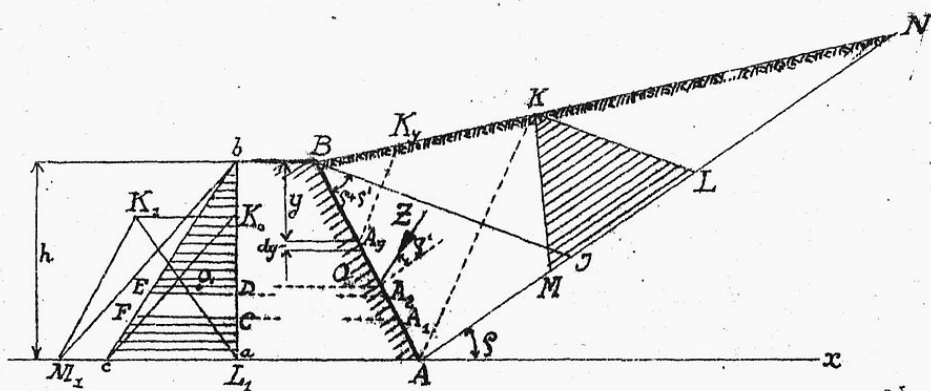
Ponieważ pola trójkątów podobnych mają się do siebie jak kwadraty odpowiednich boków lub wysokości, możemy więc powiedzieć, że

$$\frac{Z}{Z_y} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A_y B}^2}, \quad \text{lub} = \frac{h^2}{y^2} \quad \text{gdzie } h \text{ i } y$$

są to wysokości trójkątów ABK i $A_y B K_y$.

Oznaczając współczynnik proporcjonalności przez ξ , napiszemy więc

$$Z = \xi \cdot h^2 \quad \text{w podobny sposób}$$



RYS. 123.

$$Z_y = \xi \cdot y^2$$

wówczas dla części ściany, odpowiadającej wysokości $y+dy$, napiszemy:

$$Z_{y+dy} = \xi (y+dy)^2$$

Z tego wynika, że na element ściany na wysokości dy przypada napór:

$$Z_{dy} = Z_{y+dy} - Z_y = \xi(y+dy)^2 - \xi y^2 = \xi(dy^2 + 2y dy).$$

Odrzucając dy^2 , jako nieskończenie małą drugiego rzędu, otrzymamy:

$$Z_{dy} = 2\xi y dy$$

albo:

$$\frac{Z_{dy}}{dy} = 2\xi y.$$

Stosunek $\frac{Z_{dy}}{dy}$ jest to JEDNOSTKOWY NAPÓR ziemi w danem miejscu ściany, oznaczonem wysokością y . Nazywać będziemy taki jednostkowy napór CIŚNIENIEM.

Tak więc ciśnienie w dowolnem miejscu ściany jest proporcjonalne do odległości tego miejsca od powierzchni ziemi. Powiemy, że CIŚNIENIE ZIEMI NA ŚCIANĘ ROZKŁADA SIĘ LINJOWO i poczynając od zera - w punkcie najwyższym B - wzrasta do największej wartości w punkcie A .

Całkowity napór ziemi Z jest proporcjonalny do pola trójkąta KLM . Aby otrzymać ciśnienie w dowolnym punkcie ściany, trzeba trójkąt KLM przekształcić na równoważny mu trójkąt, o wysokości h .

Można to wykonać łatwo w sposób następujący:

Przenosimy trójkąt KLM tak, aby nowa podstawa jego $L_1 M_1$ przypadła na prostej poziomej x . Przez punkt L_1 /albo a / prowadzimy prostą pionową ab , punkt b łączymy z M_1 i przez punkt K_0 przecięcia się prostej $K_0 K_1$ /równoległej do x / z ab prowadzimy równoległą do $M_1 b$.

W przecięciu się z prostą x znajdziemy punkt c , który, gdy połączymy z b , otrzymamy trójkąt abc . Trójkąt ten daje szukany rozkład ciśnienia na ścianę AB wzdłuż jej wysokości. Trójkąt abc będziemy nazywali "trójkątem rozkładu ciśnień", lub wprost "trójkątem ciśnień". Z wykresu tego możemy korzystać przy wyznaczaniu działania ziemi na poszczególne części ściany; np. napór ziemi na część ściany A, A_2 jest proporcjonalny do pola trapezu, wyciętego z trójkąta ciśnień abc przez dwie równoległe do x , poprowadzone przez punkty A_1 i A_2 . Napór ten więc równa się polu $CDEF$ pomnożonemu przez q .
 $/q =$ ciężar właściwy ziemi/.

142. PUNKT PRZYŁOŻENIA NAPORU ZIEMI NA ŚCIANĘ. Kiedy poznaliśmy rozkład ciśnień na ścianę, łatwo odpowiemy, gdzie jest przyłożony napór na tę czy inną część ściany.

A więc, jeśli szukamy punktu przyłożenia naporu ziemi na ścianę AB /rys.123/, który należy traktować jako wypadkową sił ciągłych, jednostajnie wzrastających od A do B , to wypadkowa przejdzie przez środek ciężkości

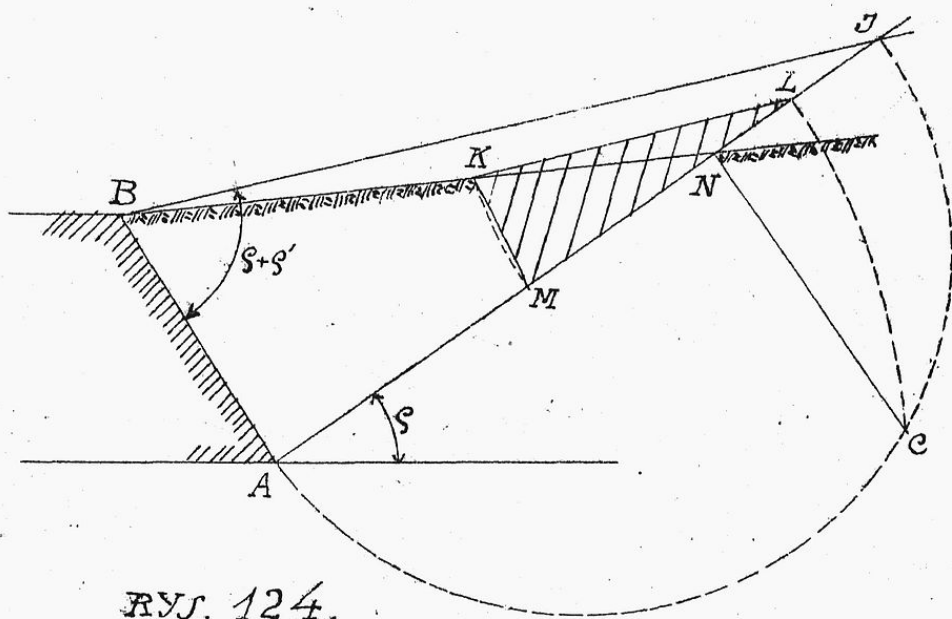
O_1 pola trójkąta ciśnień abc , czyli w odległości $\frac{h}{3}$ od podstawy. Prowadzimy zatem przez O_1 równoległą do

Ax aż do przecięcia się z AB w p. O . Punkt O jest punktem przyłożenia naporu. Ponieważ napór ziemi tworzy z normalną do płaszczyzny AB kąt tarcia $= \varphi'$, więc, odłożywszy kąt φ' naprawo od normalnej, znajdziemy

linję działania naporu ziemi.

W podobny sposób znaleźlibyśmy punkt przyłożenia naporu ziemi, naprz. na część ściany $A_1 A_2$. Punkt ten znajdzie się na AB na tej wysokości, na której znajdzie się środek ciężkości pola ciśnień $CDEF$. Co do wyznaczenia linii działania naporu, należy powtórzyć te same uwagi, co i dla ściany AB .

143. JEDEN ZE SZCZEGÓLNYCH PRZYPADKÓW. Korzystając z podanego w poprzednich paragrafach ogólnego sposobu znajdowania naporu ziemi na ścianę płaską, i zachowując podobne do poprzedniego oznaczenia, łatwo damy sobie radę w każdym innym przypadku.



Jako jeden z przykładów niech będzie taki: znaleźć