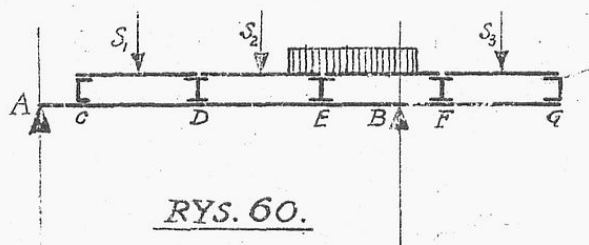


B. OBCIĄŻENIE POŚREDNIE.

64. Dotychczas rozważaliśmy te przypadki, w których na belkę, podpartą w dwóch punktach, działają siły, przyłożone bezpośrednio do belki.



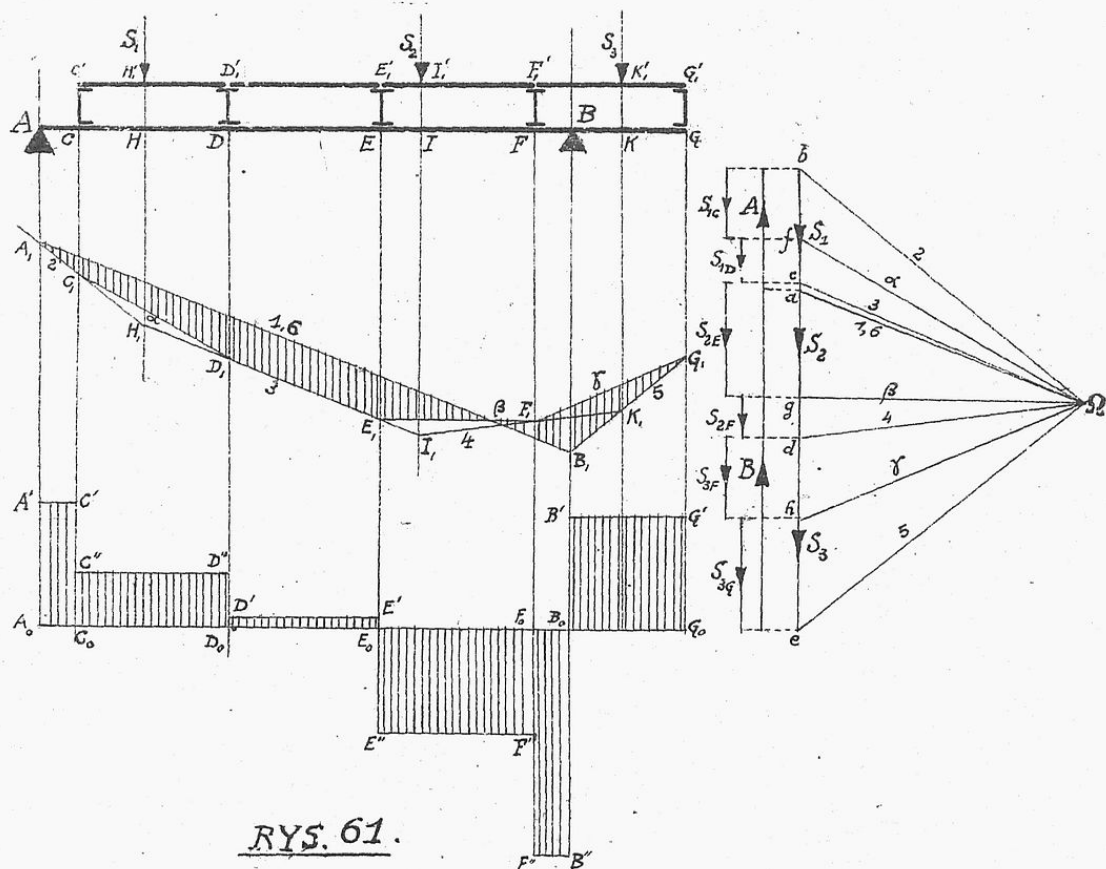
Teraz zbadamy przypadek, gdy obciążenie działa na belkę rozważaną za pośrednictwem beleczek poprzecznych C, D, E, F, G, \dots , jak to, zresztą, wyjaśnia dostatecznie rys. 60.

65. Rozpatrujemy dla przykładu OBCIĄŻENIE POŚREDNIE SIŁAMI SKUPIIONEMI S_1, S_2, S_3 /rys. 61/. W tym celu badamy z początku działanie siły S_1 . Siła ta działa bezpośrednio na belkę $C'D'$, wpływ jej natomiast na belkę główną AB ujawnia się jedynie przez podpórki CC' oraz DD' . Możemy zatem uważać, że zamiast siły S_1 mamy tylko jej dwie składowe S_{1C} i S_{1D} , przyłożone w przekrojach C i D belki AB . Składowe te znajdziemy łatwo zapomocą wieloboku sił i sznurowego, o bokach 2, 3, α , przy czem α oznacza bok zamykający.

Podobnie rozkładamy siłę S_2 na dwie składowe, działające w punktach E i F . Posiłkujemy się przytem rozpoczętymi poprzednio wielobokami; tak więc za bok przed siłą S_2 uważamy bok 3, kreślimy promień 4 oraz odpowia-

dający mu bok 4, a wreszcie budujemy bok zamykający β .
Promień β podzieli nam S_2 na szukane dwie składowe S_{2E}
i S_{2F} .

Zupełnie tak samo postępujemy z siłą S_3 , rozkładając ją na składowe S_{3F} i S_{3G} . Przytem bokiem przed siłą S_3 jest bok 4, bokiem za siłą - bok 5, zaś bokiem zamykają-



cym - bok γ .

Kiedy we wskazany sposób rozłożyliśmy siły S_1, S_2, S_3 , możemy zagadnienie nasze tak przedstawić: należy wykreślić pole momentów gnących oraz linię sił poprzecznych dla belki AB , obciążonej BEZPOŚREDNIO siłami: 1/ S_{1c} w przekroju C , 2/ S_{1D} - w D , 3/ S_{2E} - w E ; 4/ S_{2F} i S_{3F}

- w F , oraz 5/ S_{3G} — w G .

Widzimy więc, że zadanie nasze sprowadziliśmy do rozwiązanego w § 56. Należy tylko skorzystać z wykonanej dotychczas budowy.

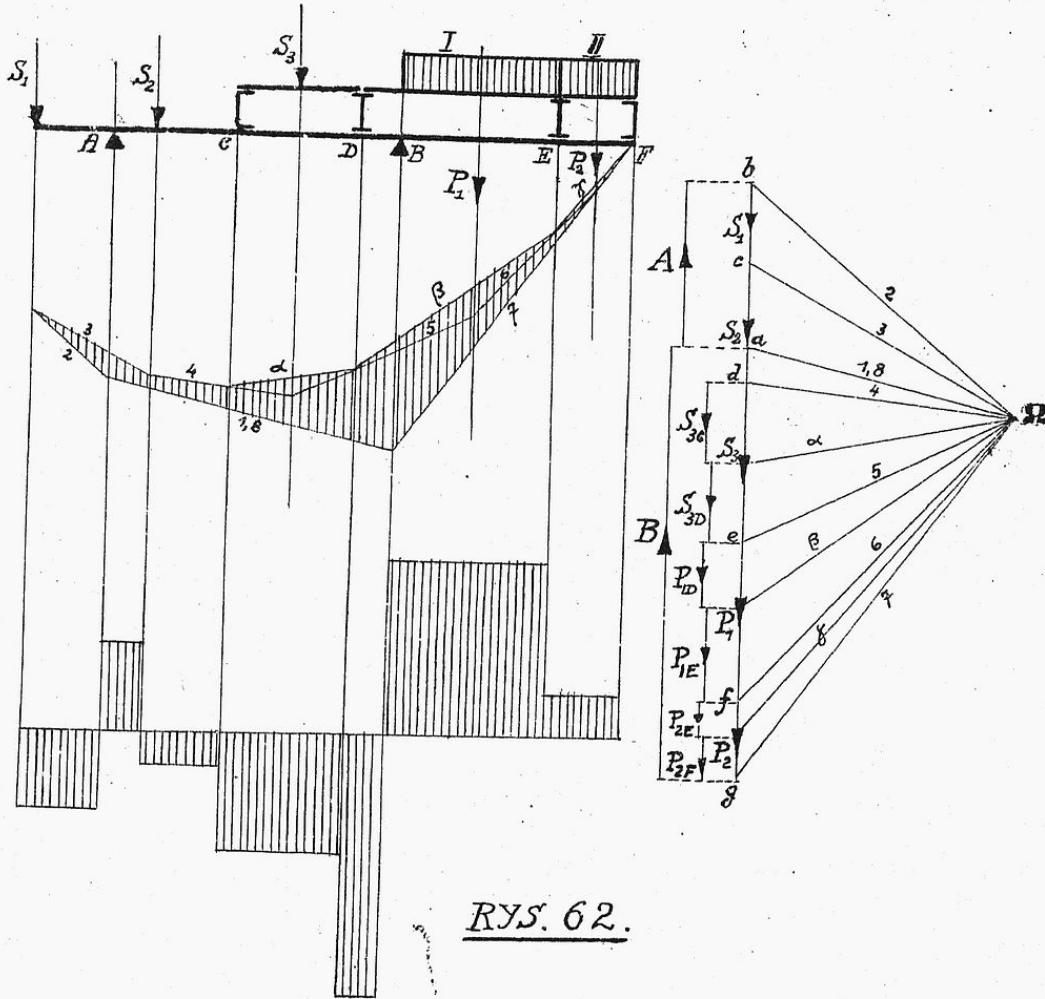
Rzut oka na rys. 61 pozwala nam stwierdzić, że za wielobok sznurowy dla wymienionego układu sił przy biegu nie Ω /tym samym, co poprzednio/, można uważać wielobok A, C, D, E, F, G, B, A_1 , złożony z gotowych już boków $2, \alpha, 3, \beta, \gamma, 5$. Łącząc punkty A_1 z B_1 , otrzymamy bok zamykający 1,6 owego wieloboku, a wtedy, poprowadziwszy promień 1,6, znajdziemy odpory A i B : $A = \overline{ab}$, $B = \overline{ea}$. Pole, ograniczone tym wielobokiem /zakreskowane na rys. 61/ przedstawia szukane pole momentów.

Z powyższych rozważań widzimy, że dla otrzymania pola momentów w przypadku obciążenia pośredniego, należy tak postępować, jakgdyby siły S_1, S_2, S_3 działały bezpośrednio na belkę AB ; w tem założeniu wykreślić odpowiedni wielobok sznurowy i połączyć prostymi α, β, γ punkty przecięcia się boków owego wieloboku sznurowego z pionowymi, przechodzącymi przez węzły C, D, E, \dots

66. Wykres sił tnących otrzymamy tak samo, jak w § 59 , pamiętając wciąż o tem, że nie mają dla nas znaczenia istotnie działające siły S_1, S_2, S_3 , a tylko ich składowe w punktach oparcia beleczek CC', DD', \dots

67. SIŁY CIĄGŁE. Rozumowania nasze dla obciążenia

ciągłego będą zupełnie podobne do przytoczonych w par. 65 i 66. Wyjaśnia je przykład, rozwiązany na rys. 62. Mamy tu jednocześnie do czynienia z siłami skupionymi S_1, S_2, S_3 oraz z siłą ciągłą P . Z tych dwie pierwsze działają bezpośrednio, dwie pozostałe - pośrednio.



RYS. 62.

Wykreślamy naprzód wieloboki sił i sznurowy dla sił S_1, S_2 przy dowolnym biegunie Ω ; odpowiednie promienie i boki są: 2, 3, 4. Następnie rozkładamy siłę S_3 na dwie składowe S_{3c} i S_{3d} , o pionowych linjach działania, przecho-

dzających przez C i D . Robimy to zapomocą sposobu, wyłożonego w par.65, korzystając przytem z tego samego biegunu Ω i z boku 4 - jako boku przed siłą S_3 . Bok zamykający oznaczony jest na rys.62 przez α .

Dalej dzielimy obciążenie ciągłe P na dwie części, prowadząc linię podziału przez podpórkę E ; zastępcze siły skupione są P_1 i P_2 ; rozłożymy każdą z nich na składowe P_{1D} , P_{1E} i P_{2E} , P_{2F} , przyczem postępujemy tak samo, jak w przypadku obciążenia skupionego. Rozkład ten wykonujemy zapomocą dalszego ciągu wieloboku sznurowego, rozpoczętego poprzednio. Wypadnie tylko dobudować do niego nowe boki 5, 6, 7 oraz boki zamykające β , γ .

Tak więc możemy w danym razie uważać, że belka AB jest obciążona bezpośrednio siłami $S_1, S_2, S_{3C}, S_{3D}, P_{1D}, P_{1E}, P_{2E}, P_{2F}$; dla nich trzeba wyznaczyć wielobok sznurowy. Oczywiście jest nim 1, 2, 3, 4, α , β , γ , 7, 8, przyczem 1,8 oznacza bok zamykający, który pozwoli określić odpory A i

B . Pole, ograniczone powyższym wielobokiem, jest szukanem polem momentów; na rysunku pole momentów dla belki ABF jest zakreskowane.

Sposób otrzymania wykresu sił poprzecznych nie wymaga bliższego omówienia, gdyż nie różni się on od tego sposobu, który przytaczaliśmy w par.66.

68. BELKI KONSOLOWE, znane również pod nazwą belek o podporach wiszących, belek rozciętych, belek Gerbera, belek wielopodporowych /podpór > 2 /.

Mówić tu będziemy tylko o belkach statycznie wyznaczalnych, poddanych działaniu sił, znajdujących się we wspólnej z osią belki płaszczyźnie.

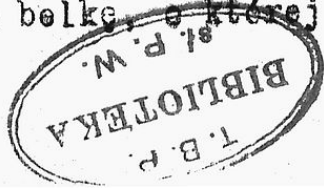
Aby lepiej zrozumieć cel i treść belek konsolowych, rozważmy zwykłą belkę, podpartą na dwóch podporach; siły niech będą dowolnie skierowane, byleby znajdowały się w jednej płaszczyźnie. Oddziaływania tych podpór wyznaczymy dokładnie wtedy, kiedy jedna z nich jest tego rodzaju, że może okazać odpór o ŚCIŚLE WYZNACZONYM KIERUNKU /naprz. przy podparciu belki na wałku, na wózku, lub na ostrzu/, druga zaś podpora powinna być wykonana na sposób przegubu, który może okazać odpór w DOWOLNYM KIERUNKU.

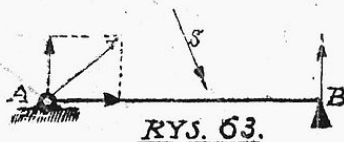
Dla ułatwienia dalszych rozumowań nazwijmy podpory o ściśle wyznaczonym kierunku działania - PODPORAMI 1-go RODZAJU, zaś podpory, oddziałujące w dowolnym kierunku, PODPORAMI 2-go RODZAJU.

Wykreślnie już wiemy, jak wyznaczać w poprzednim przykładzie odpory; wiemy również, że odpowiedź będzie tylko jedna /porównaj §56 /.

Analitycznie sprawa powyższa da się wyjaśnić w następujący sposób. Podpora 1-go rodzaju daje się zastąpić jedną siłą o określonej linii działania /rys.63 - podpora B /; podpora 2-go rodzaju może być zastąpiona dwiema siłami z obranymi linjami działania /rys.63 - podpora A /.

Na belkę, o której poprzednio mówiliśmy, działają przez





RYS. 63.

danych sił zewnętrznych jeszcze 3 siły odporowe ; siły te co do wartości są nam nieznane. Mamy więc 3 niewiadome. Do wyznaczenia tych niewiadomych potrzeba trzech równań, które otrzymamy z 3 warunków równowagi belki, poddanej działaniu sił zadanych i odporów. Z tych właśnie równań znajdziemy niewiadome odpory.

69. Gdybyśmy belkę, o której poprzednio była mowa, podparli nie w dwóch, lecz w trzech punktach, lub w większej ich liczbie, albo dali choćby dwie podpory, lecz obie drugiego rodzaju, wówczas ścisłe określenie odporów drogą statyki będzie niewykonalne. Belka taka będzie statycznie niewyznaczalna, gdyż więcej mamy niewiadomych niż równań. Aby nieokreśloność odporów usunąć, przecinamy belkę taką na pewną liczbę części i w odpowiedni sposób ustawiamy jedne części na zadanych podporach, STAŁYCH, inne zaś części belki opieramy na zwieszających się końcach tamtych części; te ostatnie podpory nazwiemy WISZĄCEM. Podpory wiszące mogą być wykonane zarówno jako podpory I-go lub 2-go rodzaju.

Poznajmy zależność pomiędzy liczbą podpór stałych i liczbą podpór wiszących, jeśli belka ma być statycznie wyznaczalna. Niech, dajmy na to, będzie S podpór sta-

łych, w tem S_1 podpór 1-go rodzaju i S_2 - 2-go rodzaju, oraz w podpór wiszących, w tem w_1 pierwszego rodzaju i w_2 - drugiego rodzaju. Jeśli jest w podpór wiszących, zatem cała belka jest w W miejscach przecięta na $(w+1)$ części.

Niewiadomych sił /zastępujących działania podpór/ będzie, zgodnie z poprzedniem, S_1+2S_2 dla podpór stałych i w_1+2w_2 dla podpór wiszących, a razem

$$S_1+2S_2+w_1+2w_2.$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych należy skorzystać z warunków równowagi poszczególnych części belki.

Ponieważ tych części jest $w+1$, a dla każdej z nich możemy napisać 3 warunki równania - /suma rzutów na jedną oś, - na drugą oś i suma momentów statycznych/, więc razem ustawimy 3 $(w+1)$ równań.

Jeśli zadanie ma być określone, powinien istnieć związek: $S_1+2S_2+w_1+2w_2=3(w+1)$ albo, ponieważ $W=w_1+w_2$, więc

$$S_1+2S_2-2w_1-w_2=3 \quad (S_1-w_1)+2(S_2-w_1)=3$$

Tak sprawa się przedstawia, jeśli na belkę działają siły, znajdujące się w jednej płaszczyźnie, lecz dowolnie skierowane.

70. Rozpatrzmy teraz przypadek, kiedy wszystkie siły są pionowe, jak to zazwyczaj mieć będziemy przy mostach;

również niech podpory 1-go rodzaju okazują oddziaływania w kierunku pionowym. Wówczas podpory 2-go rodzaju okażą odpory pionowe.

W takim razie każdy z odporów, niezależnie od rodzaju podpory, możemy zastąpić jedną tylko siłą pionową. Niewiadomych zatem będzie:

$$S_1 + S_2 + W_1 + W_2 = S + W.$$

Do wyznaczenia tych niewiadomych możemy utworzyć po dwa równania dla każdej części belki /suma rzutów na oś pionową i suma momentów statycznych/. Ponieważ podpór wiszących jest w , zatem części będzie $w+1$ i równań niezależnych utworzymy $2(w+1)$. Jeśli więc belka ma być statycznie wyznaczalna, powinno być

$$S + W = 2(w+1), \quad \text{albo}$$

$$S - W = 2$$

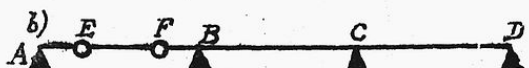
t.j. podpór stałych powinno być o dwie więcej, niż wiszących. Zaznaczyć tu trzeba, że warunek powyższy powinien być zachowany nie tylko dla całej belki, lecz dla każdej części, na które belka jest podzielona; przyczem w miejscu podpór wiszących należy przyłożyć odpowiednie siły zewnętrzne.

71. Wyjaśnimy powyższe na przykładach.

Rozpatrzmy belki, przedstawione na rys.64.

Dla pierwszej z nich $s=4$, /A,B,C,D/ $w=2$ /E,F/.

więc $s-w=2$; dla części AE mamy $s=2$ /A i B/; $w=0$,
więc $s-w=2$ i t.d. Z tego wynika, że belka /a/ jest sta-
tycznie wyznaczalna.



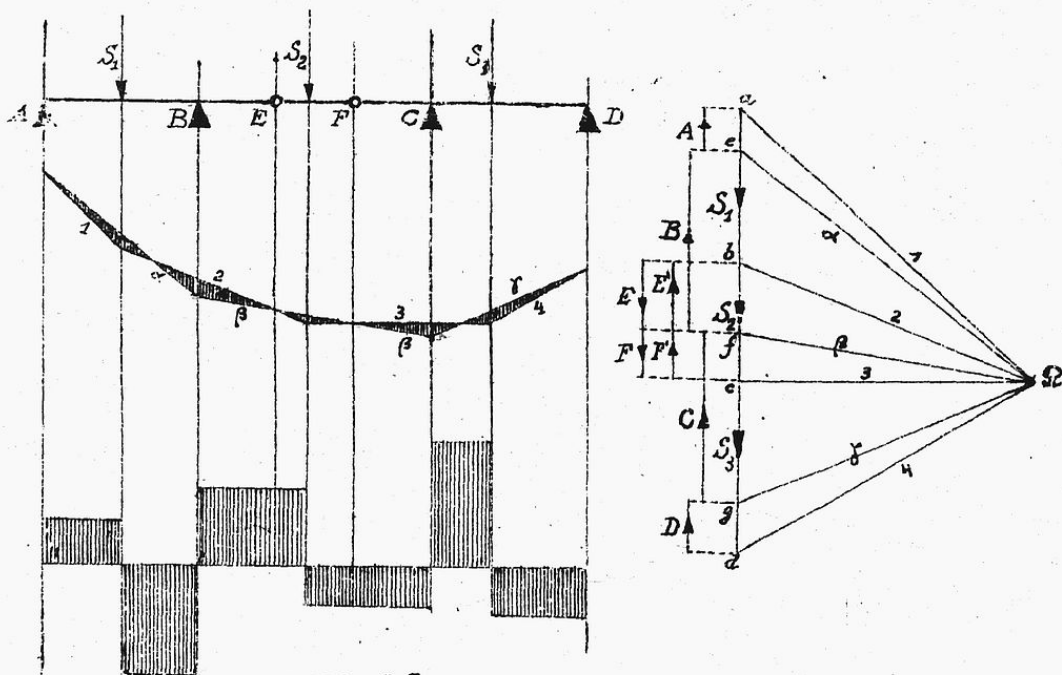
RYS. 64.

Dla belki drugiej /b/
mamy $s=4$, $w=2$, $s-w=2$;
lecz dla części AF: $s=1$,
 $w=1$; $s-w=0$; tak samo

dla części FD $s=3$, $w=0$; $s-w=3$.

Belka /b/ jest więc statycznie niewyznaczalna.

72. Pole momentów dla belki konsolowej. Dla przykładu
rozpatrzmy belkę, przedstawioną na rys.65, obciążoną si-



RYS. 65.

łami pionowymi S_1 , S_2 , S_3 . Belka składa się z trzech czę-

ści, spoczywających na czterech podporach stałych:

A, B, C i D i dwóch podporach wiszących E i F.

Rozpatrzmy część belki EF, wspartą na wiszących podporach wraz z siłami do niej przyłożonemi. Jeśli jedna z tych podpór jest 1-go rodzaju /§ 68/, a oddziaływanie jej będzie pionowe, wówczas obydwa odpory będą pionowe, gdyż siły zewnętrzne, obciążające daną belkę, mają kierunek pionowy. Aby znaleźć odpory należy wykreślić dla siły S_2 wielobok sił oraz odpowiedni wielobok sznurowy /z bokami 2,3/; następnie należy połączyć punkty przecięcia się boków skrajnych /2 i 3/ wieloboku sznurowego z linjami działania odporów E i F linią prostą, otrzymamy bok zamykający β . Równoległy do tego boku promień β podzieli siłę S_2 na dwie: $\overline{f\beta} = E'$ i $\overline{cf} = F'$. Odpory te idą z dołu do góry.

Przechodzimy następnie do jednej z belek skrajnych, naprz. do belki lewej. Na belkę tę, podpartą w punktach A i B, działają siły: S_1 i nacisk końca belki EF; nacisk ten = poprzednio znalezionemu odporowi E' , skierowany jest z góry na dół i w wieloboku sił może być przeestawiony odcinkiem $\delta f = E$.

Zatem na belkę AB działają siły S_1 , E oraz odpory nieznanne A i B. Aby znaleźć odpory, postępujemy w sposób, we właściwym miejscu wyjaśniony. Ustawiamy siły w

szeręg, w którym niewiadome staną po brzegach szeregu: A, S_2, E, B . Siły S_2 i E w wieloboku sił już są zaznaczone. Prowadzimy promienie w wieloboku sił i boki wieloboku sznurowego w takim porządku: za siłą A i przed siłą S_2 /do punktu a / - promień i bok 1; za siłą S_2 i przed siłą E /do punktu b / - promień i bok 2; za siłą E i przed siłą B /do punktu f / - promień i bok β . Zauważyć tu należy, że zarówno w wieloboku sił, jak i w wieloboku sznurowym - podczas rozpatrywania belki EF - były już wykreślone promienie i boki 2 i β ; teraz dodaliśmy tylko promień i bok 1.

Następnie przez punkt przecięcia się boku 1 z linią działania odporu A i przez punkt przecięcia się boku β z linią działania odporu B prowadzimy bok α , który będzie bokiemy zamykającym. Promień α , równoległy do boku α , w wieloboku sił daje nam punkt e , który będzie początkiem siły A i końcem B . Stąd znajdziemy: odpór $A = \overline{ea}$, odpór $B = \overline{fe}$. Jednocześnie widzimy, że wielobok sił jest $abfea$ oraz że wielobok sznurowy tworzą boki: 1, 2, β , α .

Zupełnie w ten sam sposób rozpatrzemy belkę prawą FD : na nią działają siły S_3 , w końcu F siła $F = \overline{fc}$ /w wieloboku sił/ oraz odpory C i D . Skorzystamy z gotowych już promieni i boków i po dopełnieniu promieniami i bokami 4, γ otrzymamy: odpór $C = \overline{gf}$, odpór

$D = \overline{d_g}$, wielobok sił $fcdgf$, oraz wielobok sznurowy, utworzony z boków: β , 3, 4, γ ; γ jest tu bokiem zamykającym.

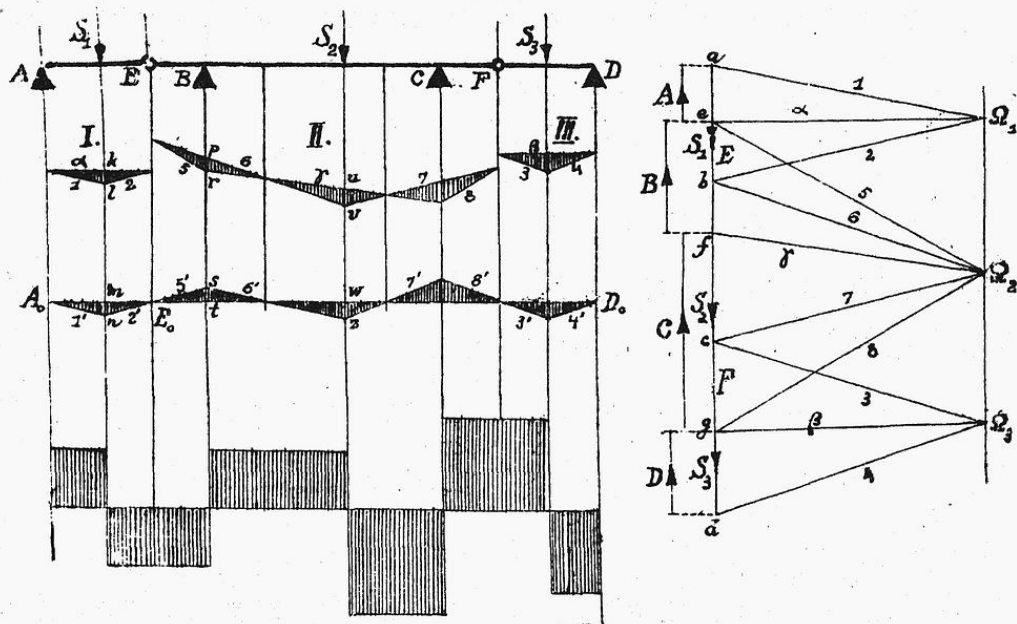
Ostatecznie więc otrzymujemy, że pole momentów dla całej belki AD jest ograniczone wielobokiem sznurowym, o bokach 1, 2, 3, 4, γ , β , α .

73. Budowa WYKRESU SIŁ TNĄCYCH dla belki konsolowej nie nastrocza żadnych trudności. Należy wykonać wykres w sposób zwykły, pamiętając, że odpory działające w podporach wiszących, jako równe i odwrotnie skierowane, nie wpływają wcale na zmianę siły tnącej. Nie znaczy to jednak, że siły tnące nie zależą od owych podpór; tak nie jest, można dostrzedz bowiem łatwo, że odpory A, B, C, D, są zależne od rozstawienia podpór wiszących, a od oddziaływań tych zależą znowu siły tnące/.

74. INNY SPOSÓB wykreślenia pola momentów: na przykładzie par. poprzedzającego dostrzegamy, że, obierając dla wszystkich części belki przegubowej wspólny biegun Ω , otrzymujemy wielobok sił o promieniach tworzących ze sobą bardzo ostre kąty, co może spowodować niedokładności przy obliczaniu momentów gnących z wieloboku sznurowego.

Niedogodności tej unikniemy, gdy dla każdej części belki konsolowej obierzemy inny biegun, korzystając zresztą wciąż z tego samego wieloboku sił. Otrzymamy wtedy dla każdej czę-

ści belki wielobok sznurowy, niezależny od innych wielo-



RYS. 66.

boków. Aby jednak każdy z tych wieloboków dawał wartości momentów gnących w tej samej skali, należy obrać bieguny na jednej prostej, równoległej do linii sił /odległość biegunowa jest wtedy jednakowa dla wszystkich wieloboków/.

Na rys.66 mamy przykład, rozwiązany w sposób powyższy. Rozważania zaczynamy od belek skrajnych AE i FD, gdyż mamy w nich tylko po dwie niewiadome, mianowicie po jednym oddziaływaniu stałej podpory i po jednym - wiszącej podpory.

Dla belki AE obieramy biegun Ω_1 i znany sposób znajdujemy odpory $A = e\bar{a}$ i $E = \bar{b}e$. Potem przechodzimy do belki FD: odmierzamy na linii sił odcinek $bc = S_2$ a dalej $cd = S_3$; następnie obieramy biegun Ω_3 i znowu

sposobem znanym wyznaczamy siły $D=\bar{d}g$ i $F=\bar{g}c$.

Wreszcie rozpatrujemy belkę środkową EF. Robimy to, obrawszy biegun \mathcal{R}_2 , pomiędzy \mathcal{R}_1 i \mathcal{R}_3 . Podobnie, jak poprzednio, znajdziemy jedyne dwa niewiadome-odpory B i C. Pola momentów dla poszczególnych części belek są: dla belki AE - pole I, dla belki EF - pole II, dla belki FD - pole III. Aby dogodniej było korzystać z pól momentów, sprowadzamy je często do jednej osi. Wówczas postępujemy tak:

Prowadzimy prostą A_oD_o , równoległą do osi belki, i od punktów przecięcia się jej z linjami działania sił i linjami podpór odmierzamy odpowiednie wartości momentów, odczytane z pól I, II, III. Tak np. w przekroju, na który działa siła S_1 , mamy moment gnący $= kl$, odcinamy więc od osi A_oD_o $mn=kl$. Tak samo $st=pr$, $wz=uv$ i t.d. Łącząc ze sobą prostymi znalezione w ten sposób punkty

A_o, n, E_o, s, z, \dots , otrzymamy wielobok, który ogranicza pole momentów, sprowadzone do osi A_oD_o .

Wykres sił tnących wyznaczamy tak samo, jak w § 73.

ROZDZIAŁ IV.

ŚRODEK SIŁ I ŚRODEK CIEŻKOŚCI.

75. ŚRODEK DWUCH SIŁ. Przypuśćmy, że do punktów A i B dowolnego ciała sztywnego są przyłożone dwie siły S_1, S_2 . Niech siły te będą jakiekolwiek, byleby tylko leżały w jednej