ciąg $\{z_m\}$, będący podciągiem ciągu $\{x_n\}$, zaliczając do ciągu $\{z_n\}$ te wyrazy ciągu $\{x_n\}$, dla których spełniony jest związek:

$$z_n = x_n \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } f(x_n) - y_n > 0. \tag{6-12}$$

Teza. Funkcja

$$\frac{1}{\int_a^b f(t)\,dt} f(x)$$

jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa dla ciągu $\{z_n\}$.

Dowód powyższego twierdzenia jest natychmiastowy.

## 6.4. MODELOWANIE ODMIENNYCH ORGANIZACJI MASZYN CYFROWYCH

Omówiona w punkcie 6.1 technika interpretacyjna jest przydatna do modelowania na UPMC dowolnych kodów rozkazowych. Przypuśćmy, że projektując nową maszynę cyfrową chcemy stwierdzić użyteczność kodu rozkazowego tej maszyny. Dokonujemy tego na dwóch drogach:

1) przez ułożenie programów i podprogramów w kodzie budowanej maszyny,

2) poprzez sprawdzenie na posiadanej UPMC ułożonych programów i podprogramów.

Mogłyby się wydawać, że punkt 1) jest wystarczającą kontrolą. Jak wskazuje jednak doświadczenie, samo ułożenie programu nie wystarcza, dopiero po sprawdzeniu programu na maszynie można powiedzieć, że działa on rzeczywiście poprawnie.

## 6.5. MODELOWANIE UKŁADÓW DYNAMICZNYCH

Zdefiniujemy najpierw pojęcie układu dynamicznego.

Definicja 1. Przez układ dynamiczny będziemy rozumieli taki i tylko taki układ materialny, dla którego istnieje skończony układ funkcji względem czasu, opisujących jednoznacznie stan układu w danej chwili.

Należy podkreślić, że funkcje opisujące układ nie muszą być dane w jawnej postaci. Mogą to być np. rozwiązania pewnych równań różniczkowych względem czasu, z danymi warunkami początkowymi. Z układami dynamicznymi mamy do czynienia zarówno w automatyce, biologii, socjologii, jak i ekonomii. W dalszych rozważaniach ograniczymy się do układów ekonomicznych, ze względu na możliwość modelowania tych ostatnich na małych UPMC.

W modelach ekonomicznych będziemy rozróżniali następujące układy względnie odosobnione:

1) układy produkcyjne,
2) układy rozdzielcze,
3) układy opóźniające,
4) układy sterujące (planujące),

przy czym będziemy zakładali, że zarówno układy produkcyjne, jak i rozdzielcze działają natychmiastowo. Rzeczywistość zaś będziemy modelowali poprzez łączenie układów produkcyjnych i rozdzielczych z odpowiednimi układami opóźniającymi.

Wejścia i wyjścia do trzech pierwszych rodzajów układów mogą być zarówno wejściami i wyjściami rzeczowymi (np. wejścia surowcowe czy energetyczne), jak i wejściami i wyjściami informacyjnymi.

Uwaga: W modelach ekonomicznych przyjmuje się, że kredyt jest informacją.

Układ planujący jest to układ, który ma wyjścia tylko informacyjne; wyjścia te sterują układami rozdzielczymi, które z kolei wykonują decyzje podziału surowców, energii, półfabrykatów i siły roboczej między odpowiednie układy produkcyjne. W zależności od zmian wartości „wektor funkcji" opisującej działania każdego z układów rozdzielczych, realizujemy różne polityki gospodarcze.

Układy produkcyjne są opisane dwoma rodzajami funkcji:

1. Produkcja jest opisywana za pomocą ważonego minimum[1]), ze stanów wejść.

2. Współczynniki zużycia wyposażenia produkcyjnego są opisywane za pomocą funkcji ciągłych względem czasu wykorzystania. W najprostszym przypadku współczynniki te są iloczynami ilości produkcji przez pewne stałe zużycia.

Układy opóźniające są opisywane przez funkcje identycznościowe, przesunięte w czasie o stałą opóźnienia. Układ planujący jest najbardziej złożonym układem, poza trywialnym przypadkiem, kiedy wyjścia tego układu przyjmują stałe wartości, bez względu na stan wejść.

Przy modelowaniu układów dynamicznych należy traktować je jako układy względnie odosobnione. Wpływ świata zewnętrznego na model uwzględniamy bądź poprzez przyjęcie pewnych wartości średnich zaburzeń powodowanych przez wejścia niesterowane na układ, bądź przez przyłożenie zaburzeń losowych z hipotecznie przyjętym rozkładem (punkt 6.3).

Omówienie szczegółowo konkretnego przykładu zajęłoby zbyt dużo miejsca, dlatego też zainteresowanych czytelników odsyłamy do pracy H. Greniewskiego (Bibliografia [5]). Zaprogramowanie przedstawionych wyżej funkcji, po zapoznaniu się z poprzednimi rozdziałami, czytelnik z łatwością sam przeprowadzi. Ze swej strony omówimy kilka spraw związanych z samym procesem układania programów modelujących układy dynamiczne.

Przy bardziej złożonych układach dynamicznych dość trudno narysować szczegółowy schemat blokowy układu, dla ułożenia programu zaś konieczna jest bardzo szczegółowa znajomość wszystkich połączeń. Trudność tę można ominąć przez zastąpienie schematu blokowego zero-jedynkową macierzą połączeń (Bibliografia [5]). Przyporządkowania tego dokonujemy w sposób następujący: niech układ dynamiczny składa się z $n$ układów względnie odosobnionych $V_1, V_2, \dots, V_n$. Świat zewnętrzny będziemy traktowali jako dodatkowy układ względnie odosobniony. Następnie wypiszemy kolejno poziomo i pio-

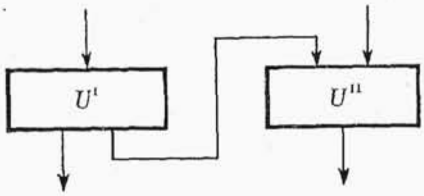
---

([1]) Przez ważone minimum $n$ liczb $x_1, \dots, x_n$ z wektorem wag $a_1, \dots, a_n$ rozumiemy funkcję,

$$P(x_1, \dots, x_n) = \min\,(a_1x_1, a_2x_2, \dots, a_nx_n).$$

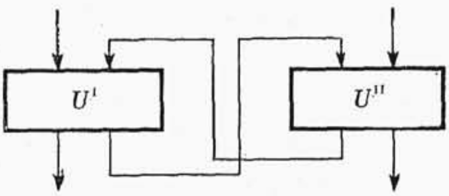
W ekonomii składowe wektora wag $a_1, \dots, a_n$ noszą nazwę współczynników technologicznych.

nowo wszystkie układy względnie odosobnione. Poziomo wypisane w wierszu układy będziemy traktowali jako wejścia. Pionowo wypisane w kolumnie układy będziemy traktowali jako wyjścia. Jeśli wyjście z $i$-tego układu wchodzi na wejście do $j$-tego układu to



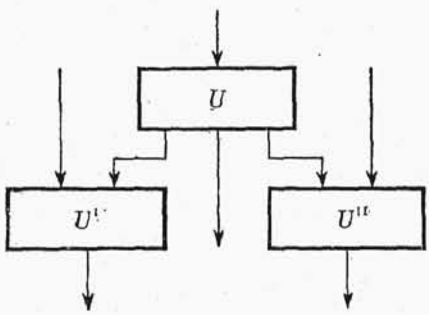

| wyjście \ wejście | na zewnątrz | $U^{I}$ | $U^{II}$ |
|---|---|---|---|
| z zewnątrz | 0 | 1 | 1 |
| $U^{I}$ | 1 | 0 | 1 |
| $U^{II}$ | 1 | 0 | 0 |

Rys. 6-5.




| wyjście \ wejście | na zewnątrz | $U^{I}$ | $U^{II}$ |
|---|---|---|---|
| z zewnątrz | 0 | 1 | 1 |
| $U^{I}$ | 1 | 0 | 1 |
| $U^{II}$ | 1 | 1 | 0 |

Rys. 6-6.

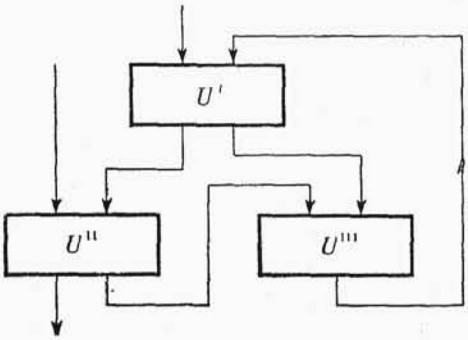



| wyjście \ wejście | na zewnątrz | $U$ | $U^{I}$ | $U^{II}$ |
|---|---|---|---|---|
| z zewnątrz | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $U$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| $U^{I}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $U^{II}$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

Rys. 6-7.

na przecięciu $i$-tego wiersza i $j$-tej kolumny stawiamy jedynkę, jeśli zaś wyjście z $i$-tego układu nie wchodzi na wejście $j$-tego układu to stawiamy zero. Na rysunkach 6-5÷6-8 podane są przykłady układów i odpowiadających im matryc.

W przypadku gdy układ względnie odosobniony wchodzący w skład naszego układu działa jako predykat, można zbudować macierz, jak na przykładzie podanym na rys.



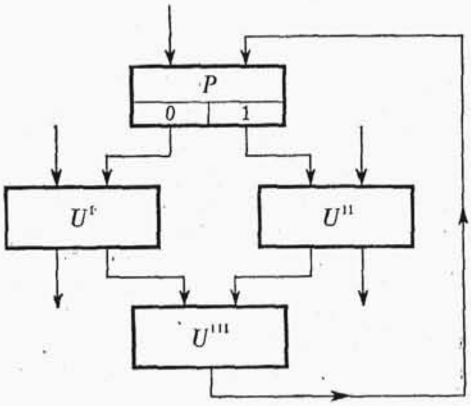

wejście

wyjście

| | na zewnątrz | $U^{I}$ | $U^{II}$ | $U^{III}$ |
|---|---|---|---|---|
| z zewnątrz | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $U^{I}$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $U^{II}$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $U^{III}$ | 0 | 1 | 0 | 0 |

Rys. 6-8.

6-9, gdzie przez $P$ oznaczyliśmy układ względnie odosobniony, będący predykatem, a przez $p$ oznaczyliśmy zmienną logiczną odpowiadającą spełnieniu warunków określonych przez predykat $P$, przez $\bar{p}$ oznaczamy funkcję $1-p$.




wejście

wyjście

| | na zewnątrz | $P$ | $U^{I}$ | $U^{II}$ | $U^{III}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| z zewnątrz | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $P$ | 0 | 0 | $\bar{p}$ | $p$ | 0 |
| $U^{I}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $U^{II}$ | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $U^{III}$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Rys. 6-9.

Tak zbudowaną matrycę możemy traktować jako skalę logiczną dla wywołania podprogramów, przy założeniu, że układy względnie odosobnione ustawiliśmy w kolejności zgodnej z zależnościami między wzorami opisującymi poszczególne układy względnie odosobnione.

Pozostaje jeszcze do omówienia cel, w jakim budujemy modele układów dynamicznych. Cel ten może być trojaki:

1. Badanie zachowania się stabilności układu w zależności od charakteru sterowania.

2. Badanie wpływu poszczególnych wyjść informacyjnych na działania sterowania i ewentualna eliminacja tych wyjść informacyjnych, których wpływ na działanie sterowania można uznać za mały.

3. Badanie wpływu centralnego układu sterowania na działanie różnych grup układów względnie odosobnionych naszego układu dynamicznego i ewentualne opracowa-

nie lokalnego sterowania dla pewnych autonomicznych grup układów względnie odosobnionych.

O ile badania omówione w punkcie 1 są stosunkowo proste i w zasadzie dysponujemy odpowiednimi kryteriami dla tych badań, o tyle dla badań określonych w punktach 2 i 3 nie ma dotychczas jakichś ogólnych kryteriów i wymagają one za każdym razem indywidualnego podejścia.

Wśród wielu techników panuje przekonanie, że właściwymi urządzeniami do badania układów dynamicznych są maszyny analogowe, nie zaś maszyny cyfrowe. Wydaje się, że w tym miejscu należałoby skorygować ten pogląd. W przypadku małych układów dynamicznych stosowanie maszyn analogowych daje dobre rezultaty, w przypadku układów bardziej złożonych maszyny analogowe nie dają zadowalających rezultatów, ze względu na małą (ograniczoną) dokładność obliczeń. Ponadto przy projektowaniu urządzeń analogowych do badania bardziej złożonych układów dynamicznych trzeba wykonać obliczenia projektowe na UPMC. Tego rodzaju postępowanie mija się z celem.

## 6.6. MASZYNA CYFROWA A CYBERNETYKA

Cybernetyka, nauka o sterowaniu i łączności w maszynach, organizmach żywych i społeczeństwach, w znacznej swej części zajmuje się budowaniem modeli (w rozumieniu definicji podanej w punkcie 6.0) różnorakich zjawisk zachodzących bądź w organizmach żywych, bądź w społeczeństwach. Modele częściowe lub całościowe organizmów żywych pozwalają nieraz poznać hipotetyczny mechanizm zjawiska. Ponadto badanie modeli pozwala niejednokrotnie zaplanować doświadczenie, które to z kolei pozwoli rozstrzygnąć, jak dane reakcje zrealizowała przyroda.

UPMC stały się obecnie podstawowym instrumentem badań cybernetycznych. Cyfrowe modelowanie wielu procesów badanych przez cybernetykę jest dziś metodą niemal klasyczną. Jako pierwsi zastosowali do badań cybernetycznych UPMC amerykańscy matematycy B.G. Farley i W.A. Clark, którzy prowadzili badania nad układami samoorganizującymi się. Użycie UPMC jako instrumentu modelowania z reguły pozwala poważnie zredukować koszt i czas badań. Znacznie łatwiej ułożyć jest program dla UPMC niż budować skomplikowany analog.

Dla bliższego wyjaśnienia zastosowania UPMC do badań cybernetycznych omówimy program modelujący urządzenie zwane homeostatem Ashbiego (homeostaza, tj. zdolność przywracania przez organizm chwiejnej równowagi).

Prostym modelem matematycznym zjawiska homeostazy jest układ czterech równań jednorodnych algebraicznych liniowych:

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} x_i = 0, \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{6-13}$$

którego macierz spełnia następujące warunki:

1. Wyznacznik macierzy $||a_{ij}||$ jest zerem:

$$|a_{ij}| = 0.$$

2. Wyrazy głównej przekątnej macierzy są co do wartości bezwzględnej znacznie większe od pozostałych wyrazów macierzy.

3. Minory główne macierzy są różne od zera i ich bezwzględna wartość jest bliska bezwzględnej wartości wyrazów głównej przekątnej macierzy $\|a_{ij}\|$.

Przykładem spełniającym warunki $1 \div 3$ jest macierz

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}} & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{6-14}$$

Równanie $i$-te z układu (6-13) odpowiada wpływowi pozostałych $x_j$ (gdzie $i \neq j$) na $x_i$. Jeśli teraz ustalimy którąś z wartości $x_i$, to przez skreślenie $i$-tego równania w układzie (6-13) otrzymamy układ 3 równań niejednorodnych, którego rozwiązania są jednoznacznie wyznaczone przez wartość $x_i$. Podobnie jeśli ustalimy dwie wartości $x_{i_1}$ i $x_{i_2}$, to przez skreślenie $i_1$ oraz $i_2$ równania w układzie (6-13), otrzymamy układ dwóch równań niejednorodnych, którego rozwiązania są jednoznacznie wyznaczone przez wartości $x_{i_1}$ i $x_{i_2}$. Dalej, jeśli ustalimy trzy wartości: $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$, to przez skreślenie $i_1, i_2, i_3$ równania z układu (6-13) otrzymamy jedno równanie niejednorodne, którego rozwiązanie jest jednoznacznie wyznaczone przez wartości $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$.

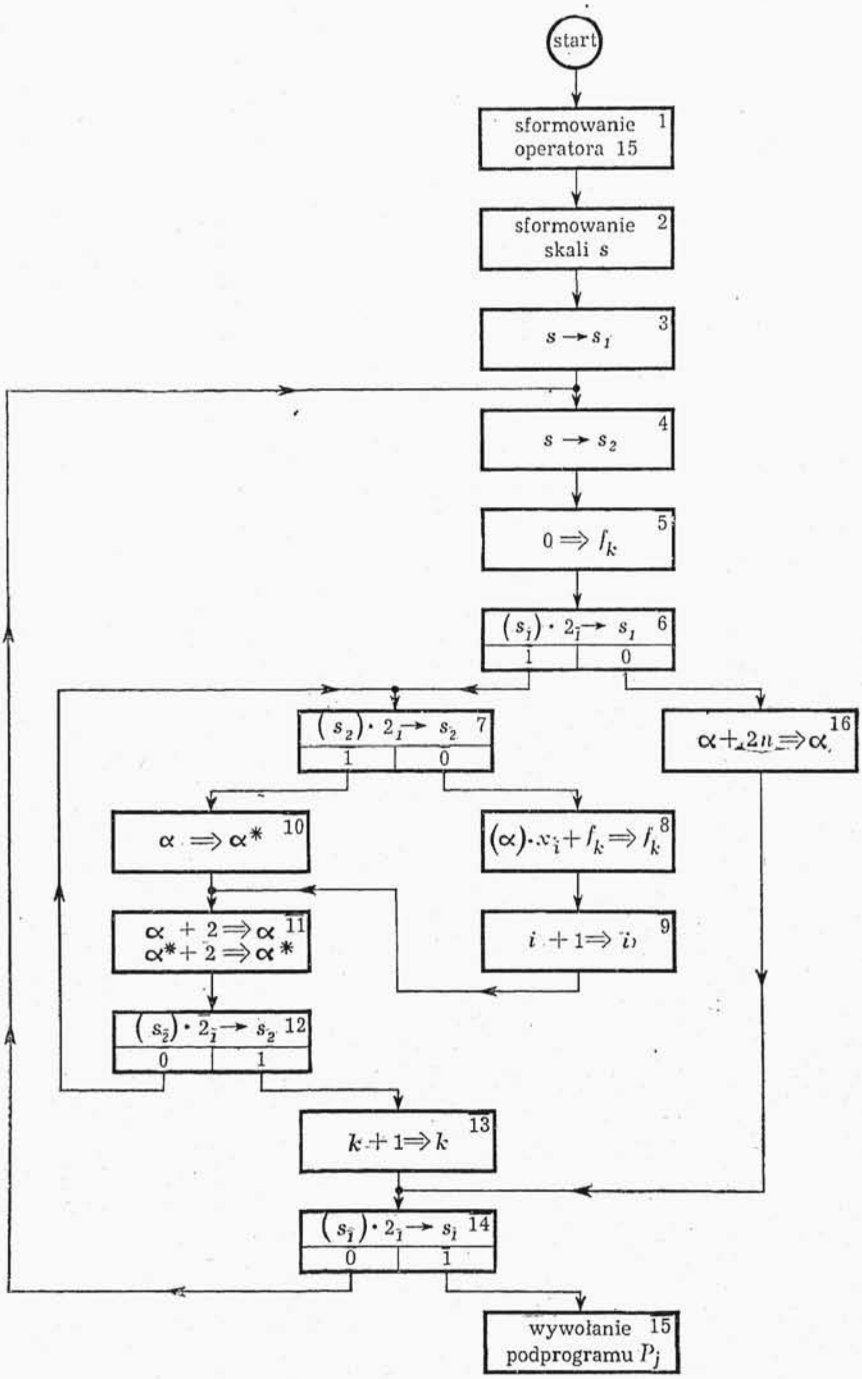
W przypadku ustalenia jednej albo dwóch zmiennych w układzie (6-13) możemy, w wyniku skreślenia odpowiednich równań z układu (6-13), układ równań algebraicznych liniowych rozwiązywać metodą iteracji prostej Gaussa (Bibliografia [12]). Kolejne przybliżenia rozwiązań układu równań będą odpowiadały ustalaniu się nowego stanu równowagi homeostatu.

Program modelujący powyższy proces będzie się składał z dwóch części:

1) podprogramu ustawiającego odpowiednią macierz i obliczającego wyrazy wolne dla układu równań i wybierającego odpowiedni podprogram dla rozwiązania sformowanego uprzednio układu równań algebraicznych liniowych.

2) podprogramów dla iteracyjnego rozwiązywania układów dwóch i trzech równań algebraicznych liniowych z drukowaniem wyniku po każdym kroku iteracyjnym i podprogramu dla rozwiązania jednego równania algebraicznego liniowego z równoczesnym drukowaniem wyników.

Obecnie omówimy szczegółowo część 1 programu modelującego. Na rysunku 6-10 przedstawiony jest schemat blokowy programu, w tablicy 6-25 podane są zakodowane operatory i predykaty z rys. 6-10. W programie przyjęto następujące oznaczenia: $\alpha = a_{11}$, $\alpha^\star$ — adres pierwszego wyrazu sformowanej macierzy, $i$ — indeks ($i = 1,2,3,4,$) ustalonego (lub ustalonych) iksów, $j$—ilość ustalonych zmiennych ($i = 1, 2, 3$) kodowana jako $j \cdot 2^{-16}$. (Przedstawiony fragment programu opracowała Z. Jankowska).




Rys. 6-10. Schemat blokowy części programu modelującego zjawisko homeostazy

Tablica 6-25

Część programu modelującego zjawisko homeostazy

| Operator lub predykat | Kolejny adres | Kolejny rozkaz | | Uwagi |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $k+0000$ | 12 | $<j>$ | |
| | 1 | 11 | $<2^{-16}>$ | |
| | 2 | 26 | 0000 | |
| | 3 | 03 | $k+0007$ | |
| | 4 | 12 | $<04\ P_1>$ | |
| | 5 | 14 | $k+0103$ | |
| | 6 | 02 | $k+0017$ | |
| | 7 | 11 | $<2^{-16}>$ | |
| | $k+0010$ | 26 | 0000 | |
| | 1 | 03 | $k+0015$ | |
| | 2 | 12 | $<04\ P_2>$ | |
| | 3 | 14 | $k+0103$ | |
| | 4 | 02 | $k+0017$ | |
| | 5 | 12 | $<04\ P_3>$ | |
| | 6 | 14 | $k+0103$ | |
| 2 | 7 | 12 | $t_1$ | |
| | $k+0020$ | 10 | $<i_1>$ | |
| | 1 | 10 | $<i_2>$ | |
| | 2 | 10 | $<i_3>$ | |
| 3 | 3 | 14 | $s$ | |
| | 4 | 14 | $s_1$ | |
| 4 | 5 | 12 | $s$ | |
| | 6 | 14 | $s_2$ | |
| | 7 | 12 | $<\text{zero}>$ | |
| | $k+0030$ | 14 | $f_k$ | |
| 6 | 1 | 12 | $s_1$ | |
| | 2 | 23 | 0001 | |
| | 3 | 14 | $s_1$ | |
| | 4 | 06 | $k+0104$ | |
| 7 | 5 | 12 | $s_2$ | |
| | 6 | 23 | 0001 | |
| | 7 | 14 | $s_2$ | |
| | $k+0040$ | 03 | $k+0054$ | |
| 8 | 1 | 12 | $\alpha$ | |
| | 2 | 14 | 4100 | |
| | 3 | 12 | $<x_1>$ | |
| | 4 | 04 | „.“ | |
| | 5 | 12 | $f_k$ | |
| | 6 | 04 | „+“ | |
| | 7 | 14 | $f_k$ | |
| 9 | $k+0050$ | 12 | $k+0043$ | |
| | 1 | 10 | $<2^{-15}>$ | |
| | 2 | 14 | $k+0043$ | |
| | 3 | 02 | $k+0056$ | |
| 10 | 4 | 12 | $\alpha$ | |

Tablica 6-25 (d. c).

| Operator lub predykat | Kolejny adres | Kolejny rozkaz | | Uwagi |
|---|---|---|---|---|
| | $k+0055$ | 14 | $\alpha^*$ | |
| 11 | 6 | 12 | $k+0041$ | |
| | 7 | 10 | $<2^{-15}>$ | |
| | $k+0060$ | 14 | $k+0041$ | |
| | 1 | 14 | $k+0054$ | |
| | 2 | 12 | $k+0055$ | |
| | 3 | 10 | $<2^{-15}>$ | |
| | 4 | 14 | $k+0055$ | |
| 12 | 5 | 10 | $s_2$ | |
| | 6 | 23 | 0001 | |
| | 7 | 14 | $s_2$ | |
| | $k+0070$ | 06 | $k+0035$ | |
| 13 | 1 | 12 | $k+0045$ | |
| | 2 | 10 | $<2^{-15}>$ | |
| | 3 | 14 | $k+0045$ | |
| | 4 | 10 | $<02\ 0000>$ | |
| | 5 | 14 | $k+0030$ | |
| | 6 | 14 | $k+0047$ | |
| 14 | 7 | 12 | $s_1$ | |
| | $k+0100$ | 23 | 0001 | |
| | 1 | 14 | $s_1$ | |
| | 2 | 06 | $k+0025$ | |
| 15 | 3 | 04 | $P_j$ | |
| 16 | 4 | 12 | $k+0041$ | |
| | 5 | 10 | $<00\ 2n>$ | |
| | 6 | 14 | $k+0041$ | |
| | 7 | 14 | $k+0054$ | |
| | $k+0110$ | 02 | $k+0077$ | |

## 6.7. UWAGI KOŃCOWE

Na zakończenie rozdziału należy jeszcze powiedzieć parę słów o zastosowaniu modeli cyfrowych do sterowania z predykcją(¹) procesami dynamicznymi.

Dla danego układu dynamicznego, który chcemy sterować z predykcją cyfrową, czas dzielimy na odcinki o stałej długości (rys. 6-11).

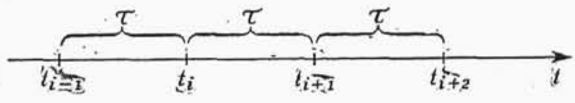
Długość $\tau$ dobieramy tak, aby spełniony był związek

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \tag{6-15}$$

gdzie $\tau_1$ oznacza czas potrzebny do przekazania informacji o stanie układu w poprzednim okresie czasu $\tau$ (od chwili $t_{i-1}$ do chwili $t_i$), $\tau_2$ — czas potrzebny na opracowanie otrzy-

(¹) Sterowanie z predykcją jest to sterowanie z uwzględnieniem „hipotezy o stanie układu w chwili bieżącej".

manych informacji, przyjęcie hipotezy co do informacji za bieżący przedział czasu, hipotez co do zachowania się układu w dalszych przedziałach czasu (predykcja) oraz podjęcie decyzji co do sterowania układu w następnym przedziale czasu, tak aby speł-




Rys. 6-11.

niał on narzucone warunki, $\tau_3$ — czas potrzebny na przygotowanie odpowiedniego wykonawstwa przez układ sterowania.

Jak widać z powyższego, model używany do predykcji musi umożliwiać prześledzenie zjawiska w okresie krótszym od rzeczywistego zachodzenia tego zjawiska. Model ten musi być pewnym uproszczeniem zjawiska poprzez aproksymowanie funkcji opisujących proces dynamiczny pewnymi prostszymi funkcjami. Aproksymacji tej trzeba dokonać na gruncie teorii aproksymacji opartej o odległość funkcji na przedziale domkniętym:

$$||f-g|| \underset{\text{df}}{=} \max_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} |f(t)-g(t)|, \tag{6-16}$$

jak również na gruncie teorii aproksymacji opartej na odległości względnej funkcji na przedziale domkniętym:

$$||f-g|| \underset{\text{df}}{=} \max_{t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}} \left|\frac{f(t)-g(t)}{f(t)}\right|. \tag{6-17}$$

# 7. KODY ZEWNĘTRZNE



## 7.0. UWAGI WSTĘPNE

W punkcie 4.0 wyliczyliśmy etapy przygotowania problemu do obliczeń. Wymieniono tam między innymi punkty:

5) zaprogramowanie i zakodowanie poszczególnych operatorów i predykatów, na które rozbiliśmy program w wyniku przyjętej przez nas organizacji (punkt 4);