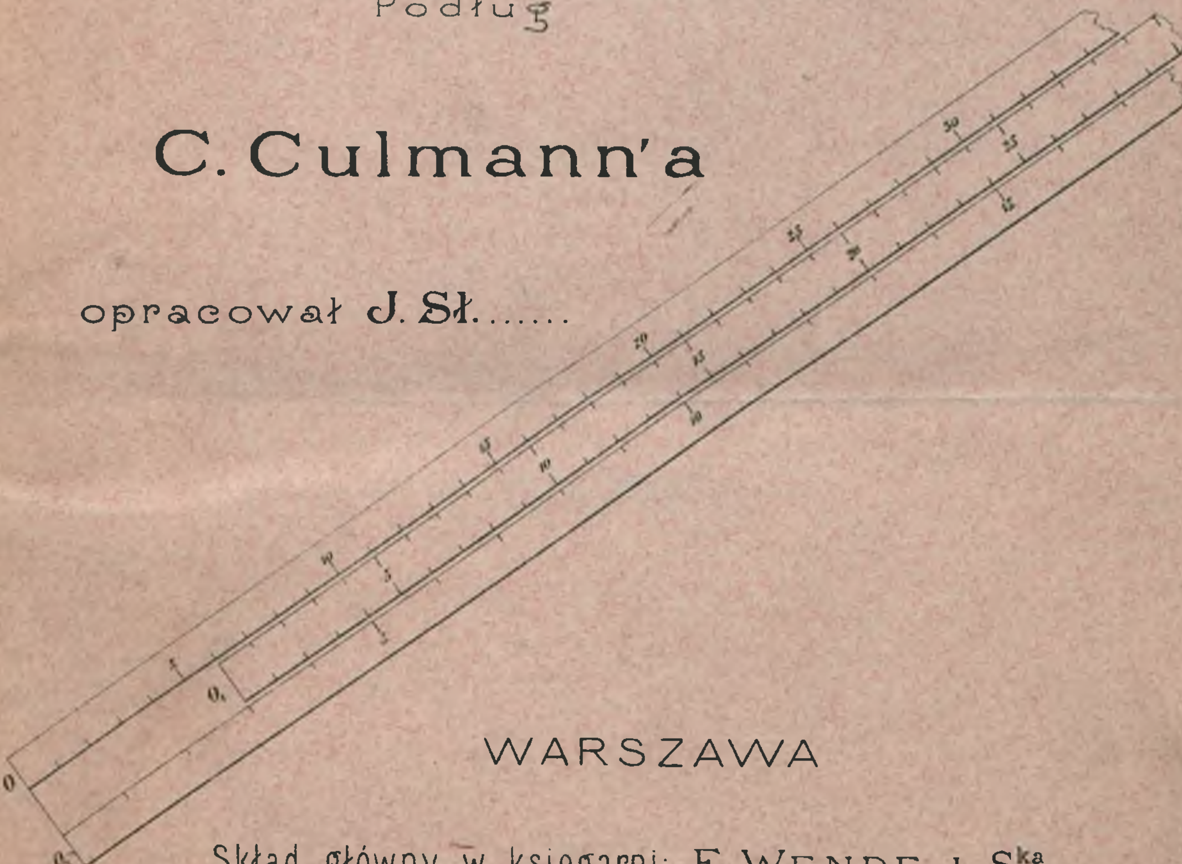
SUWAK RACHUNKOWY

Podług

C. Culmann'a

opracował J. Sł......



WARSZAWA

Skład główny w księgarni: E. Wende i S^ka^.

1901.

SUWAK RACHUNKOWY.

Podług C. Culmann'a

OPRACOWAŁ J. Sł....

WARSZAWA.
Skład główny w Księgarni E. Wende i S-ka

1901.

DRUK. RUBIESZEWSKI I WROTNOWSKI NOWY-ŚWIAT № 84.

Дозволено Цензурою.
Варшава, 29 Іюня 1901 года.

Mnóstwo jest sposobów i przyrządów, ułatwiających lub przyśpieszających wykonywanie działań rachunkowych i obliczeń konstrukcyjnych. Obszerne ich zastosowanie spotykamy szczególniej w technice.

W wielu zakładach naukowych młodzież obeznaje się już podczas studyj ze skróconemi rachunkowemi sposobami, ze stosowaniem metod i użyciem przyrządów. Wszedłszy do praktyki, może też ona więcej czasu poświęcić na pracę umysłową, kombinacye konstrukcyjne i na obrabianie szczegółów.

W praktyce może być mowa tylko o wartościach *przybliżonych* a nie dokładnych. Choćby w danym razie obliczenia analityczne doprowadzały do ścisłych wyników, niewiele się na tem zyska, jeśli dokładnie obliczoną wartość trzeba łączyć z tak zwanemi współczynnikami praktycznemi.

Analityczna metoda obliczań daje się stosować w praktyce do niewielkiej liczby i to przeważnie do prostszych tylko przypadków.

Jeśli nieznane są analityczne związki — np. jeśli figura badana jest nieforemną — to uciec się musimy do przypuszczeń mniej lub więcej z prawdą zgodnych, a i wtedy nawet trzeba nieraz wykonywać szereg mozolnych i długich obliczeń, zanim się dojdzie do przybliżonego wyniku.

Graficzna metoda obliczeń (sposób wykreślny) daje wyniki ze ścisłością, przewyższającą wymagania praktyki.

Oprócz ułatwień i pośpiechu zyskuje się tu na wyrazistości. Z łatwością w rysunku odszukać można znaczenie każdej wielkości, tudzież wzajemną łączność i zależność ilości danych i szukanych, co samo przez się nasuwa szereg kombinacyj i uwalnia od szematyzmu. Co więcej — graficzna metoda nadaje się do badań ściśle naukowych i może być stosowaną tam, gdzie analiza zaznacza tylko porządek działań, ale ich wykonać nie umie.

Pomimo wielu ułatwień, jakie przy właściwem stosowaniu dwu metod — analitycznej i graficznej — osiągnąć się dają, technicy chętnie posługiwać się będą przyrządami, które mozolną pracę rachunkową w zupełności zastąpić są w stanie.

O jednym z takich przyrządów — najpraktyczniejszym i najczęściej używanym — pomówić tu zamierzamy; jest nim liczebnica, której nadamy nazwę *suwaka rachunkowego*.

Teorya suwaka rachunkowego.

(podług C. Culmanna).

Każdy inżynier — nawet ten, który ma wprawę w rysunkach, zna graficzny rachunek i graficzną statykę — uczyni dobrze, jeżeli zapozna się jeszcze z *działaniami na liniach;* oszczędzi przez to dużo czasu i przysporzy sobie niemałoważne korzyści.

Zestawianie (t. j. przyłączanie lub nakładanie) prostych, przedstawiających w szczególności *logarytmy* [1]) — jak to właśnie ma miejsce w suwaku czyli linijce rachunkowej — może przynieść liczne a nieocenione przysługi nietylko praktykom, nieumiejącym rysować, ale i wszystkim tym, którzy niechętnie biorą do rąk narzędzia rysunkowe.

Na suwaku rachunkowym czyli liczebnicy można dwie proste dodać do siebie a trzecią od nich odjąć; gdybyśmy przeto w takiem narzędziu rachunkowem mieli poodcinane długości, któreby były proporcyonalne logarytmom liczb, to moglibyśmy wykonywać mechanicznie, w czasie możliwie najkrótszym, wszelkie działania rachunkowe, zasadzające się na dodawaniu *dwóch* a odjęciu *jednego* logarytmu.

Dokładność, do jakiej tu sięgnąć można, dochodzi 0,001. We wszystkich więc razach, gdzie taka dokładność wystarcza — a napewno ani inżynier, ani przemysłowiec o większą ubiegać się nie potrzebuje — użycie liczebnicy będzie odpowiedniejszem, niż każda inna metoda rachunkowa.

Szybkość, z jaką na tej drodze otrzymuje się wyniki obliczeń, sprawiła, że dziś chętnie i rzeczywiście oblicza się nawet to, co dawniej miarą oka lub z doświadczenia się oceniało.

Zapoznajmy się z teoryą i zastosowaniem tego małego a użytecznego przyrządu.

---

[1]) Zdaje się, że Anglik Babbage był twórcą przyrządu do obliczeń za pomocą logarytmów.

I.

Wyznaczanie sumy lub różnicy za pomocą przesuwania jednorodnych (identycznych) podziałek.

Aby okazać, w jaki sposób liczebnica nadawać się może do wykonywania działań z logarytmami, miejmy na myśli dwie, obok siebie przesuwające się, jednakowe podziałki (skale). Niech to będą dwie skale (masztaby) w jednakowy sposób porozdzielane na równe części; ustawmy jednę pod drugą, to naturalnie numera — odpowiadające punktom podziału a oznaczające odległość kresek podziałowych od punktu początkowego — będą leżały ponad sobą. Gdybyśmy jednę z podziałek np. dolną przesunęli na pewną długość, dajmy na to na 7 podziałów, to dowolne, ponad sobą leżące punkta A, A_1 lub B, B_1 oznaczą nam sumę dwóch linij, a mianowicie:

$$OA = OO_1 + O_1A_1$$
$$\text{i} \quad OB = OO_1 + O_1B_1.$$

Przyjęliśmy dla przykładu, że długość OO_1 zawiera 7 podziałów i o te to 7 podziałów linije

$$OA, \quad OB \ldots$$

będą dłuższemi, niż

$$O_1A_1, \quad O_1B_1 \ldots$$

i numerom 6, 12, 18 na dolnej podziałce odpowiadać będą na górnej liczby 13, 19, 25. Odrywając uwagę od długości linij a zatrzymując ją tylko na numerach podziałek, możemy fig. 1 uważać za *tablicę* liczb, cechującą się tem, że dwie którekolwiek, ponad sobą leżące różnią się stale o jednę i tęż samą liczbę 7.

fig. 1.

Oznaczywszy numera, stojące na końcach długości

$$OA, \ OB, \qquad O_1A_1, \ O_1B_1,$$
$$\text{przez} \quad a, \quad b, \qquad a_1, \quad b_1,$$

to ogólnie otrzymamy

$$a = 7 + a_1 \qquad a_1 = a - 7$$
$$b = 7 + b_1 \qquad b_1 = b - 7$$
i
$$b - a = b_1 - a_1;$$

ostatnie równanie jest wynikiem równości odcinków

$$A\,B = A_1\,B_1.$$

Zwykle dane są trzy długości lub liczby, a idzie o wyznaczenie czwartej np. b i wtedy:

$$b = a - a_1 + b_1 \qquad \text{np. } 19 = 13 - 6 + 12.$$

Na fig. 2 przedstawiliśmy szematyczny układ linij, wchodzących do działania i pożądaną jest zawsze rzeczą mieć na pamięci tego rodzaju szematyczne uzmysłowienie. Fig. 2 przedstawia układ linij najczęściej się trafiających. fig. 2.

Szematyczne przedstawienie prostych można podać dla każdego rodzaju działań, np. aby otrzymać

$$b = b_1 - a_1 + a \qquad 19 = 12 - 6 + 13$$

należałoby—jak to wskazano na fig. 3—liczbę górną 12 (A) postawić ponad liczbą 6 (A_1), a wtedy dolnej liczbie 13 (B_1) odpowiadać będzie w górze liczba 19 (B). fig. 3.

Układ linij, podanych na fig. 2, nie zmieni się, jeżeli liczby a i b_1 zamienimy jednę przez drugą.

Przeto: przesuwając ponad sobą dwie skale z identycznemi podziałami, można jednę prostą od drugiej odjąć a do różnicy trzecią dodać. Położenie podziałek nie zmienia się, jeżeli dwa pierwsze wyrazy—[a mianowicie: w pierwszym razie ($a - a_1$), w drugim razie ($b_1 - a_1$)]—nieulegną zmianie. Wszystkie wartości szukanych sum, odpowiadające ostatniemu wyrazowi (b_1 w pierwszym, a w drugim przypadku), są w tych dwóch skalach tabelarycznie ustawione ponad sobą. Przyjmując, że jedna z liczb a_1, b_1 staje się zerem, ogólne działanie sprowadza się do dodania lub odjęcia dwóch jakichkolwiek prostych.

Możnaby jednę z obu skal *odwrócić* tak, aby podziały szły w niej od ręki prawej ku lewej, jak to przedstawiono na fig. 4. fig. 4.

Nie powtarzając poprzednich rozumowań, rzecz widoczna, że stała długość $O\,O_1$ będzie sumą

$$O\,A + A_1\,O_1 = 17 \text{ lub } O\,B + O_1\,B_1 = 17\ldots$$

a przeto

$$O\,A = O\,O_1 - A_1\,O_1 \qquad O\,B = O\,O_1 - B_1\,O_1$$
$$O\,A + A_1\,O_1 = O\,B + B_1\,O_1$$

a gdybyśmy zamiast długości OA, $OB, \ldots$ wprowadzili liczby $a, b, \ldots$ odpowiednich podziałek, to otrzymamy:

$$a = 17 - a_1, \qquad b = 17 - b_1$$
$$b - a = a_1 - b_1$$
$$b = a + a_1 - b_1.$$

Na fig. 5 pokazano, jak należy sobie przedstawić położenie prostych, odpowiadających liczbom a, b, a_1, b_1. fig. 5.

Ile więc razy przesuwamy podziałki, z których jedna jest odwróconą, można od sumy dwóch prostych odejmować trzecią.

Położenie podziałek jest niezmiennem, dopóki suma $a + a_1$ jest stałą.

Wszystkie wielkości b, b_1, które się na tę sumę składają, leżą ponad sobą i ułożone są tabelarycznie.

Gdyby jedna z wielkości a_1 lub b_1 zanikła, możnaby i w tem odwróconem położeniu otrzymywać różnicę lub sumę dowolnych wielkości.

II.

Przez zmianę podziałek na jednej z dwóch skal wprowadzać można do rachunku n krotne wielkości z ilości dodawannych lub odejmowanych.

W praktyce najczęściej zachodzi potrzeba mnożenia przez czynnik dwa (2), to też dalsze badania oprzemy na tej liczbie, nadmieniając, że to, co się tu powie, odnosić się może do każdej dowolnej liczby n.

fig. 6. Niech będą dwie skale z różnemi podziałami, z których np. dolna niech posiada dwa razy większe podziały niż skala górna. Gdybyśmy je umieścili pod sobą tak, aby początki odpowiadały sobie, to liczby górnej skali leżałyby nad liczbami dwa razy mniejszemi dolnej skali. Gdyby tym liczbom miały odpowiadać proporcyonalne długości, dawane do dodania lub odjęcia, to należałoby albo liczby górnej skali podzielić przez dwa, albo liczby dolnej skali pomnożyć przez dwa.

To samo—naturalnie—odnosić się musi do różnic liczb $A\,B$, $A_1\,B_1$ (fig. 1 do 5).

Wszystko, cośmy powiedzieli pod § 1 i cały układ linij, podanych na fig. od 1 do 5, nie uległoby zmianie, gdybyśmy

zamiast a, b wprowadzili $\frac{1}{2}a_1$, $\frac{1}{2}b_1$,
albo „ a_1, b_1 „ $2a_2$, $2b_2$.

fig. 7. Naprzykład fig. 7 przedstawia rozwiązanie zadania

$$O_1 B_1 = O_1 A_1 - O_2 A_2 + O_2 B_2, \qquad b_1 = a_1 - 2a_2 + 2b_2,$$
$$23 = 11 - 2 \,.\, 2 + 2 \,.\, 8,$$

lub też

$$O_2 B_2 = O_2 A_2 - O_1 A_1 + O_1 B_1, \qquad b_2 = a_2 - \tfrac{1}{2}a_1 + \tfrac{1}{2}b_1$$
$$8 = 2 - \tfrac{1}{2}11 + \tfrac{1}{2}23.$$

Dla dwóch punktów, leżących ponad sobą, sprawdza się równanie:

$$a_1 - 2a_2 = b_1 - 2b_2 = 7$$
lub
$$\tfrac{1}{2}a_1 - a_2 = \tfrac{1}{2}b_1 - b_2 = \tfrac{1}{2}7.$$

Gdyby jedna z wielkości a_1, a_2 stawała się zerem, to za pomocą dwóch takich skal moglibyśmy do każdej danej liczby dodawać połowę drugiej danej liczby lub też liczbę dwa razy od tej drugiej danej większą.

Możemy przeto powiedzieć: jeżeli przesuwać będziemy dwie niejednorodne skale—a mianowicie dwie takie, że podziały jednej z nich są dwy razy większe niż podziały drugiej—to do każdej liczby będziemy mogli przyłączać podwójną lub też połowiczną różnicę dwóch innych liczb.

Wszystkie pary liczb, dające stałą wartość na różnice, powstałe z jednej liczby i z podwójnej lub połowicznej drugiej liczby, stoją na uważanych skalach ponad sobą w uszeregowaniu tabelarycznem.

Gdyby jedna z uważanych czterech liczb stawała się zerem, to na takich skalach można wprost odczytywać liczby, będące sumą lub różnicą jakiejś wartości i połowicznej lub podwójnej drugiej wartości.

Tego rodzaju skale można także przesuwać w położeniu odwróconem.

Na fig. 8 przytaczamy wyniki działań i sądzimy, że powtarzanie rozumowań byłoby zbytecznem. fig. 8.

$$O_1 O_2 = O_1 A_1 + A_2 O_2 = O_1 B_1 + B_2 O_2$$
$$a_1 + 2 a_2 = b_1 + 2 b_2$$
$$b_1 = a_1 + 2 a_2 - 2 b_2$$
$$b_2 = a_2 + \tfrac{1}{2} a_1 - \tfrac{1}{2} b_1$$

Naprzykład
$$24 = 12 + 2 \cdot 7 - 2 \cdot 1$$
$$1 = 7 + \tfrac{1}{2} 12 - \tfrac{1}{2} 24.$$

Szemat linijny fig. 8 odpowiada szematowi fig. 5, a rezultat tych działań streścić możemy w słowach: jeżeli dwie skale — z których jedna ma podziały dwa razy większe niż druga—przesuwać będziemy nad sobą w odwrotnem położeniu jednej z tych skal, to możemy odczytywać liczby, które są sumą z jakiejś wartości i z połowicznej lub podwójnej różnicy dwóch innych wartości.

Wszystkie pary liczb, dające stałą wartość na sumy, powstające z jakiejś liczby i z połowicznej lub podwójnej drugiej liczby, uszeregowane są na omawianych skalach tabelarycznie.

Gdyby jedna z uważanych czterech liczb stawała się zerem, to na takich skalach można wprost odczytywać liczby, będące sumą lub różnicą jakiejś wartości i połowicznej lub podwójnej drugiej wartości.

Przez wprowadzenie skali dolnej O_2 — z większemi podziałami — dałaby się urządzić liczebnica (na wzór fig. 7 i 8), wykazująca wprost sumę z jakiejś wartości i z połowicznej lub podwójnej różnicy dwóch innych wartości; gdybyśmy jednak tego rodzaju układ skal O_1, O_2 zespolili z układem skal jednorodnych, normalnych O, O_1, to mnożenie liczb przez pół ($\frac{1}{2}$) dałoby się rozciągnąć do *trzech*, a mnożenie przez dwa (2) możnaby ograniczyć do *jednej* liczby. Instrument taki — wskazany na fig. 9 — składa się ze stałej ramy o dwóch listwach O, O_2, stanowiących tak nazwane *wargi*, z których jedna posiada zwyczajny a druga dwa razy większy niż zwyczajny podział; pomiędzy wargami przesuwać można suwak O_1, nazwany *języczkiem*, którego podział odpowiada podziałowi jednej z warg,—zazwyczaj podziałowi wargi górnej O.

Wsuwając pomiędzy wargi języczek w położeniu odwrotnem—t. j. tak, aby jego numeracya szła od ręki prawej ku lewej—będziemy mogli na skalach O, O_1 wykonywać działania omówione pod § 1, a na skalach O_1, O_2 działania wyżej wymienione; prócz tego odczytywać wyniki następujących działań:

$$\begin{array}{lll}
O_2B_2 = O\,A - O_1A_1 + O_1B_1 & b_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 & 12 = \frac{1}{2}(14 - 8 + 18) \\
O\,B = O_2A_2 - O_1A_1 + O_1B_1 & b = 2a_2 - a_1 + b_1 & 24 = 2\,.\,7 - 8 + 18 \\
O_1B_1 = O_1A_1 - O_2A_2 + O\,B & b_1 = a_1 - 2a_2 + b & 18 = 8 - 2\,.\,7 + 24 \\
O_1B_1 = O_1A_1 - O\,A + O_2B_2 & b_1 = a_1 - a + 2b_2 & 18 = 8 - 14 + 2\,.\,12.
\end{array}$$

Gdyby podziały języczka O_1 zgadzały się z podziałami wargi O_2, to mnożenie przez pół ($\frac{1}{2}$) możnaby ograniczyć do *jednej* liczby a mnożenie przez dwa (2) możnaby rozciągnąć do *trzech* liczb. Dla celów praktycznych wprowadza się zazwyczaj rodzaj podziałek wskazany na fig. 9.

Przy takiem urządzeniu będzie można wprost odczytywać sumę, powstającą z pewnej liczby, dodanej do jakiejś drugiej po odjęciu innej trzeciej, z których to trzech liczb *jedna* którakolwiek jest mnożona przez czynnik dwa (2) lub też z których wszystkie *trzy* są dzielone przez liczbę dwa (2).

Odwrócenie języczka nie powoduje nowych kombinacyj.

Powyżej omawialiśmy, w jaki to sposób — przez przesuwanie dwóch skal — wykonywać można niektóre dodawania i odejmowania; teraz przerzucić chcemy omawianie działania do logarytmów i dla tego zajmiemy się opisem właściwego *suwaka rachunkowego.*

III.

Suwak rachunkowy, stosowany w praktyce.

(Règle de calcule. Rechenschieber).

W suwaku rachunkowym zwykłym, stosowanym w praktyce, długości podziałek

$$O\,A, \quad O\,B; \qquad O_1\,A_1, \quad O_1\,B_1$$

nie są proporcyonalne do liczb

$$a, \quad b; \qquad a_1, \quad b_1$$

a odpowiadają długościom, należącym do wielkości logarytmów tych liczb, t. j. są proporcyonalne do

$$\log a, \quad \log b; \qquad \log a_1, \quad \log b_1.$$

fig. 10. Ogólny wygląd suwaka odpowiada fig. 9; przedstawiamy go na fig. 10.

Jak wiadomo suma dwóch logarytmów jest logarytmem iloczynu, różnica takowych logarytmem ilorazu odpowiednich liczb, podwójny logarytm jest logarytmem kwadratu liczby,—wskutek tego wymienione w §§ I i II dodawania i odejmowania oznaczać będą działania wyższe a mianowicie *mnożenie i dzielenie.*

Gdybyśmy na fig. 10 przyjęli położenie linij takie, jakie oznaczyliśmy na fig. 2, to otrzymalibyśmy

$$OB = OA - O_1 A_1 + O_1 B_1 \qquad \log b = \log a - \log a_1 + \log b_1$$

$$b = \frac{a}{a_1} b_1 \qquad 6{,}75 = \frac{9}{4}\, 3.$$

W § 1 mieliśmy twierdzenie, że położenie języczka się nie zmieni, jeżeli różnica dwóch liczb jest stałą; przerzucając to twierdzenie do logarytmów, możemy powiedzieć, że położenie języczka się nie zmieni, jeżeli różnica dwóch logarytmów, t. j. gdy iloraz odpowiednich liczb jest stały.

Dla każdego stosunku, np. $\frac{9}{4} = 2{,}25$, można odczytywać wszystkie liczby sobie odpowiadające, tabelarycznie ponad sobą ustawione.

Ponieważ zero (0) jest logarytmem jedności, to — zakładając jednę z powyższych trzech liczb równą jedności (1) — można będzie także odczytywać wprost liczby, będące iloczynem lub ilorazem dwóch jakichkolwiek innych liczb.

Wszystko powyższe streścić możemy w słowach:

zatrzymując uwagę na jednobrzmiących podziałach omawianej liczebnicy, możemy—przez przesuwanie języczka—otrzymywać liczby, powstające z pomnożenia stosunku dwóch danych liczb przez liczbę trzecią a w szczególności odczytywać wynik z pomnożenia lub podzielenia jakiejś liczby przez inną daną liczbę.

Położenie języczka nie zmienia się, jeżeli dwie pierwsze liczby się nie zmienią, wskutek czego wszystkie pary liczb, posiadające stały stosunek, są ustawione tabelarycznie ponad sobą.

Liczebnice, w praktyce używane, są tak urządzone, że można języczek odwracać, a wtedy numeracya rozchodzi się w przeciwne strony. Przy takiem położeniu języczka, fig. 11.
długości — odpowiadające logarytmom — szeregują się podług szematu fig. 5 i wtedy:

$$\log b = \log a + \log a_1 - \log b_1 \qquad b = \frac{a a_1}{b_1} \qquad OB = OA + A_1 O_1 - B_1 O_1$$

$$OB = \log 9 + \log 4 - \log 8 = \log 4{,}5 \qquad 4{,}5 = \frac{9 \,.\, 4}{8}.$$

Położenie języczka nie zmieni się dopóty, dopóki odcinki OA i $A_1 O_1$ pozostają stałe, t. j. dopóki iloczyn dwóch początkowych liczb jest wielkością stałą. Przy tem położeniu odczytywać można wszystkie liczby, dające wymagany iloczyn, gdyż takie pary liczb stoją zawsze ponad sobą; np. stały iloczyn 3 × 6 odczytać można przy liczbie jedność (1).

Możemy przeto powiedzieć: przesuwając języczek przy położeniu odwróconem, t. j. przy numeracyi rozbieżnej, można będzie wyznaczać iloczyn dwóch liczb podzielony przez liczbę trzecią a w szczególności każdą daną liczbę możemy pomnożyć lub podzielić przez drugą daną liczbę.

Położenie języczka się nie zmieni, gdy iloczyn z dwóch danych liczb jest stałym; w tem położeniu wszystkie liczby, wytwarzające stały iloczyn, leżą ponad sobą w tabelarycznem uszeregowaniu.

W szczególności — gdy cyfra jedność (1) języczka stać będzie na cyfrze jedność (1) wargi — odczytywać możemy naraz wszelkie liczby i im odpowiednie wartości odwrotne.

IV.

Charakterystyka wyników rachunkowych.

Charakterystykę wyników przy działaniu z logarytmami otrzymujemy przez dodanie charakterystyk odpowiednich liczb. Może się jednak zdarzyć, że tę sumę trzeba o jednostkę (1) powiększyć lub też zmniejszyć: pierwszy wypadek zajdzie wtedy, gdy sama suma trzech (z których jedna jest odjemna) liczb logarytmowych, stanowiących mantysy, jest większa od jedności (1); drugi zaś wypadek, gdy ta suma jest mniejsza od zera (0).

Te przypadki uwydatniają się same przez się na fig. 2 i 5 przy rozpatrywaniu działań dodawania na szematycznem przedstawieniu układu linij.

Jeżeli ten układ jest większym aniżeli długość zajmowana przez skalę logarytmiczną, t. j. jeżeli układ linij wychodzi poza punkt podziału dziesięć (10), to suma, wypadająca z charakterystyk poszczególnych liczb, powinna być powiększoną o jedność (1); gdyby — przeciwnie — wypadało z rachunku b odjemnem, t. j. gdyby punkt $\frac{B}{B_1}$ leżał na fig. 2 i 5 po lewej stronie punktu zero (0), to należałoby sumę charakterystyk zmniejszyć o jedność (1).

Widoczną jest rzeczą, że dla omawianych tu dwóch przypadków jest niezbędnem, aby skala logarytmów powtórzoną była jeszcze raz, gdyż wtedy na takim przyrządzie jesteśmy w stanie odczytywać liczby, odnoszące się do wszelkich układów linij naszkicowanych na fig. 2 i 5. Że dwukrotnie naniesiona długość skali logarytmicznej jest wystarczającą, przekonać się łatwo, uważając, że na fig. 2 ciąg linijny b jest mniejszym od $a + b_1$ a na fig. 5 jest mniejszym od $a + a_1$.

Ponieważ każda z tych dwóch długości jest mniejszą od samej skali logarytmicznej, to dwukrotna skala okaże się wystarczającą dla objęcia w swych granicach każdego, pomyśleć się dającego układu prostych.

Z powyższego wynika, że w naszym przyrządzie powinna być naniesioną dwa razy skala logarytmiczna a taka, dwakroć powtórzona, skala w zupełności wystarcza do wykonywania działań, wskazanych wzorem $\frac{a\,b_1}{a_1}$.

W położeniu naszkicowanem na fig. 10 wszystkie liczby b_1 większe od 4,4444 znajdują się na drugiej skali; gdybyśmy przeto mieli do obliczenia $\frac{9}{4} \cdot 6$, to ponieważ suma charakterystyk jest równą zeru (0) a koniec 6 układu linijnego pojawia się na drugiej skali przy liczbie 135, to charakterystyką powyższego ułamku będzie $0 + 1 = 1$, samą zaś szukaną liczbą będzie nie 135 a 13,5.

Charakterystyką dla wyrażenia:

$$\frac{900}{0{,}04} \cdot 0{,}6$$

$$\text{będzie} \quad 2 - \underline{8} + \underline{9} + 1 = 4,$$

$$\text{przeto} \quad \frac{900}{0{,}04} \cdot 0{,}6 = 13500;$$

dodano jedność do charakterystyk, bo układ linij wkracza w przedziały drugiej skali.

Gdyby długość ciągu linijnego miała być odjemną, to naturalnie, aby możliwe było odczytanie, należy uważać za punkt wstępny skali nie początek pierwszej a początek drugiej skali.

Dla zadania $\frac{3{,}2}{8} \cdot 1{,}7$ ciąg linijny:

$$OB = OA - O_1A_1 + O_1B_1 \qquad \log 0{,}68 = \log 3{,}2 - \log 8 + \log 1{,}7$$

jest odjemny, gdyż B leży po lewej stronie punktu zero (0); punktowi B_1 czyli 1,7 odpowiada liczba 68.

Sumą charakterystyk danych liczb jest zero (0), przeto charakterystyką wyniku będzie liczba $0 - 1 = \underline{9}$, sam zaś wynik stanowić będzie liczbę 0,68.

Gdyby nam polecono obliczyć

$$\frac{0{,}32}{80} \cdot 0{,}17,$$

to ponieważ charakterystyką będzie

$$\underline{9} - 1 + \underline{9} - 1 = \underline{6},$$

szukaną przeto liczbą będzie

$$\frac{0{,}32}{80} \cdot 0{,}17 = 0{,}00068.$$

Prawidła powyższe nie uległyby zmianie nawet i wtedy, gdyby języczek umieszczono w położeniu *odwróconem.*

Naprzykład, gdybyśmy mieli obliczyć

$$\frac{9}{2{,}5}\,4 = \frac{9 \times 4}{2{,}5},$$

to należałoby do charakterystyki dodać jedność (1), gdyż liczba 2,5 wkracza w drugi dział skali logarytmicznej.

Iloraz 144 ma przeto za charakterystykę liczbę jedność (1) i szukanym wynikiem będzie liczba 14,4.

Gdybyśmy—przeciwnie—mieli obliczyć

$$\frac{1{,}2}{5} \cdot 3 = \frac{1{,}2 \times 3}{5},$$

to przy tem samem położeniu języczka odczytalibyśmy 72; ponieważ zaś w tym razie ciąg linijny

$$\log 1{,}2 + \log 3 - \log 5$$

—rozpoczynający się z punktu środkowego S, przy którym się obie podziałki stykają—jest odjemnym, to charakterystykę obliczyć należy z wyrażenia

$$0 - 1 = \underline{9},$$

bo też w tym razie koniec długości log 5 leży po lewej stronie punktu S.

Dotąd przyjmowaliśmy, że początek układu linij leży zawsze na wardze górnej, możnaby jednak ten początek brać nie na wardze a na języczku.

Reguły podane uległyby zmianie pod tym tylko względem, że liczby, któreśmy poprzednio odczytywali na wardze, należałoby odczytywać na języczku i odwrotnie.

V.

Użycie podziałów dolnej wargi przy tworzeniu iloczynów z czynników kwadratowych.

Na wzór fig. 9 spotykamy w zwykłych — w praktyce używanych — suwakach rachunkowych na dolnej wardze podział logarytmiczny, wykonywany w dwa razy większej skali niż na wardze górnej.

Mówiliśmy poprzednio, że dla wykonywania z liczbami wszelkich działań koniecznemi ale i dostatecznemi okażą się dwie skale po sobie następujące; ponieważ zaś skala dolnej wargi występuje w długości podwojonej, to zajmować ona będzie tęż samą długość, co oba działy skali górnej.

Zatrzymajmy uwagę na skali dolnej języczka i na dwukroć większej skali wargi dolnej. Odwołując się do fig. 7, będziemy mogli powiedzieć, że działania poprzednio omawiane, odniesione do liczb

$$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,$$

stosować się teraz będą do logarytmów i otrzymamy wyrażenie:

$$\log b_1 = \log a_1 - 2 \log a_2 + 2 \log b_2 \qquad b_1 = \frac{a_1}{a_2^2} b_2^2.$$

fig. 10. Naprzykład, ciąg linijny—wskazany na fig. 10—służyć może dla wyrażenia

$$O_1 B_1 = O_1 A_1 - O_2 A_2 + O_2 B_2 \qquad 3 = \frac{4}{3^2} 2{,}6^{2} \text{ (dokładnie 3,0044...).}$$

Ponieważ w tym liczebnym przykładzie charakterystyka poszczególnych liczb jest zerem (0) i ponieważ długość $O_1 B_1$ nie przekracza działu pierwszej skali na języczku, to charakterystyką całego wyrażenia będzie także zero (0).

Uważając liczby—stojące naprzeciw siebie na języczku i na dolnej wardze—znajdziemy, że będą to liczby dające stały stosunek między jakąś liczbą i kwadratem drugiej
fig. 10. danej liczby. Ten stosunek na fig. 10 wynosi 0,444 i można go odczytać przy punkcie *końcowym* skali wargi.

Pierwiastek kwadratowy z liczby, będącej odwrotnością omawianego stosunku, możemy wprost odczytać przy punkcie *początkowym* linijnego ciągu; wynosi on 1,5.

Gdyby $b_2 = 4{,}74$, to $b_1 = 10_1$ i wtedy długość $O_1 B_1$ ściśle dochodzi do końca skali a_1; gdyby b_2 nadawano wartości większe, należałoby charakterystykę powiększać o jedność, np. dla wyrażenia

$$\frac{4}{3^2} \cdot 7^2 = 21{,}8.$$

Gdyby $b_2 = 1{,}5$, to ciąg linijny zredukowałby się do zera (0), gdyż $\frac{4}{3^2}\, 1{,}5^{-2} = 1$.

Gdyby b_2 było mniejszem niż powyżej wymieniona wartość, to długość b_1 wypada odjemną i wtedy od sumy charakterystyk należałoby odjąć jedność (1), np.

$$\frac{4}{3^2} \cdot 1{,}3^{-2} = 0{,}751.$$

Aby można było na instrumencie odczytać ten ostatni wynik, należy na fig. 10 fig. 10.
zmienić położenie języczka a mianowicie: należy liczbę 4, odczytaną na drugiej (prawej) skali języczka, podstawić ponad liczbę 3 wargi.

Gdyby charakterystyka poszczególnych liczb nie była zerem (0), to przy tworzeniu sumy charakterystyka liczb podnoszonych do kwadratu powinna być braną podwójnie np. dla określenia charakterystyki wyrażenia

$$\frac{0{,}4}{30^2} \cdot 0{,}7^2$$

służyć będzie równanie

$$\underline{9} - 2 \cdot 1 + 2 \cdot \underline{9} + 1 = \underline{6}$$

a wynikiem rachunkowym będzie 0,000218.

Dla wyrażenia $\frac{40}{0{,}03^2} \cdot 130^2$ charakterystyką będzie

$$1 - 2 \cdot \underline{8} + 2 \cdot 2 - 1 = 8$$

a wynikiem jest liczba 751000000.

Natknęliśmy się poprzednio na przypadek, gdzie wyniki dwóch działań

$$\frac{4}{3^2} \cdot 7^2 \qquad \frac{4}{3^2} \cdot 1{,}3^{-2}$$

nie dadzą się na instrumencie odczytać przy niezmienionem położeniu języczka, chociaż czynnik $\frac{4}{3^2}$ pozostał w obu tych wyrażeniach ten sam.

Przy wykonaniu pierwszego działania trzeba języczek wysunąć z ramy na prawo, przy drugiem na lewo. W obu tych razach położenie skali języczka jest jednakowe, gdyż liczba 4 języczka stoi zawsze po nad liczbą 3 dolnej wargi, a że języczek posiada tylko dwie skale, to naturalnie, że od punktu uważanego $\left(\frac{4}{3^2}\right)$ nie mogą się pojawiać jednocześnie dwie skale raz na prawo, drugi raz na lewo.

Z powyższego wynika, że gdybyśmy zamiast stosunku $\frac{4}{3^2}$ uważali stosunek jemu równoważny, to ten drugi stosunek nie mógłby być odszukanym na naszym instrumencie, ileby razy zajmował położenie wyjątkowe, powyżej omawiane np.

$$\frac{0,751}{\overline{1,3}^2} = \frac{21,8}{7^2}.$$

W ogóle przy położeniu języczka, wskazanem na fig. 10, nie można na naszym instrumencie odcyfrowywać jednocześnie stosunkowych liczb, leżących w granicach

$$\text{od } \frac{0,444}{1^2} \text{ do } \frac{1}{\overline{1,5}^2}$$

$$\text{i od } \frac{10}{15^2} \text{ do } \frac{44,4}{10^2}.$$

Chcąc, aby liczby z tych dwóch grup mogły być jednocześnie odczytywane, należałoby instrument nieco zmienić, a mianowicie trzebaby nadać albo języczkowi, albo dolnej wardze długość trzy razy większą niż długość przyjętą na języczku dla pojedynczej skali.

Poprzednio wyjaśniliśmy, że dla wykonywania działań z liczbami prostemi (niekwadratowemi) wystarczały dwie długości przyjętej skali.

fig. 10. Wszystko, cośmy mówili i odnosili do położenia języczka — uwydatnionego na fig. 10—stosuje się do każdego innego położenia.

Możemy więc ogólnie powiedzieć: przy każdem położeniu języczka nie można na naszym instrumencie odczytywać jednocześnie stosunków, mieszczących się w przedziale pomiędzy numerem 1 wargi (dolnej) i za nim następującym numerem 1 języczka, ani też w przedziale pomiędzy numerem 10 wargi i wystającym poza ramę instrumentu numerem 10 języczka.

Można sobie jednak we wszystkich tych razach z łatwością poradzić. I tak naprzykład: odcyfrowawszy na skalach liczby danego stosunku $\frac{a_1}{a_2} = \frac{0,751}{\overline{1,3}^2}$, należy przesunąć

fig 12. dokładnie języczek na długość jednej skali w stronę, zajmowaną przez wargę dolną, t. j. należy ponad liczbą 1,3 wargi przesunąć skalę języczka tak, aby kreska 1 padła na to miejsce, gdzie dawniej stała cyfra 10 języczka; w tem nowem położeniu będzie już można odczytywać wszelkie pary liczb, składające się na dany stosunek w granicach:

$$\text{od } \frac{10}{15^2} \text{ do } \frac{44,4}{10^2}.$$

W podany sposób należy postępować zawsze, ile razy w granicach wyżej wymienionych przyjdzie nam odczytywać liczniki i mianowniki danego stosunku, ustawione tabelarycznie ponad sobą.

Gdyby nie szło o tabelaryczne rozmieszczanie a tylko o jakiś pojedynczy liczebny przykład, to najprościej będzie wziąć w cyrkiel—lub naznaczyć cienkim ołówkiem na kawałku papieru—długość pojedynczej skali i przenieść ją od punktu uważanego w prawo lub lewo, stosownie do okoliczności. Naprzykład: od liczby 2,18 w prawo do punktu 7 na wardze dolnej, gdy liczba 2,18 była wskazaną lub też odwrotnie—od liczby 7 w lewo do liczby 2,18, gdyby szło o odczytanie, co stoi ponad liczbą 7.

Tą drogą postępując, można na naszym instrumencie wykonywać działania, które inni—z pozoru sądząc—uważają za niewykonalne.

Gdyby jedna z trzech liczb a_1, a_2, b_2 była równą jedności, to mielibyśmy do wykonania działania:

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2^2} = a_1 b_2^2 = \frac{b_2^2}{a_2^2};$$

te działania dadzą się zawsze, bez zastrzeżeń, uskutecznić i nie mamy już potrzeby tych rzeczy objaśniać.

Przez odwracanie języczka nie dają się wytworzyć nowe typy działań. Przy tem położeniu są ustawione tabelarycznie liczby, dające stały iloczyn $a_1\ a_2^2$; gdyby przeto odcyfrowanie takich liczb było pożądanem, należy języczek odwrócić.

Odwracanie języczka mogłoby być przydatnem, gdyby wskutek założenia równości dwóch czynników wypadało oznaczyć trzecie potęgi lub pierwiastki trzeciego stopnia.

O tych szczególnych przypadkach pomówimy oddzielnie pod § VIII.

VI.

Użycie podziałów dolnej wargi przy tworzeniu iloczynów z czynników pod pierwiastkiem.

Gdybyśmy w równaniu logarytmicznem poprzedniego § a mianowicie w równaniu:

$$\log b_1 = \log a_1 - 2 \log a_2 + 2 \log b_2$$

uważali za niewiadomy $\log b_2$ zamiast $\log b_1$, to otrzymalibyśmy:

$$\log b_2 = \log a_2 - \tfrac{1}{2} \log a_1 + \tfrac{1}{2} \log b_1;$$

temu równaniu odpowiada układ linij

$$O_2 B_2 = O_2 A_2 - O_1 A_1 + O_1 B_1$$

i wyrażenie

$$b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \sqrt{b_1}.$$

Przy tych działaniach należy skalę dolnej wargi uważać za normalną a skale logarytmiczne, umieszczone na języczku, stosować jako skale połowiczne tejże normalnej.

Początek układu linijnego leży tu zawsze na początku podziału skali, uważanej za normalną, t. j. na początku dolnej wargi.

Przy położeniu języczka fig. 10 możemy np. wykonać działanie

$$\frac{3}{\sqrt{4}} \sqrt{9} = 4{,}5.$$

Ponieważ charakterystyką wszystkich poszczególnych liczb jest zero (0), a wynik działania nie wychodzi ze skali dolnej wargi, to charakterystyką wyniku będzie także zero (0).

Przy tworzeniu charakterystyk należy baczyć, aby charakterystyka $\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{a_1}}$ była przepołowioną, dla tego to zdarzyć się może, że charakterystyka składać się będzie z liczby całkowitej i $\pm \frac{1}{2}$ (połówki). Ten rezultat oznaczać będzie, że układ linij $O_2 B_2$ należy zmienić o pół ($\frac{1}{2}$), t. j. o całą długość skali na języczku, gdyż poprzednio przyjęliśmy, że cała długość skali na dolnej wardze jest jednością (1). W takich przeto razach należy b_2 odczytywać nie na końcu ciągu linijnego, a posunąć się o jedną skalę naprzód lub w tył, gdyż takie przesuwanie odpowiada mnożeniu lub dzieleniu liczb jednocyfrowych przez czynnik $\sqrt{10}$.

Zwracamy tu uwagę, że w praktyce nie zawsze $-\frac{1}{2}$ lub $+\frac{1}{2}$ odgrywa dla naszego instrumentu jednakową rolę.

Należy zawsze dążyć do tego, aby liczba, mająca się odczytać, leżała w granicach skali pomieszczonej na dolnej wardze, gdyż taka skala raz tylko zachodzi.

Naprzykład, miejmy do obliczenia:

$$\frac{300}{\sqrt{40}} \sqrt{7.51}.$$

Zauważmy przedewszystkiem, że do charakterystyki wchodzić tu będzie liczba pół ($\frac{1}{2}$) i że—przez podsunięcie 4-ki języczka ponad liczbę 3 dolnej wargi—trzecia liczba dana 7,51 wychodzi z granic instrumentu, t. j. leży po prawej ręce w drugiej, nieegzystującej skali dolnej wargi. Aby wynik działania, t. j. liczbę 13 można było na naszym instrumencie odszukać, należy trzecią liczbę daną, t. j. 7,51 odszukać na języczku na skali poprzedzającej. W tym więc razie—z konieczności—wprowadzamy przy obliczaniu charakterystyki liczbę $-\frac{1}{2}$; ponieważ zaś charakterystyką dla naszego liczebnego przykładu jest

$$2 - \tfrac{1}{2} . 1 + \tfrac{1}{2} . 0 = 2 - \tfrac{1}{2},$$

to szukaną liczbą będzie 130.

Na drugi przykład liczebny weźmy

$$\frac{0{,}3 . \sqrt{0{,}218}}{\sqrt{400}};$$

fig. 10. położenie języczka się nie zmieniło, jest ono takie, jakie było na fig. 10 dla poprzedniego przykładu.

W skład charakterystyki wchodzić będzie liczba pół ($\frac{1}{2}$); liczbę trzecią daną 218 trzeba odczytać nie na pierwszej a na drugiej skali języczka, gdzie jest do odczytania liczba 7, leżąca naprzeciw 218, wskutek tego przy tworzeniu charakterystyki trzeba się posiłkować nie liczbą $-\frac{1}{2}$ a liczbą $+\frac{1}{2}$.

Tę charakterystykę obliczymy z wyrażenia:

$$\underline{9} - \tfrac{1}{2} . 2 + \tfrac{1}{2} . \underline{9} = \underline{8} - \tfrac{1}{2} = \underline{7} + \tfrac{1}{2},$$

a wynikiem liczebnym szukanym będzie 0,007.

Mogą i tu zachodzić wypadki, że wynik rachunkowy pojawia się z lewej lub prawej strony skali, istniejącej na wardze dolnej; spotykamy się więc i tu z dwoma powyżej omawianemi wypadkami, gdzie dział pewien — zachodzących między liczbami — stosunków nie mógł być na instrumencie odczytany jednocześnie z drugim działem tych stosunków.

Chociaż w tym razie nie każden wynik działania daje się w dowolnem położeniu języczka odcyfrować, ale można sobie zawsze poradzić w sposób powyżej już podany, bądź to przez przesunięcie języczka albo też przez odkładanie cyrklem długości skali języczka w jedną lub drugą stronę.

Naprzykład, gdyby szło o obliczenie

$$\frac{9}{\sqrt{3,6}} \sqrt{7,51},$$

to należałoby ponad liczbą 9 skali wargowej postawić liczbę 3,6 skali języczka, jak to wskazano na fig. 10. fig. 10.

Ponieważ suma charakterystyk poszczególnych liczb nie zawiera liczby pół ($\frac{1}{2}$) i stanowi ogółem liczbę zero (0), to wynik liczebny naszego działania pojawi się pod liczbą 7,51 w granicach tej skali, na której odczytywaliśmy liczbę 3,6; że zaś liczba trzecia dana 7,51 znalazła się w tym razie na zewnątrz po prawej stronie skali wargowej, to charakterystyką wyniku będzie w tym razie jedność (1); aby zaś ten wynik otrzymać, należy — wziąwszy w cyrkiel długość skali języczka — odciąć tę długość w lewo, poczynając od punktu 7,51; przy drugiej nóżce cyrkla odczytamy liczbę 1,3 na skali wargowej, a właściwym wynikiem będzie liczba 13, gdyż charakterystyką wyniku jest jedność (1).

Zatrzymując w jednem i tem samem położeniu języczek, odczytywać możemy cały szereg liczb, dających jeden i ten sam stosunek $\frac{a_2}{\sqrt{a_1}}$, zachodzący między liczbą daną a_2 i pierwiastkiem kwadratowym drugiej danej liczby a_1.

Wielkość stosunków tu otrzymywanych stoi w związku ze stosunkami omawianemi na końcu w poprzednim §, a mianowicie teraźniejsze stosunki są odwrotnościami pierwiastków kwadratowych poprzednich; wszystkie więc uwagi powyżej podane stosują się do stosunków nowych tu otrzymywanych, a między innymi, zajdą tu bez zmiany zastrzeżenia, tyczące się możliwości odczytywań liczb należących do stosunku, gdy jedna z nich wychodzi z granic instrumentu. Nie mamy więc potrzeby powtarzania tych uwag.

Gdyby jedna z trzech danych liczb była równa jedności (1), to otrzymalibyśmy równania:

$$b_2 = a_2 \sqrt{b_1} \qquad b_2 = \frac{a_2}{\sqrt{a_1}} \qquad b_2 = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{a_1}},$$

a wartość liczebna b_2 każdego z nich może być znaleziona na naszym instrumencie.

Przez odwrócenie języczka nie można i tu wywołać nowych typów działań; spożytkować się daje odwracanie tylko wtenczas, gdyby nam szło o tabelaryczne uszeregowanie liczb, dających na iloczyn ilość stałą

$$a_2 \sqrt{a_1},$$

t. j. o wyszukanie liczb, z których jedna a_2, pomnożona przez pierwiastek kwadratowy z drugiej, daje ilość stałą.

VII.

Zastosowanie podziałek górnej i dolnej wargi.

W dwóch poprzednich paragrafach (V i VI) omawialiśmy zależności, zachodzące między czterema liczbami (składnikami):

$$a_1, \quad b_1, \qquad a_2, \quad b_2;$$

dwie pierwsze odczytywaliśmy zawsze na języczku, dwie drugie na dolnej wardze. Gdybyśmy jednę z dwóch ostatnich liczb t. j. a_2 lub b_2 nie odczytywali na wardze dolnej a na wardze górnej, to wytworzylibyśmy nowy typ działań; wtedy bowiem do rachunku wchodziłyby albo trzy liczby pod pierwiastkiem, albo też trzy, z których dwie byłyby liczbami zwyczajnemi a trzecia kwadratem innej danej liczby.

Zachodzi więc tu analogia z tem, cośmy mówili na końcu § II.

Gdybyśmy, odwołując się do tamtych równań, zamiast liczb wprowadzili ich logarytmy, to pierwszy ciąg linijny

$$O_2 B_2 = OA - O_1 A_1 + O_1 B_1$$

wyrażałby

$$\log b_2 = \tfrac{1}{2} \log a - \tfrac{1}{2} \log a_1 + \tfrac{1}{2} \log b_1,$$

co odpowiada równaniu

fig. 10. $$b_2 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a_1}} \sqrt{b_1} \qquad \text{np. fig. 10} \qquad 3{,}82 = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \sqrt{6{,}5}.$$

Drugi ciąg linijny

$$OB = O_2 A_2 - O_1 A_1 + O_1 B_1$$

wyrażałby

$$\log b = 2 \log a_2 - \log a_1 + \log b_1,$$

co odpowiada równaniu

$$b = \frac{a_2^2}{a_1} b_1 \qquad \text{np.} \quad 16 = \frac{3^2}{2{,}25} \cdot 4.$$

Odczytany wynik (16) uważać należy za liczbę całkowitą, gdyż ciąg linijny OB jest dłuższy, aniżeli pojedyncza skala górnej wargi.

Trzeci ciąg linijny

$$O_1 B_1 = O_1 A_1 - O_2 A_2 + OB$$

wyrażałby

$$\log b_1 = \log a_1 - 2 \log a_2 + \log b,$$

co odpowiada równaniu

$$b_1 = \frac{a_1}{a_2^2}\,b \qquad \text{np.} \quad 4 = \frac{2,25}{3^2}\,16\,.$$

Wreszcie czwarty ciąg linijny

$$O_1 B_1 = O_1 A_1 - O A + O_2 B_2$$

wyrażałby

$$b_1 = \frac{a_1}{a}\,b_2^2 \qquad \text{np.} \quad \frac{4}{9}\,1,3^2 = 0,751\,.$$

Przy rozwiązaniu ostatniego zadania początek ciągu linijnego znajdował się w punkcie środkowym języczka; cyfra — odczytana na wardze dolnej — 1,3 leży na lewo uważanego początku, przeto charakterystyką wyniku będzie liczba 9. Wogóle—dla trzech ostatnich przypadków rzecz, tycząca się charakterystyki, została dostatecznie wyjaśnioną w § V.

Te same zadania liczebne wykonaćby się dały przy odwróceniu języczka, ale wtedy liczba a — stojąca w mianowniku — przerzuciłaby się do licznika a jedna z liczb b przeszłaby do mianownika; przy tem odwróconem położeniu byłyby ponad sobą ustawione w szeregu nieprzerwanym liczby, które—posiadając wykładniki (potęgi) $\frac{1}{2}$, 1 lub 2— dają zawsze na iloczyn ilość stałą. Ile więc razy zajdzie potrzeba takiego szeregowania liczb, należy się uciec do odwracania języczka.

Zakładając jeden z czynników równym jedności, otrzymamy pięć następujących typów nowych działań liczebnych

$$b_2 = \sqrt{a\,b_1}\,, \qquad b_2 = \sqrt{\frac{a}{a_1}}\,, \qquad b_2 = \frac{a_2^2}{a_1}\,, \qquad b = a_2^2 \,.\, b_1\,, \qquad b_1 = \frac{a_1}{a_2^2}\,.$$

Na trzy ostatnie wyrażenia jużeśmy się poprzednio natknęli.

We wszystkich tych pięciu przypadkach cała rzecz polega na ustawieniu dwóch linij a to jest tak prostem, że nie wymaga już objaśnienia; unikniemy pomyłek, gdy pamiętać będziemy, że wyższe potęgi odczytywać należy na dwakroć dłuższej skali t. j. na wardze dolnej.

VIII.

Odczytywanie liczb, będących sześcianami lub pierwiastkami sześciennemi danych liczb.

fig. 11 i 12.

Widzieliśmy poprzednio, że nadając jednemu z trzech—wchodzących tu—składników wartość jedność (1), wytwarzać możemy z dwóch pozostałych iloczyny lub też stosunki. Możemy dojść do nowych typów działań, jeżeli przyjmiemy, że składniki, wchodzące do licznika są jednakowe; wtedy bowiem pojawiają się w naszych wzorach liczby w trzeciej potędze lub też liczby pod pierwiastkiem sześciennym.

Przyrząd pozwala odczytywać wyniki, powstające z podzielenia sześcianu jakiejś liczby przez inną daną liczbę lub też wyniki, powstające z pomnożenia pierwiastku sześciennego jednej liczby przez drugą daną liczbę.

Ile razy zachodzą działania z liczbami, które są podnoszone do sześcianu lub z liczbami stojącemi pod pierwiastkiem sześciennym, najlepiej je uskuteczniać na naszym przyrządzie przy odwróceniu języczka; przy takiem położeniu suma dwóch pierwszych
fig. 5. składników (patrz ciąg linijny fig. 5)

$$2 \log a_2 \quad \text{i} \quad \log a_1$$

będzie zawsze równa długości OO_1—a właściwie $O_1 O_2$—zachodzącej między punktami początkowemi. Ponieważ przyjmujemy, że $a_1 = a_2$, to otrzymamy

$$O_1 O_2 = 3 \log a = \log a^3.$$

Wynik tego działania może być wprost odczytany na skali wargi górnej.

Naprzykład: gdybyśmy ponad liczbą 2 dolnej wargi ustawili także dwójkę (2) języczka odwróconego, to ponad liczbą jeden (1) języczka spostrzeżemy na górnej wardze liczbę 8, będącą sześcianem dwójki (2); w ten sam sposób można tworzyć sześciany wszystkich innych liczb.

Naodwrót — na naszym przyrządzie daje się odszukać pierwiastek sześcienny z każdej liczby; w tym celu przy danem położeniu języczka (odwróconego) należy—rozglądając się po skalach języczka i dolnej wargi — upatrzeć liczby ponad sobą stojące jednakowej wartości (równe).

Uważajmy np. położenie języczka (odwróconego), gdy długość OO_1 odpowiada

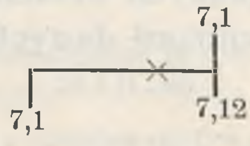
$$\log (4 \,.\, 9) = \log 36.$$

Przerzucając wzrok na języczek i dolną wargę zauważymy, że punkt, w którym zgadza się numeracya obu skal, znajduje się między kreską 7,1 języczka i 7,1 skali wargowej; ten punkt będzie w tym małym przedziale leżał w $^1/_3$ od kreski skali górnej, gdyż podział skali dolnej jest dwa razy większy niż górnej.

Ten punkt odszukiwany znajduje się na języczku na skali prawej—wysuniętej nieco nazewnątrz z ramy suwaka—a odległość tego punktu od początkowego skali wargowej odnosi się do logarytmu liczby 360 t. j. liczby z charakterystyką 2.

Co do interpolacyi, to najlepiej ją wykonywać na podziałach dolnej wargi.

Zauważymy przedewszystkiem, że kreska 7,1 skali języczka przypada ponad cyfrą 7,12 skali wargowej, t. j. że cyfry wymienione zajmują następujące względne położenie



Liczba szukana znajdzie się w uważanym przedziale między 7,1 i 7,12 w punkcie oznaczonym przez (×), a mianowicie w $^2/_3$ odległości od dolnej kreski 7,1 czyli w odległości $^1/_3$ od kreski 7,12; wskutek tego odczytać się mającą liczbą będzie 7,113 (dokładnie 7,1138).

Rzecz widoczna, że przy wszystkich tego rodzaju interpolacyach będziemy mieli do czynienia z jednym i tym samym stosunkiem, możemy przeto powiedzieć ogólnie:

pierwiastek sześcienny danej liczby leży na odcinku, który łączy kreski blisko ponad sobą leżące a należące do liczb niewiele się różniących od szukanego pierwiastku, a mianowicie leży w odległości $^2/_3$, licząc od kreski wargi dolnej.

Wykonywając takie działania, należy naprzód zauważyć na górnej skali właściwą kreskę a następnie dopiero odszukiwać na skali dolnej liczbę odpowiedniej wielkości, gdyż skala dolna jest wyraźniejsza, jako większa.

Gdybyśmy na skali pierwszej języczka (nie zmieniając powyżej rozważanego jego położenia) odszukać chcieli miejsce, należące do jednakowych cyfr—a mianowicie gdybyśmy rozważali położenie języczka, przy którem odległość punktu O_1 od punktu początkowego odpowiada log 36 z charakterystyką 1—to znaleźlibyśmy, że kreska 3,3 górnej skali mija nieco kreskę 3,3 skali dolnej i przypada prawie na 3,31; szukaną liczbą będzie 3,306 (dokładnie 3,302).

Gdybyśmy wreszcie przesunęli w lewo języczek na długość skali, to znaleźlibyśmy, że kreska górna 1,6 zlewa się z kreską dolną 1,5 gdyż $1{,}5^2 \,.\, 1{,}6 = 3{,}6$; szukanym przeto pierwiastkiem będzie liczba 1,533 (dokładnie 1,5326).

Wyznaczyliśmy przeto sposobem wyżej podanym pierwiastki sześcienne z trzech liczb: 360, 36 i 3,6.

Wartość charakterystyki może nas z góry powiadomić, na której skali języczka mają być szukane odpowiadające sobie równe liczby; gdyby charakterystyka po podzieleniu przez 3 dała na iloraz liczbę całą, to szukana para równych liczb znajdować się będzie na tej skali języczka, na której leży punkt początkowy skali dolnej, wargowej.

Gdy po podzieleniu charakterystyki przez 3 wypadnie liczba cała i reszta $+ ^1/_3$ (lub liczba cała i reszta $- ^2/_3$), to szukany pierwiastek sześcienny należy odszukać na tej skali języczka, która całkowicie znajduje się w obrębie skali wargowej; gdyby wreszcie po podzieleniu charakterystyki przez 3 wypadła liczba cała i reszta $+ ^2/_3$ (lub $- ^1/_3$), to szukany pierwiastek leży na skali języczka, zawierającej punkt końcowy skali wargowej.

Liczba sześcienna b^3 może być daną bądź wprost przez liczbę a tak, że $a = b^3$ i wtedy dla wyszukania pierwiastku sześciennego z tej danej liczby należy podprowadzić cyfrę 1 języczka pod cyfrę daną, jak to wykonaliśmy, przyjmując w poprzednich przykładach, że $a = b^3 = 3{,}6$; może się jednak zdarzyć wyszukiwanie pierwiastku sześciennego z liczby, która jest iloczynem dwóch czynników a, a_1 np. z czynników 4 i 9 lub ogólnej

$$b = \sqrt[3]{a a_1}\,.$$

Dla rozwiązania tego wyrażenia, należy podprowadzić cyfrę a_1 języczka pod cyfrę a skali górnej.

Wreszcie mogłaby zajść potrzeba wyznaczenia pierwiastku sześciennego z liczby, która jest iloczynem kwadratu jakiejś liczby a_2^2 przez inną liczbę a_1 np. $3^2 \,.\, 4$; w tym razie dwie te dane liczby należy wyszukać — pierwszą na wardze dolnej, drugą na języczku—podstawić je pod sobą, to szukany pierwiastek sześcienny znajdzie się z wyrażenia

$$b = \sqrt[3]{a_2^2 a_1}\,.$$

Gdyby—naodwrót—daną była liczba a^3, t. j. trzecia potęga jakiejś liczby a i gdyby należało a^3 podzielić przez jakąś liczbę b lub też przez kwadrat jakiejś liczby b_2, t. j. przez b_2^2, to wynik odczytać będziemy mogli wprost, wynajdując na wardze górnej liczbę, stojącą naprzeciwko danego dzielnika b, w drugim zaś razie, wyszukując na skali dolnej języczka liczbę, stojącą naprzeciwko dzielnika b_2^2.

Można przeto na naszym przyrządzie otrzymywać—prócz dawnieszych—następujące jeszcze wyniki równań liczebnych

$$b_1 = a^3 = \frac{a^3}{b} = \frac{a^3}{b_2^2}.$$

Gdybyśmy w ostatniem wyrażeniu uważali b_2^2 za niewiadome, to to b_2 znalazłoby się na dolnej wardze pod liczbą b_1 języczka; tym sposobem rozwiązać się daje nawet wyrażenie

$$b = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{b_1}}.$$

IX.

Przez dobieranie właściwych skal daje się zbudować przyrząd, umożliwiający odczytywanie wprost wszelkich potęg z danych liczb lub też pierwiastków wszelkich stopni z tychże liczb.

W Anglii napotkać można w praktyce liczebnice *z dwoma* języczkami, wsuwanemi jeden na miejsce drugiego. Skala jednego z nich zajmuje tylko $^2/_3$ normalnej długości tak, że trzy takie krótkie skale, rozmieszczone na języczku, zajmują takąż samą długość, co i skala dolnej wargi.

Przyjmując takie urządzenie i oznaczając przez a liczby, stojące na górnej wardze, przez a_3 liczby, stojące na języczku a przez a_2 liczby, stojące na dolnej wardze—można będzie wprost odczytywać wszystkie liczby, dające stały stosunek

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a_3};$$

uważając zaś liczby ponad sobą stojące a rozmieszczone na języczku i na dolnej wardze, znajdziemy, że liczby te dają stały stosunek

$$\frac{a_2^3}{a_3}.$$

Przy takiem więc dobraniu skal można na opisywanym przyrządzie wykonywać wszelkie działania, powstające z łączenia wymienionych stosunków z odpowiedniemi innemi stosunkami:

$$\frac{b^{\frac{3}{2}}}{b_3} \quad \text{i} \quad \frac{b_2^3}{b_3}.$$

Szereg tych działań jest następujący:

$$b = \frac{a_2^2}{a_3^{\frac{2}{3}}} \cdot b_3^{\frac{2}{3}} = \frac{a}{a_3^{\frac{2}{3}}} \cdot b_3^{\frac{2}{3}};$$

$$b_3 = \frac{a_3}{a_2^3} \cdot b_2^3 = \frac{a_3}{a^{\frac{3}{2}}} \cdot b_2^3 = \frac{a_3}{a_2^3} \cdot b^{\frac{3}{2}} = \frac{a_3}{a^{\frac{3}{2}}} \cdot b^{\frac{3}{2}};$$

$$b_2 = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3}} \cdot \sqrt[3]{b_3} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a_3}} \cdot \sqrt[3]{b_3}.$$

Przez odwrócenie języczka otrzymamy inne typy działań a mianowicie ponad sobą stać będą liczby, składające się na stały iloczyn:

$$a^{\frac{3}{2}} \cdot a_3 \quad \text{i} \quad a_2^3 \cdot a_3;$$

przez kombinowanie zaś tych iloczynów z iloczynami

$$b^{\frac{3}{2}} \cdot b_3 \quad \text{i} \quad b_2^3 \cdot b_3$$

można będzie—wskutek przesuwania skal języczka—wykonywać działania:

$$b = \frac{a_2^2 \cdot a_3^{\frac{2}{3}}}{b_3^{\frac{2}{3}}} = \frac{a \cdot a_3^{\frac{2}{3}}}{b_3^{\frac{2}{3}}};$$

$$b_3 = \frac{a_3 \cdot a_2^3}{b_2^3} = \frac{a_3 \cdot a_2^3}{b^{\frac{3}{2}}} = \frac{a_3 \cdot a_2^3}{b^{\frac{3}{2}}} = \frac{a_3 \cdot a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}};$$

$$b_2 = \frac{a_2 \cdot \sqrt[3]{a_3}}{\sqrt[3]{b_3}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a_3}}{\sqrt[3]{b_3}}.$$

Zakładając w powyższych 16-tu wyrażeniach, że jeden z czynników jest równy jedności (1), moglibyśmy wypisać cały szereg nowych związków, zachodzących między dwoma pozostałemi składnikami.

Sądzimy, że wypisywanie tych wyrażeń jest zbyteczne, tem więcej, że — jak wiemy—dodawanie lub odejmowanie dwóch logarytmów może być zawsze wykonanem na każdym typie liczebnic logarytmicznych.

Zwracamy jeszcze uwagę czytelnika na to, że wykładniki składników będą się odnosiły do wykładników wyniku, jak liczby

$$3 : 2 : 6$$

stosownie do tego, czy wynik odczytywać będziemy na górnej wardze, na języczku, czy też na skali wargi dolnej.

Gdybyśmy wreszcie przyjęli, że dwa składniki licznika są sobie równe, to moglibyśmy odczytywać na opisywanym przyrządzie potęgi

$$\frac{5}{6}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3} \text{ i } 4$$

pewnej liczby, mnożonej lub też dzielonej przez inną jakąś liczbę.

Gdybyśmy zastosowali sposób—podany przy opisie zwyczajnego suwaka, a odnoszący się do wyszukiwania z danej liczby pierwiastku sześciennego—to moglibyśmy na opisywanym przyrządzie wyszukiwać liczby dla potęg, będących odwrotnościami poprzednich, t. j. dla wykładników:

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4} \text{ i } \frac{6}{5}.$$

Na zakończenie warto tu jeszcze zauważyć, że na opisywanych liczebnicach daje się z łatwością odcyfrować każda potęga i pierwiastek każdego stopnia z danej liczby; po temu użyć należy *cyrkla.*

Wziąwszy np. między nóżki cyrkla długość odpowiadającą log 2 i przełożywszy tę długość na skali górnej, odczytamy liczbę 4, odkładając jeszcze raz—liczbę 8, za trzeciem odłożeniem—liczbę 16 i t. d.

W ten sam sposób możemy dochodzić do potęg każdej danej liczby.

Gdybyśmy—przeciwnie—długość, odpowiadającą logarytmowi danej liczby, podzielili na pewną oznaczoną liczbę równych części, moglibyśmy odszukać pierwiastek wymaganego stopnia z danej liczby.

Nawet tworzenie potęg z wykładnikami ułomkowemi nie przedstawia trudności, byleby potemu użyć w pomoc metod graficznych.

Naprzykład gdybyśmy mieli obliczyć

$$\sqrt[3]{3^4} = 3^{\frac{4}{3}},$$

to należałoby długość, odpowiadającą log 3, powiększyć na $\frac{1}{3}$.

Gdyby stosunek liczb wykładnikowych nie był tak prostym, jak w poprzednim zadaniu, to za pomocą znanych graficznych sposobów możnaby zawsze dojść do wyniku szukanego, wyrażonego przez długość

$$\log c^{\frac{m}{n}}.$$

Taką długość możnaby—wziąwszy w cyrkiel—przez właściwe odkładanie dodawać lub odejmować od jakiegoś powyżej omawianego ciągu linijnego, a przez to moglibyśmy odczytywać wyniki zawilszych działań jak np.

$$b = \frac{a}{a_1} \cdot b_1 \cdot c^{\pm\frac{m}{n}};$$

składniki a, a_1 i b_1 mogłyby tu nawet zachodzić z wykładnikami 2 lub $\frac{1}{2}$ a jeszcze tego rodzaju zawikłane wyrażenia liczbowe na zwykłej liczebnicy odszukiwaćby się dały.

Wogóle, posiłkując się cyrklem, dają się z łatwością na naszym przyrządzie wynajdywać liczby, powstające z pomnożenia danej liczby przez *wiele* stosunków innych danych liczb.

I w rzeczy samej: ponieważ odległość dwóch kresek na skali przedstawia różnicę logarytmów dwóch liczb c, c_1, to wziąwszy tę odległość w cyrkiel i przyłączając ją do jakiegokolwiek powyżej omawianego ciągu linijnego, otrzymamy wynik

$$b = \frac{a}{a_1} \cdot b_1 \cdot \frac{c}{c_1}.$$

Gdybyśmy wreszcie oprócz cyrkla, posiłkować się chcieli paskiem papieru rysunkowego—w celu nanoszenia na nim upatrzonych wielkości—to nasz przyrząd rachunkowy spełnićby mógł wszystkie cele praktyczne, gdyż nadaje się ten przyrząd do wykonywania wszelkich dodawań lub odejmowań ilukolwiek długości mnożonych przez jakiekolwiek stosunki.

Możemy przeto powiedzieć, że za pomocą opisanego przyrządu rachunkowego można wykonywać wszystkie takie obliczenia, które wymagają zastosowania logarytmów.

Wyniki rachunkowe będą naturalnie przybliżone, jako zależne od samego ustroju przyrządu.

Liczebnice tu omawiane były początkowo wyrabiane przez firmy paryskie. Cały przyrząd zbudowanym był z drzewa bukszpanowego żółtego, a posiadał przedziały (z wielką dokładnością nacinane) i numeracyę—czarne.

W ostatnich latach zaczęto te przyrządy w dużej ilości fabrykować w Niemczech i powprowadzano niektóre zmiany. Korzystna zmiana polega na tem, że rama i języczek są wykonane z celuloidu, są więc białe, a wskutek tego kreski podziałek i cyfry występują dla oka wyraźniej; za to wprowadzono drugą zmianę bardzo niekorzystną, gdyż przeinaczono skale.

W dawniejszych urządzeniach francuskich skala normalna logarytmiczna—zajmująca prawie pół długości przyrządu — naniesioną była dwa razy na wardze górnej, dwa razy u góry języczka i także dwa razy u dołu języczka; skala zaś logarytmiczna większa niż normalna—a więc zajmująca prawie całą długość przyrządu—naniesioną była raz jeden na dolnej wardze.

Z opisu zasad takiego przyrządu łatwo przyjść do przekonania, że nowe urządzenie—niemieckie—zniszczyło wiele zalet i ograniczyło zakres zastosowalności.

Na starym typie można wykonywać większą liczbę różnorodnych działań arytmetycznych, aniżeli to jest możliwem na typie nowym. Przesuwanie dwóch skal jednorodnych obok siebie służy do opanowania—przy danych liczbach prostych—dwóch działań mnożenia i dzielenia, przesuwanie zaś dwóch skal niejednorodnych, z których jedna ma podziałki dwa razy większe niż druga, służy do opanowania działań powyżej wymienionych nawet w tym razie, gdy czynniki są potęgowe lub pod pierwiastkiem.

Na francuskim typie u góry języczka przesuwane są *jednorodne* skale a u dołu *niejednorodne*, tymczasem w typie niemieckim i u góry i u dołu przesuwane są obok siebie zawsze *jednorodne* skale, z tą jedynie zmianą, że podziałkę u dołu zdwojono; w gruncie więc rzeczy powtórzono jedno i to samo i chyba tylko dla słabych oczu ułatwiono mnożenie i dzielenie z liczbami prostemi—chociaż i to nie w zupełności, gdyż dla tych działań koniecznemi są dwie skale, tuż po sobie na jednej linii leżące. Tę wadę niemieccy fabrykanci widocznie spostrzegli i aby temu zaradzić, umieścili klamerkę przesuwaną wzdłuż przyrządu—a wraz z nią strzałkę stale osadzoną lub też drucik a wreszcie rys dyamentem na szkle zrobiony—w celu odrzucania podziałek numeracyi górnej na numeracyę dolną. Ten dodatek—ta klamerka ze strzałką, drutem lub szybką—pogarsza przyrząd, gdyż staje się on przez to więcej złożonym; przytem patrzenie przez szkło na drobne podziałki lub cyfry wcale zalet przyrządowi nie dodaje. Wprowadzono barwę białą celuloidu i skombinowano ją z barwą czarną tuszu dla podziałek w celu wyrazistości, po cóż więc, samochcąc, tę wyrazistość osłabiać przez wprowadzenie klamerek z dodatkami?

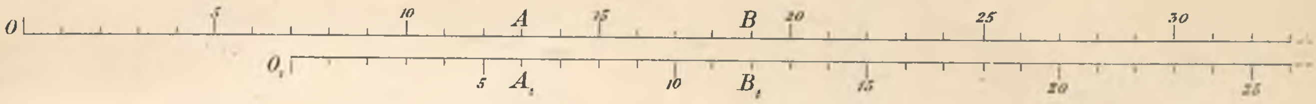
Na tym przykładzie widzimy, jak można dobry pomysł spaczyć przez złe wykonanie.

O teoryi omawianego tu przyrządu piszą się dzisiaj w Niemczech grube książki, a są one pisane tak, że czytający rzuci je w kąt wraz z dowcipnym, pożytecznym przyrządem. Tymczasem zasada jest prostą, jasną, na kilku stronicach pomieścić się dającą, włączając nawet—pomijaną zazwyczaj—kwestyę charakterystyk.

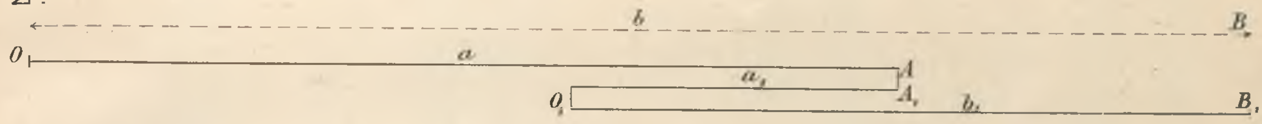
Kto zasadę zrozumie, może już sam wytwarzać różne typy liczebnic i podawać różne prawidła obliczeń.

Warszawa. Maj 1901.

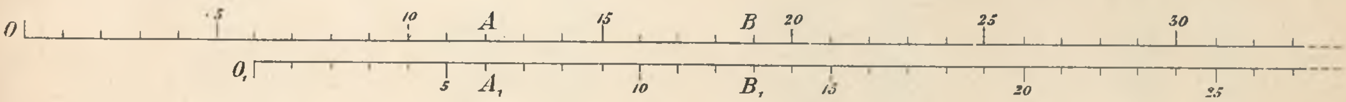
Fig. 1.



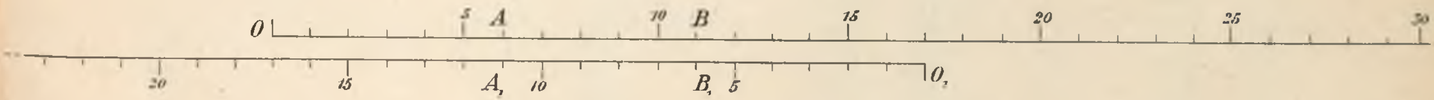
2.



3.

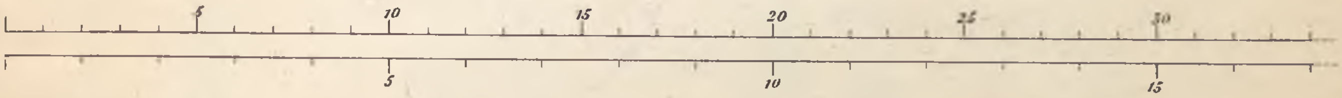


4.

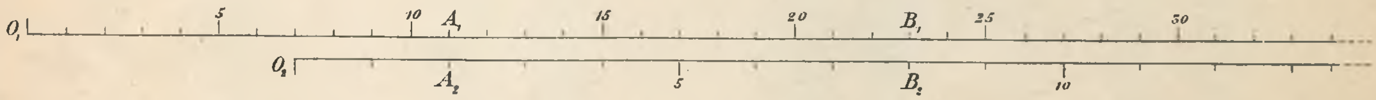


5.

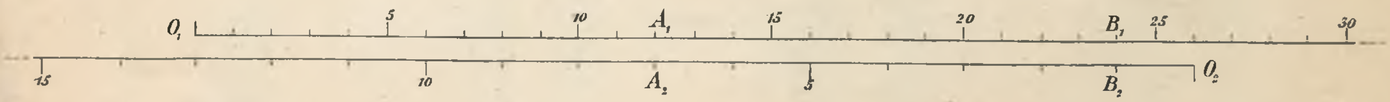
6.



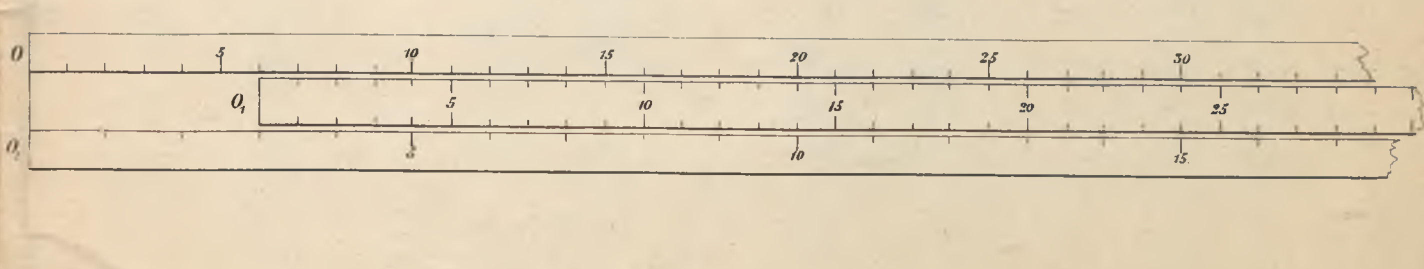
7.



8.



9.



Lit. W. Główczewski w Warszawie.

Skale logarytmiczne.

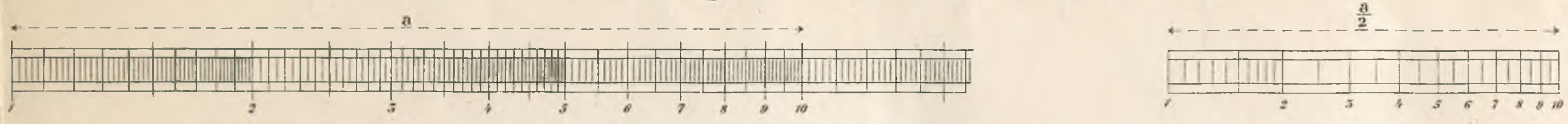
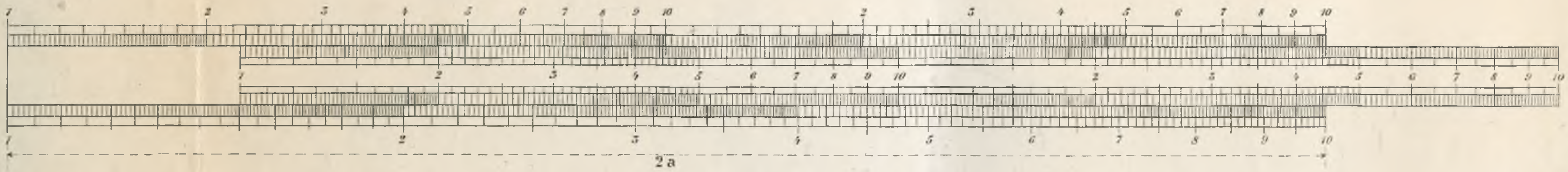
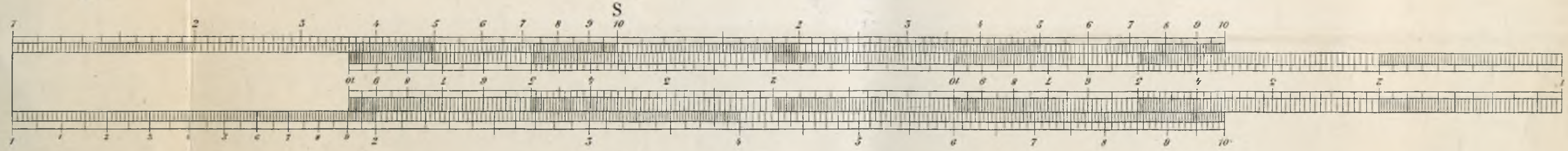


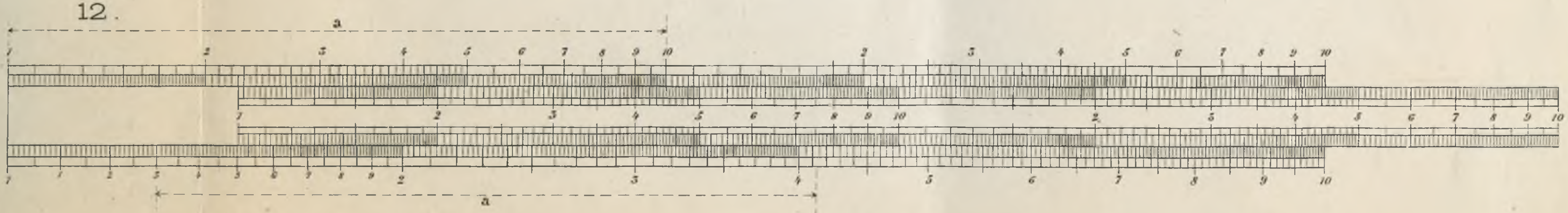
Fig. 10.



11.



12.



Lit. W. Główczewski w Warszawie.