

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = A \sqrt{1 - 2 \frac{\alpha}{\kappa} \cos 2\psi + \frac{\alpha^2}{\kappa^2}}$$

przybiera na kole o promieniu ci wartości $2\alpha \sin \psi$. Wewnątrz koła będziemy mieli do czynienia z ujemnymi wartościami parametru ψ . Linje prądu stanowią dwa układy krzywych zamkniętych, zbiegających się w środku współrzędnych. Ciecz płynie wzdłuż tych linii prądu, w kierunku strzałek - ryc. 117. Początek współrzędnych stanowi w tym wypadku podwójne dodatnio-ujemne źródło cieczy, gdzie prędkości są nieskończenie wielkie. Zauważamy, że rozważany ruch cieczy wtedy tylko można by było zrealizować, gdybyśmy mogli utworzyć opisane źródło cieczy. Przy ruchu rozważanym walec nie napotykałby oporu w cieczy, gdyż prędkość wypadkowa, a zatem i ciśnienie nie zmienia się przy zamianie ψ na $\pi - \psi$. Tymczasem doświadczenie uczy, iż walec przy ruchu w cieczy napotyka pewien dość znaczny opór. Należy przypuszczać iż w rzeczywistości przy ruchu walca, jako też wogóle ciała stałego w cieczy za ciałem tem powstają zmiany, powodujące spadek ciśnienia, stanowiący przyczynę opor

346. Ruch niewirowy /por. § 42/, mający oś symetrii.

Jednym z najważniejszych zagadnień dla teorii

ki jest rozpatrzenie ruchów symetrycznych w cięśnach, gdyż odpowiedni kształt mają zwykle przewody, dysze i t.d. Najdogodniej będzie tu zastosować układ cylindryczny współrzędnych, pamiętając tylko, że prędkości nie zależą od współrzędnej η , o ile oś Z obieraemy wzdłuż osi symetrii ruchu. Ponieważ rozpatrujemy ruch niewirowy, więc

$$\begin{aligned} 2 \omega_{\eta} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \kappa} = 2 \omega_{\kappa} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial(\kappa u_{\eta})}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right] = \\ &= 2 \omega_z = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial(\kappa u_{\eta})}{\partial \kappa} - \frac{\partial u_z}{\partial \eta} \right] = 0; \end{aligned}$$

Pamiętając o symetryczności ruchu możemy przyjąć równanie różniczkowe potencjału prędkości w uproszczonej postaci:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

lub też

$$\frac{\partial(\kappa u_{\kappa})}{\partial \kappa} + \frac{\partial(\kappa u_z)}{\partial z} = 0; \quad [2/]$$

Ponadto ta symetryczność ruchu warunkuje obrotowość powierzchni ekwipotencjalnych tak, iż wystarczy poznać tylko ich przekrój osiowy, znajdując zależność między κ i z . Linje prądu muszą spełniać równanie:

$$\frac{d\kappa}{u_{\kappa}} = \frac{dz}{u_z} = \frac{\kappa d\eta}{u_{\eta}}; \quad \text{Ale ze względu na symetrię ruchu}$$

musi być $u_{\eta} = 0$ lub $u_{\eta} = e/\kappa$. Weźmy pod uwagę pierwszy przypadek, to równanie linii prądu sprowadzi

się do następującego:

$$u_x dz - u_z dx = 0; \quad /3/$$

które po wprowadzeniu czynnika χ przybierze postać:

$$(\chi u_x) dz - (\chi u_z) dx = 0;$$

będącą ze względu na /2/ różniczką zupełną jakiejś funkcji ψ , przepisem

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial z} = u_x; \quad \frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -u_z$$

A ponieważ potencjał prędkości ϕ wyznacza te same składowe szybkości w następujący sposób

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u_x; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = u_z;$$

więc

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0; \quad /4/$$

t.j. funkcje ϕ i ψ tworzą układ ortogonalny powierzchni obrotowych. Przez podstawienie prędkości wyrażonych przez pochodne potencjału prądu do równania

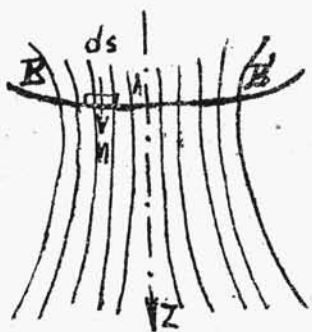
$$\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x} = 2 \omega_A = 0;$$

otrzymamy następujące równanie różniczkowe potencjału prądu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{\chi} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0; \quad /5/$$

Widzimy tedy, że jakkolwiek oba potencjały posiadają różne wymiary, to jednak istnieje między nimi analogiczna zależność, jak przy ruchu płaskim. A więc

tu szybkość elementu cieczy jest równa wartości pochodnej potencjału szybkości ϕ względem normalnej do powierzchni ekwipotencjalnej, przechodzącej przez ten punkt, to jest pochodne potencjału ϕ prądu względem stycznej do toru elementu lub też pochodnej potencjału ψ w kierunku prostopadłym do poprzedniego, leżącym w płaszczyźnie przechodzącej przez oś symetrii. Wreszcie wskażemy na fizyczne znaczenie potencjału prądu, które i tu się sprowadzi do wartości pewnego wydatku



Rys. 118.

cieczy. Istotnie, wyodrębnijmy w cieczy powierzchnię obrotową BAB' /rys.118/, to wydatek cieczy przez nią wyniesie

$$Q = \int_A^B v_n ds \cdot 2\pi r = 2\pi \int_A^B \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial s} r ds = 2\pi (\psi_B - \psi_A);$$

0 ile oś symetrii cieczy nie stanowi źródła linowego, to

$$\psi_A = 0; \quad Q = 2\pi \psi_B;$$

§47. Całkowanie równań potencjałów przy ruchu mającym oś symetrii.

W poprzednim paragrafie wyprowadziliśmy 2 równania różniczkowe II-go rzędu, które muszą być spełnione, aby jakieś funkcje mogły być potencjałami prędkości lub prądu.

Mienowicie dla potencjału prądu znaleźliśmy:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0;$$

zaś dla potencjału szybkości

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$$

Okażemy sposób znajdowania dowolnej ilości całek szczególnych tych równań.

Założmy przeto przedewszystkiem, iż rozwinięty w szereg potencjał prądu wyrazi się jako $\Psi = \sum \tau^k Z_k(z)$ gdzie $Z_k(z)$ oznacza pewną funkcję zmiennej z .

Biorąc pochodne funkcji Ψ , otrzymamy:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \sum k \tau^{k-1} Z_k; \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} = \sum k(k-1) \tau^{k-2} Z_k;$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \sum \tau^k \frac{d^2 Z_k}{dz^2} = \sum \tau^k Z_k'';$$

Po podstawieniu tych wartości do równania różniczkowego funkcji Ψ , otrzymamy:

$$\sum k(k-2) \tau^{k-2} Z_k + \sum \tau^k Z_k'' = 0;$$

Zastępując pod znakiem pierwszej sumy k przez $k+2$ otrzymamy

$$\sum k(k+2) \tau^k Z_{k+2} + \sum \tau^k Z_k'' = 0;$$

albo

$$\sum \tau^k [k(k+2) Z_{k+2} + Z_k''] = 0;$$

skąd

$$Z_{k+2} = - \frac{Z_k''}{k(k+2)}; \quad /1/$$

Widzimy stąd, że można obrać dowolne dwie funkcje Z_1 i Z_2 , wówczas zaś wszystkie następne i poprzednie dadzą się z równania /1/ wyprowadzić. Zauważmy ponadto, że jeżeli założymy $Z_1 \neq 0$, to potencjał ψ będzie zawierał wyrazy, do których wchodzi ujemne potęgi ϵ , przeto wartość potencjału ψ , a więc i prędkości na osi symetrii będzie nieskończenie wielka. Jeżeli chcemy, aby wartość potencjału oraz prędkości na osi były skończone, to musimy założyć $Z_1 = 0$. Wtedy możemy przyjąć, iż wszystkie funkcje Z_k przy k nieparzystym są zerami. Zatrzymując tylko Z_k przy k parzystym możemy nie wprowadzać ujemnych wartości k , a zatem ujemnych potęg ϵ , gdyż na podstawie /1/ mamy:

$$Z_k'' = -k(k+2)Z_{k+2};$$

który to warunek zostanie spełniony, jeżeli przy dowolnym Z_2 założymy $Z_0 = Z_4 = Z_{12} = 0$. Z temi ograniczeniami pisząc dalej Z zamiast Z_2 otrzymamy następującą wartość potencjału prądu

$$\psi = \epsilon^2 Z - \epsilon^4 \frac{Z''}{2 \cdot 4} + \epsilon^6 \frac{Z'''}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \epsilon^8 \frac{Z'''}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \quad /2/$$

Łatwo wskazać, jakie znaczenie fizyczne ma funkcja Z . Otóż, jak wiemy, szybkość $U = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon}$. Wobec tego dla

osi z szybkość elementów cieczy wyrazi się jako

$$(u_z)_{\kappa=0} = -2Z;$$

Analogicznie znajdziemy potencjał ϕ szybkości, kładąc, jak poprzednio

$$\phi = \sum \kappa_k Z_k(z);$$

Wskutek zmiany znaku w drugim wyrazie znajdziemy w tym razie, że

$$Z_{k+2} = -\frac{1}{(k+2)^2} Z_k''; \quad /3/$$

Uwzględniając i tu tylko wyrazy o wykładniku parzystym znajdziemy rozwinięcie następujące:

$$\phi = Z_0 - \kappa^2 \frac{Z_0''}{2^2} + \kappa^4 \frac{Z_0'''}{2^2 4^2} - \kappa^6 \frac{Z_0'''}{2^2 4^2 6^2} + \dots \quad /4/$$

Ale funkcja Z we wzorze /2/ i Z_0 we wzorze /4/ nie są od siebie niezależne, gdyż potencjały są powiązane ze sobą zależnościami

$$\frac{\partial \phi}{\partial \kappa} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa};$$

Biorąc pod uwagę na przykład drugą z nich, znajdziemy, że

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = Z_0' - \kappa^2 \frac{Z_0'''}{2^2} + \kappa^4 \frac{Z_0'''}{2^2 4^2} - \dots = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \psi}{\partial \kappa} = -2Z + \kappa^2 \frac{Z''}{2} - \kappa^4 \frac{Z'''}{2^2}$$

skąd

$$Z = -\frac{1}{2} Z_0'; \quad /5/$$

ce otrzymamy i z drugiego warunku. Jest rzeczą oczywistą, iż szeregi /2/ i /4/ mogą być skończone lub nie skończone, zależnie od obioru funkcji Z , a więc i Z .

Postaramy się to wyjaśnić na przykładach.

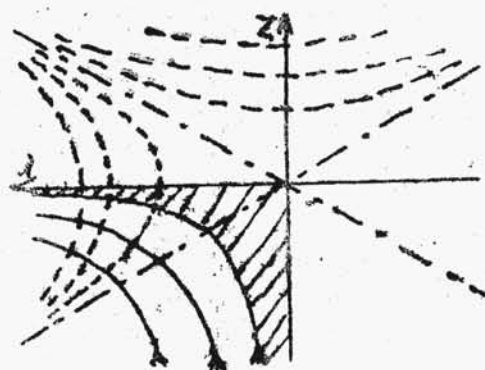
1/ Niech będzie tedy przedewszystkiem $Z = Az$ t.j. $Z_0 = -Az^2$. Wówczas szereg /2/ się uprości tak, iż $\psi = Az^2$, zaś szereg /4/ da $\phi = A(\frac{1}{2}z^2 - Z^2)$. Graficznie otrzymamy w ten sposób układ hyperbol ϕ , których asymptoty tworzą z osią z kąt taki, iż jego tangens

wynosi $\frac{1}{2}$. Natomiast krzywe ψ dadzą ortogonalny z poprzednim układ krzywych hyperbolicznych /rys. 119/. Ponadto szybkość

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = Az;$$

zad

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -2Az;$$



Rys. 119.

układ całkowita prędkość

$$V = \sqrt{x^2 + 4z^2} A;$$

A więc w tym razie szybkość rośnie szybko w miarę oddalania się cieczy od osi.

2/ W bardziej ogólnym przypadku, gdy funkcja Z_0 = wielomian, szeregi /2/ i /4/ są również skończone. Krzywa ϕ i ψ mają wówczas kształt podobny, wzrasta tylko

3/ Zajmijmy się z kolei wypadkiem funkcji, posiadających nieskończoną ilość pochodnych. Będziemy dla przykładu rozpatrywać równolegle funkcje wykładnicze i trygonometryczne, kładąc w pierwszym wypadku $Z_0 = Ae^{\frac{z}{\alpha}}$ zaś w drugim $Z_0 = A \cos \frac{z}{\alpha}$, tak iż wartości Z będą odpowiadać $Z = -\frac{A}{2\alpha} e^{\frac{z}{\alpha}}$ oraz $Z = \frac{A}{2\alpha} \sin \frac{z}{\alpha}$. Wobec tego dla pierwszej wartości jest

$$\Phi = Ae^{\frac{z}{\alpha}} \left[1 - \frac{\chi^2}{2^2 \alpha^2} + \frac{\chi^4}{2^2 4^2 \alpha^4} - \frac{\chi^6}{2^2 4^2 6^2 \alpha^6} + \dots \right];$$

zaś

$$\Psi = -\frac{A\alpha e^{\frac{z}{\alpha}}}{2} \left[\frac{\chi^2}{\alpha^2} - \frac{\chi^4}{2 \cdot 4 \cdot \alpha^4} + \frac{\chi^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot \alpha^6} - \frac{\chi^8}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8 \cdot \alpha^8} + \dots \right];$$

Natomiast druga funkcja da

$$\Phi = A \cos \frac{z}{\alpha} \left[1 + \frac{\chi^2}{2^2 \alpha^2} + \frac{\chi^4}{2^2 4^2 \alpha^4} + \frac{\chi^6}{2^2 4^2 6^2 \alpha^6} + \dots \right];$$

oraz

$$\Psi = \frac{A\alpha \sin \frac{z}{\alpha}}{2} \left[\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\chi^4}{2 \cdot 4 \cdot \alpha^4} + \frac{\chi^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot \alpha^6} + \dots \right];$$

Zagadnienie powyższe doprowadziło nas tedy na funkcje Bessel'a, określone szeregami:

$$J_0\left(\frac{\chi}{\alpha}\right) = 1 - \frac{\chi^2}{2^2 \alpha^2} + \frac{\chi^4}{2^2 4^2 \alpha^4} - \frac{\chi^6}{2^2 4^2 6^2 \alpha^6} + \dots$$

oraz

$$I_0\left(\frac{\chi}{\alpha}\right) = 1 + \frac{\chi^2}{2^2 \alpha^2} + \frac{\chi^4}{2^2 4^2 \alpha^4} + \frac{\chi^6}{2^2 4^2 6^2 \alpha^6} + \dots$$

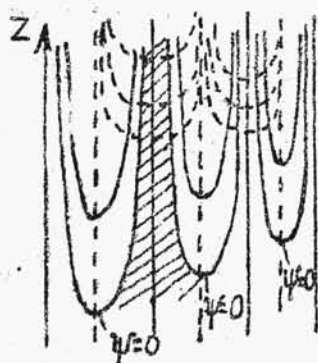
Wobec tego powyższe wyniki dadzą się napisać w prostszej postaci. Mianowicie pierwszy z nich się przekształci na

$$\phi = A e^{\frac{z}{a}} J_0\left(\frac{r}{a}\right); \quad \psi = -\frac{A a e^{\frac{z}{a}}}{2} \left(-2r \frac{dJ_0}{dr}\right) =$$

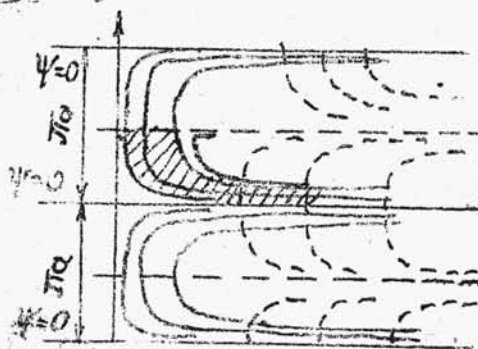
zaś drugi

$$\phi = A \cos \frac{z}{a} I_0\left(\frac{r}{a}\right); \quad \psi = \frac{A a \sin \frac{z}{a}}{2} \left(2r \frac{dI_0}{dr}\right) = A r \sin \frac{z}{a} \frac{dI_0}{dr} / \frac{a}{b}$$

Stosownie do otrzymanych wyników analitycznych można utworzyć 2 wykresy /rys. 120 i 121/:



Rys. 120.



Rys. 121.

Pierwszy z nich dotyczy się funkcji wykładniczej. Znalazwszy pierwiastki równania $\frac{dJ_0}{dr}$, otrzymujemy szereg krzywych $\psi=0$, które się coraz bardziej zwiężają. Kreskowanymi linjami zostały zaznaczone krzywe ϕ , przecinające się ortogonalnie z układem poprzednim. Natomiast drugi rysunek daje szereg prostych równoległych i odległych o πa , jako wykres układu $\psi=0$. Otrzymane kształty stosować można w wirnikach pomp i turbin.

4/ Ponieważ każda funkcja da się wyrazić jako

szereg nieskończony lub skończony funkcji Bessela:

$$f(x) = A_1 J_0(x) + A_2 J_0(2x) + A_3 J_0(3x) + \dots$$

więc tem samem zagadnienie ogólne symetrycznego ruchu jest teoretycznie rozwiązane w tym stopniu, iż możemy zbadać ruch cieczy, odpowiadający dowolnemu zgóry obranemu układowi wartości potencjału lub prędkości na danej płaszczyźnie, prostopadłej do osi symetrii.

§48. Inne metody całkowania równań potencjału w przypadku ruchu symetrycznego względem osi Z.

Niech równanie Laplace'a w wypadku ogólnym

$$\Delta_2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

posiada całkę

$$\phi = f(\alpha x + \beta y + \gamma z);$$

Wówczas, podstawiając powyższą wartość do równania wyjściowego otrzymamy ogólną zależność między stałymi parametrami α, β, γ : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$. Warunek powyższy będzie spełniony, jeżeli założymy

$$\alpha = i \cos t; \quad \beta = i \sin t; \quad \gamma = 1;$$

Wprowadzając współrzędne cylindryczne ϑ, φ, z otrzymamy

$x = z \cos \vartheta$; $y = z \sin \vartheta$, można przeto ostatecznie przepisać całkę ogólną jako

$$\phi = f(i \cos t \cdot z \cos \vartheta + i \sin t \cdot z \sin \vartheta + z) = f(z + iz \cos \vartheta)$$

Ponieważ wszystkie funkcje tego typu są całkami naszego równania, więc ze względu na jego linjowość również i ich kombinacja będzie taką całką. Tak więc całką będzie również funkcja

$$\phi = \int_0^{\pi} f' [Z + i\kappa \cos(t-\eta)] dt = \int_0^{\pi} f' [Z + i\kappa \cos \varphi] d\varphi;$$

Całka powyższa będzie potencjałem prędkości dla ruchu mającego oś symetrii, gdyż nie zawiera spółrzędnej η .

Łatwo sprawdzić, podstawiając powyższą wartość do równania potencjału w przypadku ruchu symetrycznego względem osi:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \kappa^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0;$$

Posługując się powyższą wartością ϕ , jako potencjałem szybkości, możemy znaleźć potencjał prądu ψ z ogólnych zależności

$$\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial z}; \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \kappa \frac{\partial \phi}{\partial \kappa};$$

Mianowicie

$$\frac{\partial \psi}{\partial \kappa} = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\kappa \int_0^{\pi} f' [Z + i\kappa \cos \varphi] d\varphi;$$

zaś

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = i\kappa \int_0^{\pi} \cos \varphi f' [Z + i\kappa \cos \varphi] d\varphi;$$

Łatwo sprawdzić, iż całką obu tych równań jest

$$\psi = i\kappa \int_0^{\pi} \cos \varphi f [Z + i\kappa \cos \varphi] d\varphi;$$

gdyż wówczas

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = i\tau \int_0^\pi f' [z + i\tau \cos \varphi] \cos \varphi d\varphi;$$

zas

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = i \int_0^\pi f \cdot \cos \varphi d\varphi + i^2 \tau \int_0^\pi f' \cdot \cos^2 \varphi d\varphi = -\tau \int_0^\pi f' [z + i\tau \cos \varphi] d\varphi;$$

Z ostatniej równości wynika, iż

$$\tau \int_0^\pi f' \cdot \sin^2 \varphi d\varphi = -i \int_0^\pi f \cdot \cos \varphi d\varphi;$$

czyli

$$\frac{\tau}{i\tau} \int_0^\pi df_\beta \sin \varphi = i \int_0^\pi f \cdot \cos \varphi d\varphi;$$

co istotnie ma miejsce, bowiem

$$\int_0^\pi [\sin \varphi \cdot df_\beta + d(\sin \varphi) f] = \int_0^\pi d[f \sin \beta] = 0;$$

Wyprowadziwszy w ten sposób ogólny kształt potencjału prądu $\Psi = i\tau \int_0^\pi f [z + i\tau \cos \varphi] \cos \varphi d\varphi$ potencjału szybkości

$\phi = \int_0^\pi f [z + i\tau \cos \varphi] d\varphi$ na przykładach wyjaśnimy nową metodę rozwiązywania zagadnień ruchu symetrycznego.

1/ Niech więc

$$f [z + i\tau \cos \varphi] = A [z + i\tau \cos \varphi]^2;$$

to

$$\Psi = A i \tau \int_0^\pi (z + i\tau \cos \varphi)^2 \cos \varphi d\varphi = -A \pi z \tau^2;$$

zas

$$\phi = A \int_0^\pi (z + i\tau \cos \varphi)^2 d\varphi = A \pi (z^2 - \tau^2/2);$$

t.j. otrzymaliśmy wyniki takie same jak w pierwszym przykładzie poprzedniego paragrafu.

2/ Podobnie dla

$$f(z + iz \cos \varphi) = A e^{\frac{z + iz \cos \varphi}{a}};$$

jest

$$\phi = A e^{\frac{z}{a}} \int_0^{\pi} e^{\frac{iz \cos \varphi}{a}} d\varphi = \pi A e^{\frac{z}{a}} J_0$$

gdzie J_0 oznacza znaną już nam funkcję Bessela.

§49. Całkowanie równania potencjału w przypadku ogólnym ruchu niewirowego.

Dotychczas mówiliśmy o całkowaniu równań potencjału w przypadku ruchu symetrycznego. Z kolei zastanowimy się, jak znajdować całki szczególne równania różniczkowego potencjału prędkości przy ruchu niewirowym najzupełniej ogólnym. Wyprowadziliśmy mianowicie w układzie biegunowym dla ruchu niewirowego następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0; \quad (1)$$

Wykażemy jeden ze sposobów rozwiązywania powyższego równania różniczkowego. Założmy tedy, że potencjał ma postać:

$$\sin(\lambda \theta) r^m f(z/r); \quad \text{lub} \quad e^{i\lambda \theta} r^m f(z/r);$$