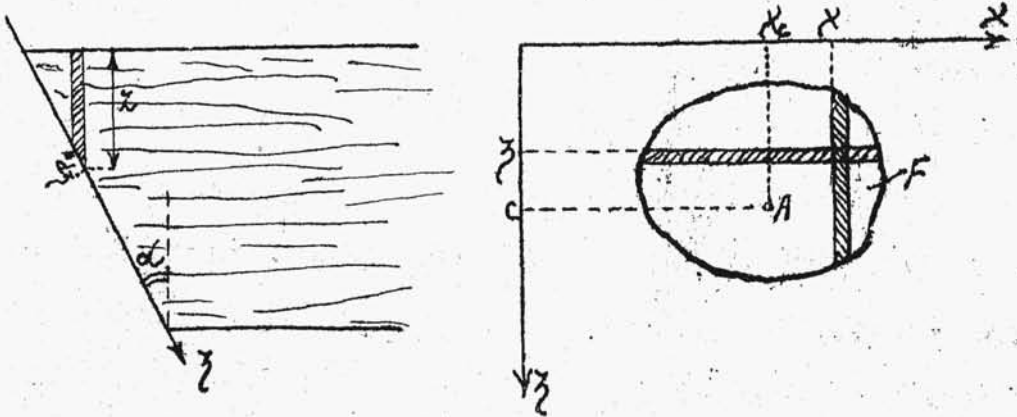


$$X_c = \frac{a_2 - a_1}{4} \frac{4h_1 + 3h_2}{3h_1 + 2h_2};$$

§10. Wyżej rozpatrzony sposób znajdowania odciętej środka ciśnienia zawodzi w przypadku bardziej skłóconych konturów. Wyprowadzimy przeto ogólne analityczne wyrażenie na wartość współrzędnej X_c środka ciśnienia A /rys.20/.
Ważny bowiem momenty elementarnych par względem osi ξ .



rys.20.

które w sumie muszą dać moment PX_c parcia wypadkowego P .

W tym celu musimy scałkować wewnątrz konturu F wartość

$y \cdot z \, d\xi \, dx \cdot x$; momentu elementarnego. Stąd
 $\iint_F y \cdot z \, d\xi \, dx \cdot x = PX_c$. Ale, jak wiadomo, $P = Fz_s \gamma$
zaś $z = \xi \cos \alpha$; wobec tego

$$\iint_F y \cdot z \, d\xi \cdot dx \cdot x = \iint_F y \cdot \xi \cos \alpha \, d\xi \, dx \cdot x = Fz_s \gamma X_c = F \xi_s \cos \alpha \gamma X_c$$

czyli

$$X_c = \frac{\iint_F x \xi \, d\xi \, dx}{F \xi_s};$$

Zauważmy jednak, że rozciągnięta na całe pole F

całka $\iint_F x\zeta dx d\zeta$ wyraża moment odśrodkowy $J_{x\zeta}$ figury względem osi X i ζ . Otrzymany wzór na X_c można tedy przepisać jeszcze w następującej postaci

$$X_c = \frac{J_{x\zeta}}{F \cdot \zeta_s}$$

Nasuwa się teraz pytanie, kiedy środek ciężkości A leży na osi ζ . Wówczas musi być

$$X_c = J_{x\zeta} = 0;$$

Ale co do momentu odśrodkowego $J_{x\zeta}$ ustaliliśmy w mechanice, że jest on zerem względem t.zw. osi głównych danego punktu. Jednakże powyższy warunek nie wyczerpuje wszystkich przypadków. Oznaczając bowiem moment odśrodkowy figury względem osi X_0, Y_0 , poprowadzonych równolegle do osi X, ζ przez środek masy S pola F , zaś przez a, b - współrzędne punktu S w układzie $X\zeta$, wiemy, że

$$J_{x\zeta} = J_{X_0 Y_0} + abF;$$

Ze wzoru tego widać, że równość $J_{x\zeta} = 0$ zachodzi wogóle wtedy, gdy

$$1/ J_{X_0 Y_0} = 0$$

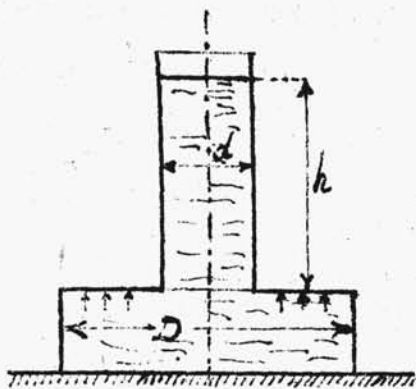
przy a albo $b = 0$

lub

$$2/ \text{gdy } J_{X_0 Y_0} = -abF;$$

Widzimy, że ogólny sposób analitycznego wyznaczenia środka ciśnienia wymaga obliczenia momentu odśrodkowego danego pola. Częstość mamy kontury dowolne, nie dające się ująć analitycznie /np. przy budowie okrętów/. Wówczas stosujemy metodę graficzną, dzieląc pole na szereg pasków pękiem prostych poziomych, następnie dla pasków tych, rozpatrywanych jako prostokąty lub trapezy, znajdujemy środki ciśnienia i wartości parę cząstkowych, wreszcie za pomocą statyki wykreślnej, znajdujemy wypadkową tych par i jej punkt przyczepienia.

Zauważmy, że nasze dotychczasowe rozważania o parciu cieczy na ścianki i dna nie zmieniają się, o ile ciecz będzie się znajdować od dołu, nie zaś od góry. Wówczas bowiem zmieni się tylko kierunek ciśnienia. Wyobraźmy sobie, na przykład, naczynie cylindryczne, z obu stron otwarte, jak na rys. 21. Dopóki woda nie przekroczy wnim pewnej wysokości, naczynie przylega do stołu, i ciecz się nie wylewa. Dopiero gdy ciecz osiągnie wysokości h , naczynie się podniesie i ciecz wypłynie. Łatwo tę wysokość h określić teoretycznie. Oznaczmy bowiem ciężar naczy-



Rys. 21.

nej wysokości, naczynie przylega do stołu, i ciecz się nie wylewa. Dopiero gdy ciecz osiągnie wysokości h , naczynie się podniesie i ciecz wypłynie. Łatwo tę wysokość h określić teoretycznie.

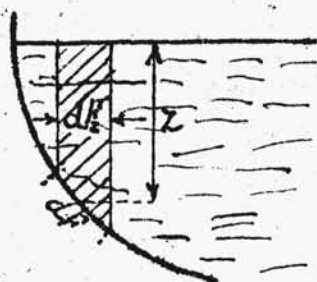
Oznaczmy bowiem ciężar naczy-

nia przez G i wówczas, aby się naczynie nie podniosło musi ciśnienie $h\gamma$ na pierścieniu o polu $\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ co najwyżej wytwarzać parcie, równoważące ciężar G t.j.

$$\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) h\gamma \leq G;$$

§11. Ściany krzywe.

Dotychczas mówiliśmy o denkach i ścianach prostokątnych. Rozpatrzmy przeto jeszcze przypadek ścian krzywych /rys.22/. W tym wypadku będziemy mieli do czynienia z układem sił ogólnym przestrzennym,



Rys. 22.

nie istnieje przeto w tym razie ani wypadkowa parć elementarnych ani środek ciśnienia.

Jak w ogólnym wypadku przestrzennego układu sił, możemy tu określić sumę rzutów parć elementarnych na

rozważaną część ściany krzywej w dowolnie obranym kierunku i moment tych parć względem dowolnie obranej prostej.

Stosując dowolnie obrany układ współrzędnych prostokątnych

xyz i nazywając przez X, Y, Z wspomniane sumy rzutów, zaś przez L, M, N momenty względem osi, otrzymamy:

$$X = \int (p - p_a) dF_x; \quad Y = \int (p - p_a) dF_y; \quad Z = \int (p - p_a) dF_z;$$

$$L = \int (p - p_a)(z dF_y - y dF_z); \quad M = \int (p - p_a)(x dF_z - z dF_x);$$

$$N = \int (p - p_a)(y dF_x - x dF_y);$$

W tych wzorach dF_x, dF_y, dF_z stanowią rzuty elementu dF na płaszczyzny yz, zx, xy ; zaś $p - p_a$ jest nadciśnieniem na rozważany element dF ściany krzywej. Całkowanie rozciąga się na całą rozważaną część ściany. Ciśnienie, odpowiadające elementowi dF , naogół jest różne od ciśnień, odpowiadających rzutom dF_x, dF_y, dF_z tego elementu, przeto ogólnie X, Y, Z zależą nie tylko od F_x, F_y, F_z , t.j. od konturu rozważanej części ściany krzywej, lecz i od kształtu ściany przez ten kontur objętej. Należy tu jeszcze zaznaczyć, że wypadkowe X, Y, Z naogół nie przecinają się w jednym punkcie.

Jeżeli teraz obierzemy system współrzędnych w taki sposób, żeby oś Z była pionowa, zaś osie X, Y poziome, to ciśnienie, odpowiadające elementowi dF będzie takie same, jak ciśnienie, odpowiadające rzutom tego elementu dF_x i dF_y , gdyż dF, dF_x i dF_y leżą na jednym poziomie, powiedzmy przeto możemy, iż w kierunku poziomym suma rzutów par elementarnych, działających na rozważaną część ściany krzywej, jest równą parciu wypadkowemu na rzut tej ściany na płaszczyznę pionową, prostopadłą do obranego kierunku poziomego. Innymi słowy parcie w kierunku poziomym zależy tylko od konturu rozważanej części.

ściany krzywej i położenia tego konturu nie zależy natomiast od kształtu ściany przez ten kontur objętej. Tym sposobem dla sił składowych poziomych X i Y i odpowiednich rzutów F_x i F_y rozważanej części ściany krzywej możemy stosować reguły ustalone dla ścian płaskich.

Parcie poziome na część ściany naczynia w danym kierunku równoważy się całkowicie przez równe co do wielkości, lecz przeciwne co do kierunku parcie poziome cieczy na pozostałą część ścian naczynia. Rzeczą jest oczywistą, że wytrzymałość naczynia powinna być dostateczna dla przeniesienia tych wszystkich parć poziomych.

Składowa pionowa Z w tym wypadku będzie $\int dF_z \cdot z$
 dF_z jest poziomym rzutem elementu dF ściany, przeto

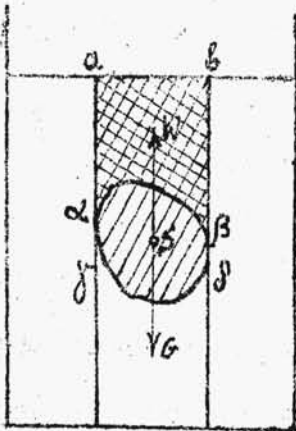
$$\int dF_z \cdot z = U;$$

gdzie U jest objętością pionowego słupa cieczy, mającego za podstawę rozważaną część ściany krzywej i sięgającego do powierzchni cieczy. Na zasadzie powyższego napisać możemy $Z = \gamma U$, czyli parcie pionowe na część ściany krzywej jest równe ciężarowi powyżej określonego słupa cieczy, niezależnie od kształtu pozostałej części ścian naczynia. Powyższe rozumowanie nie ulega zmianie, jeżeli ciecz ciskać będzie na ścianę z dołu do góry. Ponieważ parcia pionowe elementarne są do siebie równoległe, przeto wypadkowa $Z = \gamma U$ przechodzi przez środek masy po-

wyższego słupa cieczy.

§ 12. Parcie cieczy na ciała w niej zanurzone.

Peprzednie rozumowania, tyczące się ścian płaskich i krzywych, pozostają bez zmiany i wtedy, gdy do cieczy wprowadzimy jakieśkolwiek ciało stałe. Nówczas powierzchnia graniczna ciała i cieczy gra rolę ścianki. Poprowadźmy cylinder pionowy styczny do powierzchni ciała, które może posatem częściowo wystawać z cieczy. Pamiętając, jakieśny w § 11 znajdowali



Rys. 23.

składową pionową parcia na krzywe ścianki, widzimy, że na powierzchni $\alpha\beta$ ciała działa parcie cieczy, równe ciężarowi słupa $\alpha\beta ba$ i przechodzące pionowo przez jego

środek masy. Podobnie na powierzchnię $\gamma\delta$ działa, ale już w przeciwnym kierunku, parcie, równe ciężarowi słupa cieczy $\gamma\delta ba$ i przechodzące przez jego środek masy. Wyładkowa tych 2 działań będzie siła W zwana "wyporem", również pionowo skierowana i przechodząca przez środek masy ciała w przypuszczeniu, że jest ono jednorodne. Ponadto widad, że wypór jest co do wielkości równy ciężarowi cieczy, zawartej w objętości ciała. W ten sposób

otrzymaliśmy prawo Archimiedesa, które orzeka, że ciało tyle traci na wadze w cieczy, ile waży ciecz przesunięta. Uczyńmy tu jeszcze dwie uwagi. Po pierwsze łatwo zauważyć, że działanie całkowite cieczy na ciało sprowadza się właśnie do wyporu W i do momentu około pewnej osi poziomej, gdyż parcia wypadkowe w odwrotnych kierunkach poziomych zniosą się wzajemnie. Po drugie: Prawo Archimiedesa stosuje się i dla gazów. Z prawa Archimiedesa wynikają bezpośrednio warunki opadania i wznoszenia się ciał, zanurzonych w cieczach. Mianowicie, zależnie od tego czy

$$\gamma_{\text{ciała}} > \gamma_{\text{cieczy}}, \quad \gamma_{\text{ciała}} = \gamma_{\text{cieczy}} \quad \text{lub}$$

$$\gamma_{\text{ciała}} < \gamma_{\text{cieczy}}$$

ciało będzie opadać, pozostanie w zawieszeniu, albo zacznie się unosić w cieczy. Załóżmy, że cząstki cieczy nie stawiają oporu przy przesuwaniu się w niej ciała. Umieścimy wówczas gdziekolwiek wewnątrz cieczy o ciężarze właściwym γ ciało o objętości V i o ciężarze właściwym γ_1 i zbadajmy jego ruch, o ile je pozostawimy samo sobie. Otóż na ciało działa siła ciężkości $G = V\gamma_1$ skierowana pionowo na dół, i wypór $W = V\gamma$, skierowany pionowo do góry. Stąd ciało znajduje się pod wypadkowym działaniem

siły $G - W$, zwróconej na dół i uzyska w tym kierunku przyspieszenie

$$a = \frac{G - W}{V \gamma / \gamma_1} = \frac{V(\gamma_1 - \gamma) g}{V \gamma_1} = g(1 - \gamma / \gamma_1);$$

Wnosimy stąd, że ciało poruszać się będzie ruchem jednostajnie przyspieszonym do góry lub na dół, zależnie od tego, czy $\gamma > \gamma_1$, czy też $\gamma_1 > \gamma$. W rzeczywistości dochodzi tu jeszcze dość znaczny opór cząstek cieczy, który zmienia idealne warunki ruchu.

§ 13. Równowaga ciał pływających.

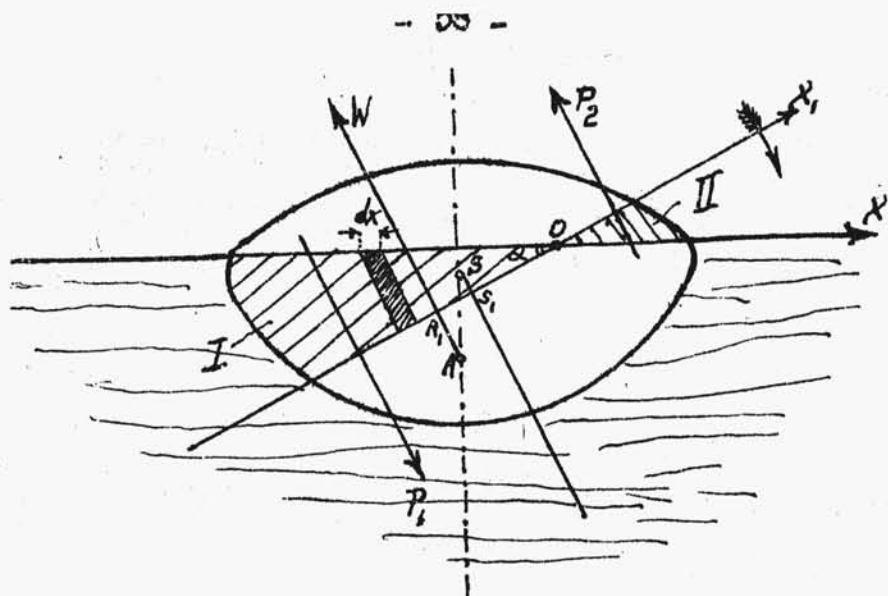
Mówimy, że ciało pływa w cieczy, o ile pozostawione samemu sobie, wynurza się ono częściowo na jej powierzchnię. Jak wiemy, ma to miejsce wtedy, gdy

$$\gamma_{\text{ciała}} \leq \gamma_{\text{cieczy}}.$$

Zanim przystąpimy do teorii pływania, ustalimy parę oznaczeń.

Otóż ciało pływające częściowo wystaje z cieczy tak, że poziom cieczy przecina jego powierzchnię wzdłuż pewnego konturu. Płaszczyznę tego konturu nazywamy "płaszczyzną pływania" ciała. Z warunków równowagi ciała w cieczach wynika, że jego środek masy musi się znajdować na pion-

wej linii działania wyporu. Tę prostą pionową nazywamy "osią pływania". Równowaga takiego pływającego ciała może być obojętna, stała lub niestała. W pierwszym wypadku ciało zachowuje się obojętnie na wszelkie wychylenia z położenia pierwotnego. Natomiast równowaga będzie stała, o ile ciało, wychylone z położenia równowagi, powraca doń po szeregu wahań. W przeciwnym razie równowagę nazywamy niestałą. Wszelki ruch ciała możemy sprowadzić do ruchu postępowego środka masy i do ruchu obrotowego około jakiejś osi, przechodzącej przez ten środek. Ruch postępowy poziomy i obrotowy około osi pionowej nie grają ważnej roli w teorii pływania, bo wartość i położenie wyporu W względem ciała nie ulega przytem zmianie. Rozpatrzmy przeto wypadek ruchu postępowego pionowego i obrotowego poziomego, sprowadzające się razem do ruchu obrotowego ciała dokoła osi poziomej O , nie przechodzącej przez środek masy S ciała /rys.24/. Wyobraźmy sobie, że otrzymamy przytem niewielki obrót o $\angle \alpha$, tak iż pierwotna płaszczyzna pływania X , znajmie teraz położenie X_1 . Wówczas w ciele wynurzy się klin lewy I, zanurzy się zaś klin prawy II. Możemy tedy przyjąć, że następstwo ruchu ciała, wartość ani punkt zaczepienia wyporu W nie uległy zmianie, tylko zmienił się kierunek, natomiast pojawiły się dwa parcia dodatkowe cieczy P_1 i P_2 .



Rys. 24.

w klinach lewym i prawym. Choćby nawet $P_1 = P_2$, równowagi może nie być, gdyż wchodzi tu w grę momenty. Obierzmy preto oś X , jak na rysunku, zaś oś obrotu O przyjmijmy za oś Y . Przytem pod Y rozumieć będziemy prostopadłą do płaszczyzny rysunku szerokość płaszczyzny pływania.

Ważmy momenty względem punktu O . Otóż :

$$W = G \pm U \gamma$$

gdzie przez γ oznaczamy ciężar właściwy cieczy, przez

U zaś objętość części zanurzonej ciała. Jeżeli więc oznaczmy SA przez δ , to moment tych dwóch sił wynosi

$$G \delta \sin \alpha = U \gamma \delta \sin \alpha / 2$$

Uwzględnijmy teraz parcia powstałe wskutek przesunięcia się klinów. Tak więc dla lewego klina element objętości

$$x \sin \alpha dx \cos \alpha y$$

wytwarza element parcia

$$dP_1 = \gamma x \sin \alpha dx \cos \alpha y$$

dając w ten sposób względem punktu O elementarny moment

$$dM_1 = \gamma x \sin \alpha dx \cos \alpha y x \cos \alpha = \gamma \sin \alpha \cos^2 \alpha \cdot x^2 y dx;$$

Stąd cały moment

$M_1 = \gamma \sin \alpha \cos^2 \alpha \int x^2 y dx = \gamma \sin \alpha \cos^2 \alpha J_{y1}$
gdzie $\int x^2 y dx$ wyraża właśnie moment J_{y1} lewej części płaszczyzny pływania względem osi obrotu y .

Analogicznie dla prawego klina znajdziemy:

$$M_2 = \gamma \sin \alpha \cos^2 \alpha J_{y2};$$

gdzie J_{y2} oznacza moment bezwładności prawej części płaszczyzny pływania względem osi obrotu. Z rysunku widać, że momenty M_1 i M_2 będą się starały nadać ciału położenie pierwotne, czemu się sprzeciwia moment $\gamma \rho \sin \alpha W$ i G . Warunek stałości równowagi wyrazi się tedy, jak następuje:

$$M_1 + M_2 - \gamma \rho \sin \alpha > 0;$$

t.j. po podstawieniu

$$\gamma \sin \alpha \cos^2 \alpha (J_{y1} + J_{y2}) > \gamma \rho \sin \alpha;$$

Ale suma momentów J_{y1} i J_{y2} wyraża całkowity moment J_y płaszczyzny pływania względem osi obrotu y . wobec tego

musi być $\cos^2 \alpha J_y \sqrt{v} S$ czyli

$$S < \frac{J_y \cos^2 \alpha}{v}; \quad /2/$$

A więc taki warunek musi spełniać odległość między środkiem masy, a punktem przyczepienia wyporu w ciele, aby równowaga była stała. Wprowadzamy tu jeszcze pewne uproszczenia. Będziemy rozpatrywali tylko małe odchylenia tak, iż wyraz $\cos^2 \alpha \cong 1$. Ponadto równowaga będziemy dopiero wtedy stała dla wszystkich możliwych kierunków osi obrotu, o ile nierówność /2/ będzie miała miejsce i wtedy, gdy na J_y podstawimy moment J_0 płaszczyzny pływania względem jej głównych przestych, t.j. o ile przyjmniemy za oś obrotu oś główną najmniejszego momentu płaszczyzny pływania. Wówczas

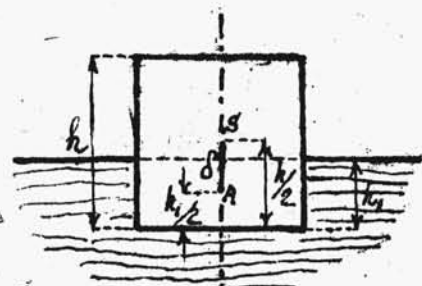
$$S < J_0/v$$

Należy pamiętać, iż w tym wzorze v oznacza objętość zanurzonej części ciała. Można nam uczynić zarzut, żeśmy prowadzili rozumowania tylko dla tego szczególnego przypadku, gdy punkt przyczepienia wyporu A znajduje się pod środkiem masy. Gdyby jednak tak nie było, to wszelkie rozważania byłyby zbędne, gdyż wszystkie momenty dążyłyby zgodnie do przywrócenia ciała pierwotnego położenia. Wówczas wartość nie grałaby roli, bo warunek analityczny żądałby tylko, aby S było większe od liczby ujemnej $(-J_0/v)$. Gdyby

wreszcie

$$M_1 + M_2 - V \gamma S \sin \alpha = 0$$

to równowaga byłaby obojętna. Tak mamy, na przykład, w przypadku ciał symetrycznych względem osi obrotu, jak dla kuli lub walca, zanurzonego osią poziomą. Mały przykład wyjaśni bliżej tę teorię. Wyobraźmy sobie, że belka o przekroju kwadratowym /rys.25/, pływa w ten sposób, że dwie jej ściany są



Rys. 25.

poziome. /Nie jest to wcale jedynie możliwy przypadek pływania, gdyż może być, na przykład, jedna z płaszczyzn przekątnych pozioma/. Zbadajmy wówczas warunek stałości równowagi. Załóżmy, że

bok kwadratu wynosi h , zaś długość belki L . Jeśli jeszcze mamy γ i γ_1 , to łatwo znaleźć wysokość zanurzenia h_1 , gdyż ciało traci na wadze w cieczy tyle, ile waży ciecz przesunięta, t.j.

$$h h_1 L \gamma = h^2 L \gamma_1 \quad \text{czyli} \quad h_1 = h \frac{\gamma}{\gamma_1};$$

Oś najmniejszego momentu w płaszczyźnie pływania jest tu jedna z osi prostokątnego przekroju tej płaszczyzny tak, iż

$$J_0 = \frac{L h^3}{12};$$

A że objętość zanurzonej części ciała $V = h h_1 L$, zaś

$$AS = S^2 = \frac{h}{2} - \frac{h_1}{2};$$

na zasadzie prawa Archimidesa, więc warunek stałości równowagi $\delta < \frac{J_0}{V}$ przybierze tu postać następującą:

$$\frac{h}{2} - \frac{h_1}{2} < \frac{L h^3}{12 h h_1 L}$$

Ale

$$h_1 = h \cdot \frac{\delta_1}{\gamma}$$

więc

$$\frac{h}{2} \left(1 - \frac{\delta_1}{\gamma}\right) < \frac{h}{12 \frac{\delta_1}{\gamma}}$$

skąd

$$\left(\frac{\delta_1}{\gamma}\right)^2 - \left(\frac{\delta_1}{\gamma}\right) + \frac{1}{6} > 0$$

Wobec tego stosunek $\frac{\delta_1}{\gamma}$ musi się znajdować poza obszarem pierwiastków równania

$$x^2 - x + \frac{1}{6} > 0;$$

czyli

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{12}} < \frac{\delta_1}{\gamma} < 1;$$

lub

$$0 < \frac{\delta_1}{\gamma} < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{12}};$$

Wyciągając pierwiastek znajdziemy w przybliżeniu

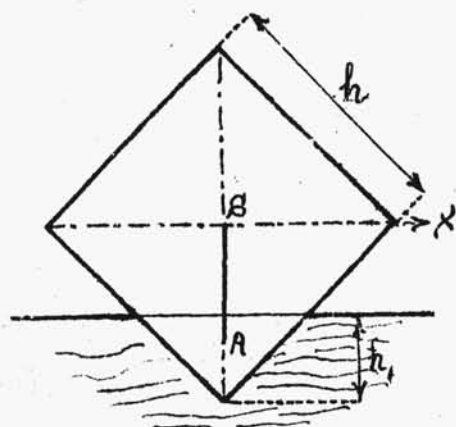
$$0,788 < \frac{\delta_1}{\gamma} < 1$$

albo

$$0 < \frac{\delta_1}{\gamma} < 0,212;$$

Taki więc stosunek musi zachodzić między ciężarami właściwymi

ciała i cieczy, aby równowaga była w powyższych warunkach stała. To samo zagadnienie rozpatrzmy kładąc, że belka pływa płaszczyzną przekątnią pionowo. Wówczas /rys.25 a/ w myśl



Rys. 25 a.

najmniejszy $J_0 = \frac{2Lh_1^3}{3}$, więc warunek $\rho < \frac{J_0}{V}$ przybierze tu postać następującą:

$$\frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}h\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} < \frac{2h \cdot h_1^3}{3h_1^2 L}$$

t.j.

$$\frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}h\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} < \frac{2}{3}h\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}};$$

czyli

$$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} > \frac{1}{\sqrt{2}};$$

skąd

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} > \frac{9}{32} \approx 0,28,$$

Analogicznie znajdziemy górną granicę tego stosunku, kładąc iż poziom cieczy jest ponad osią X. Warunek ten jest rów-

prawa Archimedeasa

$$h_1^2 L \gamma = h^2 L \gamma_1;$$

t.j.

$$h_1 = h\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}}$$

W tym razie odległość

$$\begin{aligned} \rho = SA &= \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}h_1 = \\ &= \frac{h}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}h\sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma}} \end{aligned}$$

A że objętość zanurzonej czę-

ści $V = h_1^2 L$, zaś moment

noważy zastąpieniu γ_1 przez $\gamma - \gamma_1$, tak iż

$$\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma} > \frac{9}{32}$$

czyli

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} < \frac{23}{32} \approx 0,72;$$

A więc ostatecznie:

$$0,28 < \frac{\gamma_1}{\gamma} < 0,72;$$

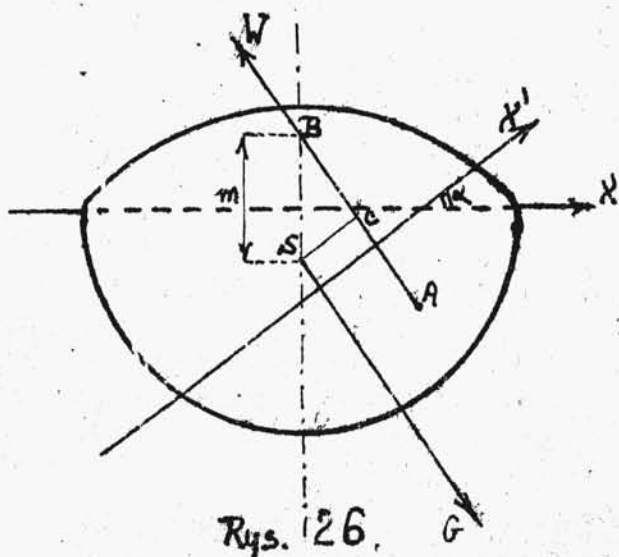
§14. Metacentrum.

Rozpatrzmy warunki pływania z innego punktu widzenia.

Wyobraźmy sobie przeto, że płaszczyzna pływania X po odchyleniu ciała o α przybrała położenie

X' /rys.26/. Nie będzie-

my brali pod uwagę klinów, lecz wyobraźmy sobie, iż całkowite działanie wyporu we cieczy na ciało sprowadzi się wówczas do wypadkowej W , przyłożonej w środku masy A , zanurzonej części ciała. Jeśli



Rys. 26.

uwzględnimy jeszcze ciężar G ciała, to moment pary sił W i $G = W$ względem osi obrotu, będzie się starał sprowadzić ciało do pierwotnego położenia. Moment ten, równy