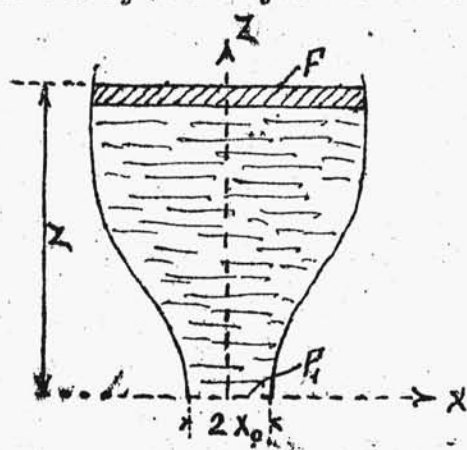


przebiegu zjawiska stosują się i tutaj. Jako praktyczne zastosowanie powyższej teorii wymienimy dawniej stosowany sposób podnoszenia poziomu cieczy w komorach szluzowych.

§ 29. ZADANIA NA RUCH CIECZY TRWAŁY I NIETRWAŁY.

ZADANIE. Jaki być musi kształt naczynia, żeby przy wypływie nietrwałym, szybkość obniżania poziomu była stała.

Założmy przedewszystkiem, że naczynie o przekroju, jak na rys. 69 jest obrotowem. Otóż ogólnie wydatek



Rys. 69.

$dQ = \alpha \beta F_1 \sqrt{2gz} dt$
gdzie przez F_1 oznaczyliśmy przekrój otworu wypływowego. Z drugiej strony tę samą wartość uzyskamy i na innej drodze, gdyż

$$dQ = -F dz$$

gdzie przez F oznaczyliśmy

powierzchnię swobodną cieczy. W rozważanym przypadku jest

$$F_1 = \pi x_0^2;$$

$$F = \pi x^2;$$

tak iż

$$dQ = \alpha \beta \pi x_0^2 \sqrt{2gz} dt = \pi x^2 dz$$

skąd stała szybkość

$$-\frac{dz}{dt} = \alpha \beta x_0^2 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{z}}{x^2} = \text{const.}$$

czyli $z = Cx^4$, gdzie C oznacza pewną stałą, którą łatwo znaleźć.

Gdyby naczynie było korytem cylindrycznym o tworzących stałej długości L , prostopadłych do płaszczyzny rysunku, wówczas

$$dQ = \alpha \beta 2x_0 L \sqrt{2gz} dt = 2xL dz;$$

czyli szybkość

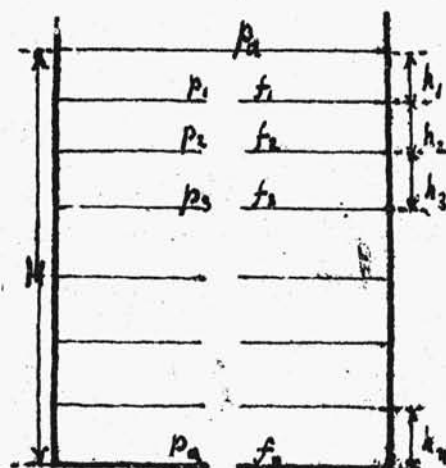
$$\frac{dz}{dt} = \alpha \beta x_0 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{z}}{x} = \text{const.}$$

skąd

$$x^2 = pz$$

gdzie stałą p łatwo znaleźć. W tym wypadku przekrój cylindrycznego naczynia jest parabolą.

ZADANIE. Zbadać szybkość wypływu trwałego cieczy z naczynia z przegrodkami /rys.70/.



Rys. 70.

Naczynie składa się tedy z n przegródek, wypełnionych całkowicie cieczą i połączonych otworami. Ponieważ wówczas wydatek musi być stały, więc rozpatrując różnicę ciśnień dla każdej przegrody i jej wysokość, znajdziemy, iż

$$Q = \alpha_1 \beta_1 f_1 \sqrt{2g \left(h_1 + \frac{p_0 - p_1}{\gamma} \right)} = \alpha_2 \beta_2 f_2 \sqrt{2g \left(h_2 + \frac{p_1 - p_0}{\gamma} \right)} = \alpha_n \beta_n f_n \sqrt{2g \left(h_n + \frac{p_{n-1} - p_n}{\gamma} \right)}$$

Z szeregu n powyższych równań wynika bezpośrednio, iż

$$Q \sum \frac{1}{\alpha_i^2 \beta_i^2 f_i^2} = 2 \alpha (h_1 + h_2 + \dots + h_n) = 2gH$$

Gdy wielkości α , β i f są odpowiednio stałe dla wszystkich przegródek, wówczas

$$Q = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha \beta f \sqrt{2gh};$$

t.j. wydatek jest \sqrt{n} razy mniejszy, niż przy swobodnym wypływie z wysokości H . Praktycznie stosujemy niekiedy tego rodzaju uszczelnienie wodne, np. między tłokiem a cylindrem w pompach pożarniczych, gdzie szczeliwo miękkie, np. skóra lub konopie, jako narażone na wyschnięcie podczas postoju, jest niepraktyczne.

ZADANIE. W naczyniu z wodą o wysokości H zrobiono 2 małe otwory. Wiedząc, że jeden z nich znajduje się na wysokości h od dna, znaleźć odległość z drugiego tak, aby teoretyczne parabole wypływu przecięły się w jednym punkcie A na poziomie dna /rys.71/.

Wiemy, że w układzie XZ , równanie pierwszej paraboli będzie

$$x^2 = \frac{2v^2}{g} z_1$$

zaś w układzie $x_1 z_1$ równanie drugiej da analogicznie

$$x_1^2 = \frac{2v_1^2}{g} z_1$$

Dla punktu A znajdziemy tedy, iż

$$\frac{2v^2}{g} h = \frac{2v_1^2}{g} (z_1 + h);$$

skąd

$$\frac{z+h}{h} = \frac{v^2}{v_1^2} \quad /1/$$

Ale na zasadzie teorii wypływów jest

$$v^2 = \sqrt{2g(H-h)}$$

zaś

$$v_1^2 = \sqrt{2g(H-h-z_1)} \quad /2/$$

Na zasadzie równań /1/ i /2/ znajdziemy, że z_1 czyni zadość równaniu stopnia II-go kształtu:

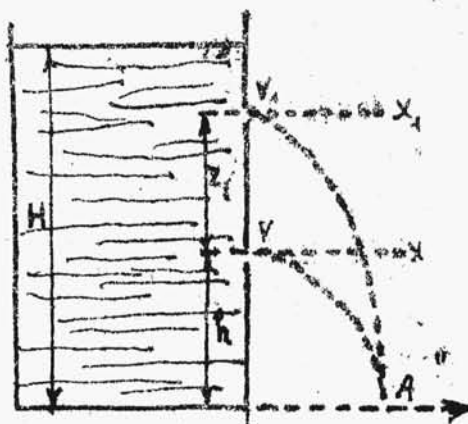
$$z_1(H-2h-z_1) = 0;$$

czyli

$$z_1 = H - 2h;$$

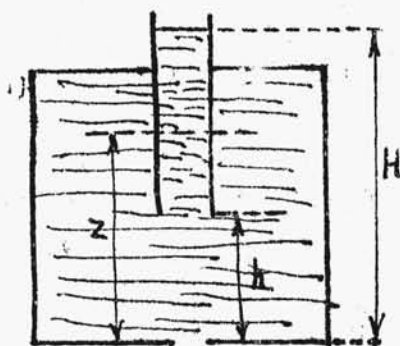
ZADANIE. Zbadać wypływ cieczy z naczynia Mariotte'a /rys.72/.

Wyobraźmy sobie naczynie, wypełnione cieczą z zanurzoną doń rurką, w której poziom cieczy sięga powyżej



Rys. 71.

górnego denka naczynia. Wyobraźmy sobie dalej, że w pewnej chwili otwieramy w denku dolnym otwór f ; cho-

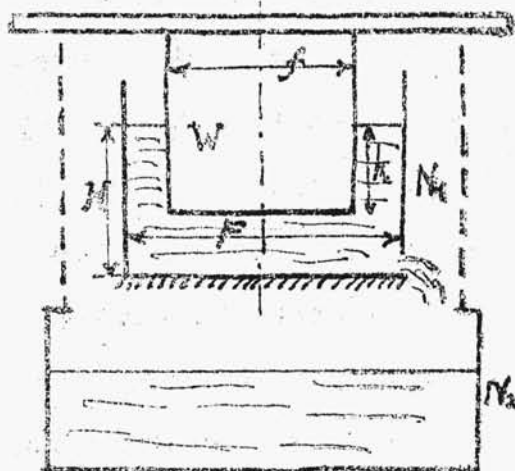


Rys. 72.

dzi o zbadanie ruchu cieczy. Otóż jest rzeczą oczywistą, że początkowo naczynie pozostaje wypełnione cieczą, natomiast w rurce obniża się poziom, będziemy przeto mieli do czynienia z wypływem nietrwałym. Ten pierw-

szy okres wypływu cieczy o szybkości $v = \alpha \sqrt{2gz}$, gdzie przez z oznaczamy zmienną wysokość poziomu cieczy w rurce, trwa dotąd dopóki poziom ten nie obniży się na wysokość h , zaś v spadnie do wartości $v = \alpha \sqrt{2gh}$. Wówczas pęcherzyki powietrza mogą się już dostawać zewnątrz do naczynia, otrzymujemy okres trwałego wypływu cieczy z prędkością stałą $\sqrt{2gh}$. Okres drugi kończy się w chwili, gdy poziom cieczy w naczyniu osiągnie poziom otworu rurki. Wówczas następuje już trzeci okres wypływu nietrwałego cieczy z naczynia, aż do jego zupełnego opróżnienia.

ZADANIE. Do naczynia N_1 z wodą zanurzamy walec W zaopatrzony w płytę, na której się zwiesza naczynie N_2 /rys. 73/. W naczyniu N_1 , które jest nieruchome, uczy-



Rys. 73

niono otwór tak, że ciecz wypływa zeń do naczynia dolnego. Jak się będzie zmieniać wysokość H z czasem?

Przypuśćmy, że po pewnym czasie wysokość h przybrała wartość h_1 , zaś H odpowiednio H_1 . Wypłynęła tedy z naczynia górnego

ilość

$$[(HF - hf) - (H_1F - h_1f)]$$

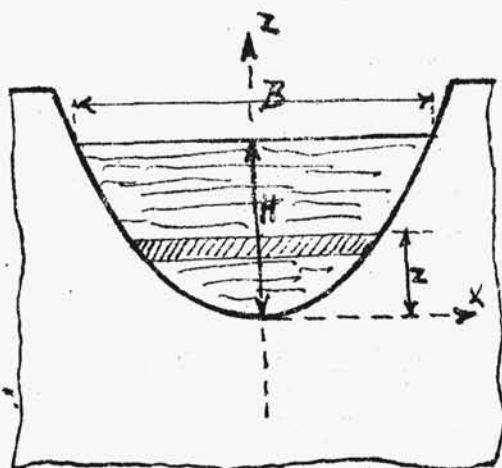
wody, która dzięki istniejącym połączeniom o tyleż zwiększy wypór cieczy w naczyniu N_1 na walec. Ale zwiększenie wyporu wynosi $(h_1 - h)fg$. Wobec tego możemy napisać, iż

$$[(HF - hf) - (H_1F - h_1f)]g = (h_1 - h)fg;$$

czyli $H = H_1$. A więc okazuje się, iż wysokość cieczy H w naczyniu pozostaje aż do chwili zetknięcia walca W z dnem naczynia N_1 niezmienna. Wnosimy stąd, że i szybkość wypływu $v = \sqrt{2gH}$ zachowuje stałą wartość.

ZADANIE. Znaleźć wydatek cieczy przez przeważ o parabolicznym wykroju /rys. 74/.

Obierając osi, jak na rysunku, założmy, że równanie paraboli jest



$$x^2 = 2pz$$

Łatwo wówczas znaleźć parametr p , znając szerokość B powierzchni cieczy na wysokości H od wierzchołka paraboli. Podstawiając bowiem, otrzymamy wówczas,

Rys. 74.

iż

$$\frac{B^2}{4} = 2pH;$$

t.j.

$$2p = \frac{B^2}{4H};$$

czyli ostatecznie równanie paraboli będzie miało kształt następujący:

$$x^2 = \frac{B^2}{4H} \cdot z;$$

Wówczas wydatek elementarny

$$dQ = 2\alpha\beta x dz \sqrt{2g(H-z)};$$

zaś całkowity wydatek wyniesie

$$\begin{aligned} Q &= 2\alpha\beta\sqrt{2g} \int_0^H \sqrt{H-z} \cdot x dz = \\ &= 2\alpha\beta\sqrt{2g} \frac{B}{2\sqrt{H}} \int_0^H \sqrt{(H-z)z} dz = \end{aligned}$$

$$= \alpha \beta B \sqrt{2g/H} \int_0^H \sqrt{\frac{H^2}{4} - \left(\frac{H}{2} - z\right)^2} dz$$

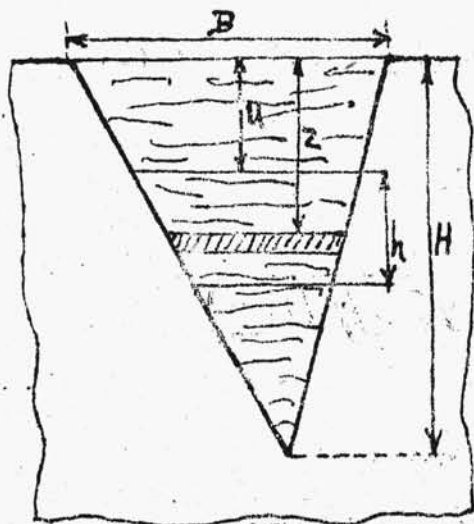
Ponieważ zaś ogólnie

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left\{ x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right\} + C$$

więc przez analogję znajdziemy, iż

$$Q = \alpha \beta B \sqrt{2g/H} \cdot \frac{1}{2} \left[\left(z - \frac{H}{2}\right) \sqrt{(H-z)z} + \frac{H^2}{4} \cdot \arcsin \frac{z - H/2}{H/2} \right]_0^H = \frac{1}{4} \pi \alpha \beta B \sqrt{g/2} H^{3/2};$$

ZADANIE. Wyobraźmy sobie trójkąt narysowany na ścianie naczynia, leżący podstawą na poziomie cieczy i skierowany wierzchołkiem na dół. Część tego trójkąta, tworząca trapez o danej wysokości podstawach poziomych stanowi otwór przez który ciecz wypływa. Określić położenie trapezu, przy którym wydatek jest największy /rys. 75/.



Rys. 75.

Obliczmy wydatek

Q w założeniu, że większa podstawa trapezu jest odległa o

u od podstawy B trójkąta. Wówczas

$$dQ = \alpha \beta dz B \frac{H-z}{H} \sqrt{2gz}$$

zaś

$$Q = \frac{\alpha \beta B \sqrt{2g}}{H} \int_u^{u+h} \sqrt{z} (H-z) dz =$$

$$= C \int_u^{u+h} \sqrt{z} dz;$$

gdzie przez C oznaczyliśmy wartość stałego wyrażenia $\frac{d\beta B\sqrt{2g}}{H}$. Aby Q było maximum, musi być $\frac{dQ}{du} = 0$ t.j.

$$C[(H-u-h)\sqrt{u+h} - (H-u)\sqrt{u}] = 0$$

skąd

$$\left(\frac{H-u-h}{H-u}\right)^2 = \frac{u}{u+h}$$

czyli

$$\frac{(H-u-h)^2}{2h(H-u)-h^2} = \frac{u}{h};$$

t.j.

$$u(2H-h-2u) = (H-u-h)^2$$

Znosząc nawiasy, znajdziemy tedy ostatecznie, iż

$$3u^2 - (4H-3h)u + (H-h)^2 = 0$$

Widzimy stąd, że zadanie niezawsze jest rozwiązalne.

Gdy w szczególnym przypadku $h = H/3$, wówczas

$$3u^2 - 3Hu + \frac{1}{9}H^2 = 0;$$

skąd

$$u = H\left(\frac{3 \pm \sqrt{H/3}}{6}\right);$$

Weźmiemy tu oczywiście pod uwagę tylko znak $-/-$, gdyż wprowadzić u jest w obu przypadkach dodatnie, to jednak w drugim wypadku $u+h > H$, czyli druga podstawa trapezu nie przetnie się z trójkątem.