czyli

$$Q = \sqrt{\frac{2g(p_0 - p_1)}{\gamma\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)}}\;;$$

Dla danego wodomiaru możemy raz na zawsze ustalić wartość

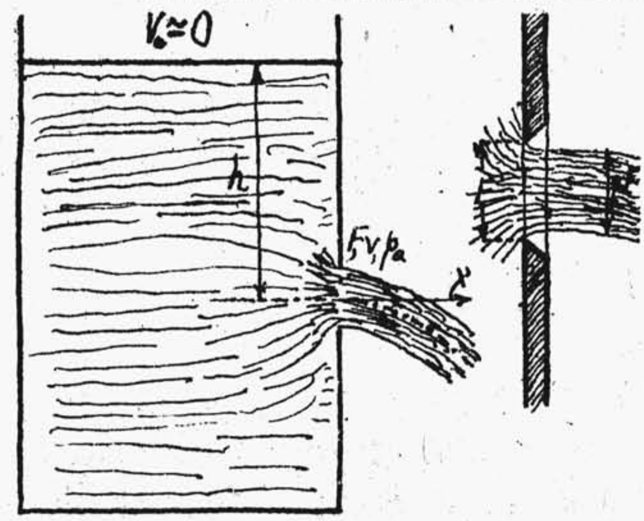
$$\mu = \sqrt{\frac{2g}{\gamma\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)}}\;,$$

tak iż wówczas bezpośrednio

$$Q = \mu\sqrt{p_0 - p_1}\;;$$

Wystarcza zatem zapomocą dwóch manometrów znaleźć wartość p_0 i p_1, aby otrzymać wartość wydatku. Często-kroć łączymy wodomiar Venturi'ego z samozapisującym mechanizmem zegarowym. Wówczas pole ograniczone otrzymaną krzywą i osią odciętych wyznacza w skali całkowitą ilość cieczy, która przepłynęła przez przewód od początku rachuby czasu.

§ 22. WYPŁYW CIECZY PRZEZ OTWÓR W ŚCIANIE NACZYNIA.



Rys. 45.

Zajmiemy się teraz teorją wypływów cieczy. Będziemy się w tym celu posługiwać równaniem Bernouilliego, stosując je do poszczególnych wypadków. Należy jednak pamiętać, że rozpatrywaliśmy dotychczas tylko ruch trwały cieczy, tak iż tylko do niego można nawiązać powyższą teorję. Wypływ trwały będzie miał miejsce wtedy, kiedy istnieje kompensujący dopływ cieczy, tak iż poziom cieczy w zbiorniku, z którego ciecz wypływa, nie ulega zmianie. Przegląd zaczniemy od wypływu cieczy przez otwór w ścianie pionowej naczynia /rys.45/, zakładając wymiary otworu tak małe, iż dla wszystkich punktów otworu przyjąć możemy to samo ciśnienie i tę samą prędkość, jako też zaniedbać różnicę poziomów poszczególnych punktów przekroju. Rozpatrzymy tedy 2 przekroje: powierzchnię swobodną cieczy w naczyniu, którą przyjmujemy za nieruchomą, i przekrój normalny strugi w bliskości otworu. Rozpatrując, jak zwykle, środkową linję strugi, odległą o h od poziomu cieczy, i zakładając, że ciecz wypływa z szybkością V możemy napisać równanie Bernouilliego w następującej postaci:

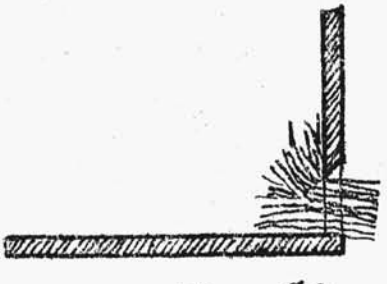
$$h + \frac{p_a}{\gamma} + 0 = \frac{p_a}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}(1+k)$$

skąd

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1+k}} = \alpha\sqrt{2gh} \; ;$$

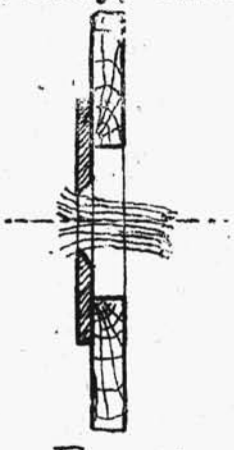
gdzie przez α oznaczyliśmy wartość $\sqrt{\frac{1}{1+k}}$;

Doświadczenia wykazały, że straty są tu w warunkach normalnych bardzo nikłe, gdyż $\alpha = 0{,}98 \div 0{,}99$. Zdawałoby się, że można stąd bezpośrednio wyliczyć wydatek Q, kładąc $Q = \mathcal{F}v$, gdzie przez $\mathcal{F}$ oznaczyliśmy przekrój otworu. Doświadczenie uczy nas jednak, że tak nie jest o ile tylko chcemy mieć jako tako ścisłe rezultaty. Pochodzi to stąd, że strugi wypływającej cieczy nie mogą się przy wypływie załamać o kąt prosty, lecz wytwarzają bardziej łagodne przejście, jak na rys. 50. Jeśli więc ściana ma otwór, wykonany, jak na rysunku, to struga wypływającej cieczy nie będzie miała w bezpośredniej bliskości otworu przekroju $\mathcal{F}$, lecz $\beta\mathcal{F}$ gdzie β jest t.zw. spółczynnikiem dławienia, określonym empirycznie. Tak np. dla niewielkiego otworu kołowego o ostrych brzegach, czyli t.zw. otworu w cienkiej ściance jest $\beta \cong 0{,}62$. Zjawisko dławienia warunkuje ta okoliczność, że w bezpośrednim sąsiedztwie otworu mamy do czynienia z ciśnieniem atmosferycznem tylko na powierzchni strumienia. Wewnątrz strumienia mamy ciśnienie większe, natomiast prędkość mniejszą od prędkości na powierzchni. Wyrównanie ciśnień i prędkości następuje dopiero w pewnej niewielkiej odległości od otworu. Otóż, ustalając doświadczalnie wartość β, należy wykonywać pomiary bardzo ostrożnie, bo cały szereg czynników wchodzi tu w grę. Tak więc zasadniczym czynnikiem jest położenie otworu względem naczynia.-

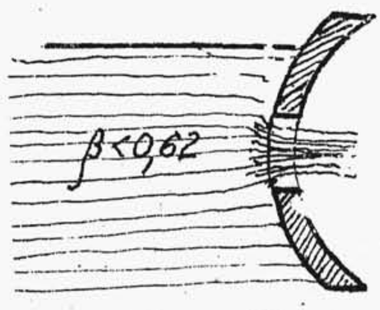


Rys. 46.

Gdy np. /rys.46/ otwór przylega bezpośrednio do dna, tylko część górna strug elementarnych ulegnie zagięciu tak, iż w tym razie $\beta > 0,62$. Jeżeli urządzimy otwór w cienkiej ścianie tak jak na rys.47, wtedy oddzielne strugi cieczy ulegają znaczniejszemu wygięciu, niż przy ścianie gładkiej, tak iż otrzymamy $\beta < 0,62$. Te same względy wskazują odrazu, że w ścianie wypukłej względem



Rys. 47.

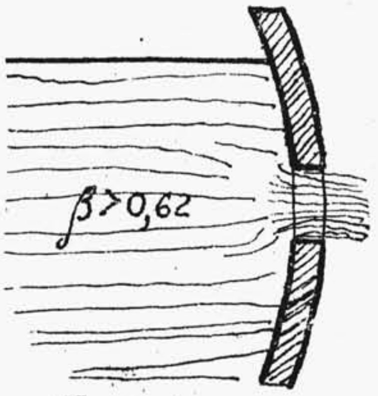


Rys. 48.

cieczy /rys.48/ będzie $\beta < 0,62$, podczas gdy w ścianie wklęsłej $\beta > 0,62$ /rys.49/. Istnieje pod tym względem szereg teorji, których matematyczne rozważenia są dość zawiłe.

Uwzględniając tedy spółczynnik β możemy dopiero wówczas wyliczyć wydatek

$$Q = v\beta F = \alpha\beta F\sqrt{2gh}$$



Rys. 49.

Zastanówmy się jeszcze, jak praktycznie obliczyć oba spółczynniki α i β. Otóż β daje się obliczyć doświadczalnie, mierząc odpowiednio zwężonym pierścieniem przekrój βF strugi i dzieląc otrzymaną wartość przez wartość pola F.

Z drugiej strony, wyliczając w tych warunkach wydatek Q możemy znaleźć iloczyn $\alpha\beta$, a stąd i drugi spółczynnik α. Wartość α możemy obliczyć mniej dokładnie na innej drodze. Zastanówmy się w tym celu nad kształtem wypływającego strumienia cieczy. Ponieważ mówimy o ruchu trwałym, więc strumień ten jest zarazem torem cząstek cieczy, poruszających się z szybkością poziomą v i podległych sile ciężkości. Gdy nie bierzemy tedy pod uwagę żadnych oporów a przedewszystkiem oporu powietrza, to w dowolnej chwili t spółrzędne: pozioma x i pionowa y cząstek cieczy będą:

$$x = vt \; ; \quad y = gt^2/2$$

t.j. torem ich jest parabola

$$x^2 = 2\,v^2/g\; y$$

o parametrze v^2/g. Mierząc doświadczalnie parametr przypuszczalnej paraboli wypływu, znajdziemy szybkość v

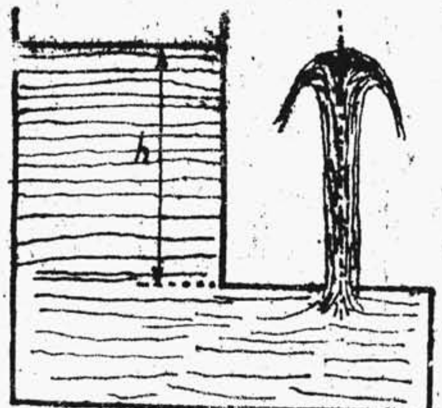
a więc i spółczynnik α

$$\alpha = V / \sqrt{2gh} ;$$

Wypływ przez otwór w ściance naczynia pozwala ogólnie w sposób łatwy mierzyć wydatek pomp wodnych. W tym celu dostarczaną przez pompę ciecz doprowadzamy do naczynia z otworem tak, aby dopływ równoważył wypływ, t.j. aby ruch był trwały. Wówczas poprzednio wskazaną drogą znajdujemy

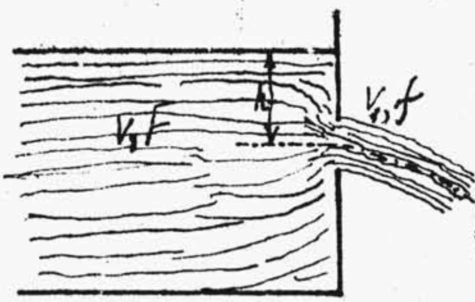
$$Q = \alpha \beta F \sqrt{2gH} ;$$

Przy rozważaniu wypływu przez otwór w ściance poziomej, teorja powyższa stosuje się bez ograniczeń co do wymiarów otworu. Wreszcie można stosować powyższe wyniki dla wypływu cieczy wzwyż /rys.50/. Wówczas ciśnienie hydrostatyczne słupa o wysokości h wypycha ciecz przez otwór do góry. Gdy wysokość h nie jest duża, można pominąć opór powietrza, kładąc, że woda podniesie się na tę samą wysokość. Doświadczenie potwierdza to przewidywanie. Oczywiście po przekroczeniu pewnej granicy, twierdzenie to przestaje być



Rys. 50.

słuszne, słup cieczy wskutek oporu powietrza rozszczepia się przed dojściem do pierwotnej wysokości na drobne strugi i krople, i spada ku ziemi. Rozważmy jeszcze trwały wypływ cieczy z uwzględnieniem prędkości dopływu. W tym celu załóżmy, iż ciecz dopływa kanałem o przekroju F z prędkością V do otworu w ścianie poprzecznej /rys.51/. Niech będzie przekrój otworu f, a prędkość wypływu v. Wówczas, tak jak poprzednio znajdziemy, iż stały wydatek



Rys. 51.

$$Q = FV = \beta f v ; \qquad /1/$$

gdzie β oznacza spółczynnik dławienia. Stąd równanie Bernoulli przyjmie kształt następujący:

$$h + p_a/\gamma + V^2/2g = p_a/\gamma + v^2/2g\,(1+k)$$

Podstawiając z równania /1/ $V = \beta f/F \cdot v$, znajdziemy, iż

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{(1+k) - \beta^2 f^2/F^2}}.$$

Pamiętając, że $1+k = 1/\alpha^2$, znajdziemy stąd wydatek

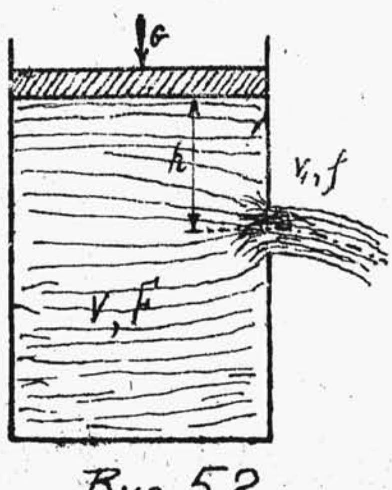
$$Q = \beta f v = \beta f \sqrt{\frac{2gh}{1/\alpha^2 - \beta^2 f^2/F^2}} = f \sqrt{\frac{2gh}{1/\alpha^2\beta^2 - f^2/F^2}}$$

Widać stąd, że stosunek przekrojów otworu naczynia ma wpływ decydujący na wartość wydatku. Gdy f/F jest bardzo małe, zbliżamy się do poprzedniego wypadku, dla którego $Q = \alpha\beta f\sqrt{2gh}$;

W dotychczasowych rozważaniach ciśnienie na powierzchnię cieczy przyjmowaliśmy równe ciśnieniu atmosferycznemu. Jeżeli ciśnienie to jest inne, np. $p = p_a + G/F$ podług rys.52, wówczas równanie Bernouilli'ego przekształci się jak następuje:

$$h + p/\gamma + v^2/2g = p_a/\gamma + v_1^2/2g\,(1+k)$$

skąd łatwo znajdziemy szybkość wypływu v_1. Tak, naprzykład, w praktyce stosujemy wytrysk cieczy zapomocą sprężonego gazu w przyrządach do gaszenia ognia.



Rys. 52.

§23. Wypływy zatopione.

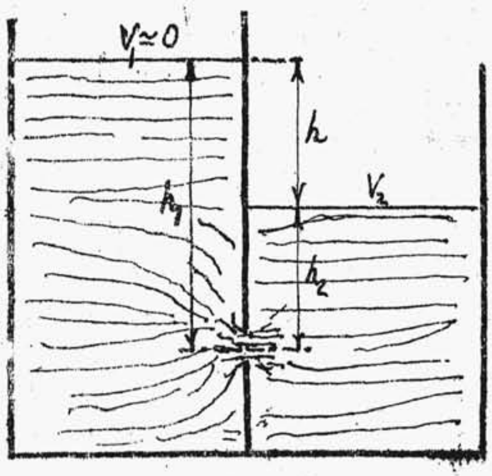
Z kolei zastanówmy się nad wypływami zatopionymi, t.j. takimi, gdzie ciecz wypływa nie do atmosfery, lecz do cieczy /rys.53/. Załóżmy tedy, że otwór we wspólnej ścianie dwóch naczyń znajduje się odpowiednio na wysokości h_1 i h_2 od stałych poziomów cieczy. Pomijając opory, i zakładając, iż ciśnienie w otworze, które oznaczymy przez p_1, jest $p_1 = p_a + \gamma h_2$, znajdziemy wówczas, iż

$$h_1 + \frac{p_a}{\gamma} = h_2 + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g}$$

skąd

$$V_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = \sqrt{2gh} \;;$$

Ażeby uwzględnić te opory, wystarczy przed znakiem pierwiastka umieścić empiryczny spółczynnik α tak, iż $V_2 = \alpha\sqrt{2gh}$; Z obu wzorów widać, co jest zresztą oczywiste z góry, że w wypadku równości $h_1 = h_2$ szybkość $V_2 = 0$, t.j. ruchu nie będzie.



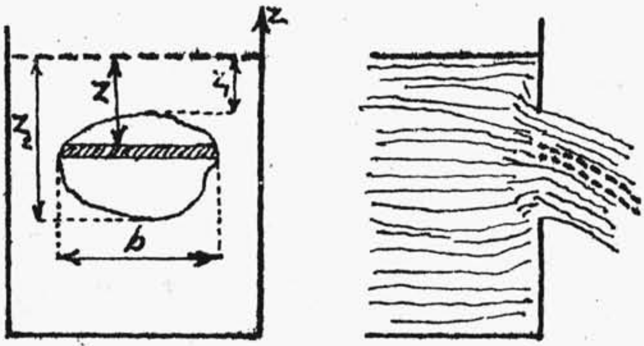
Rys. 53.

§24. Wypływ przez otwór znacznych wymiarów w pionowej ścianie naczynia, bez uwzględnienia prędkości dopływu.

Rozłóżmy pole dowolnego otworu w ścianie naczynia /rys. 54/ prostemi równoległemi do powierzchni swobodnej cieczy na szereg prostokątnych pasków. Niech dla takiego typowego paska o szerokości b odległość od poziomu cieczy wynosi z. Stosując do każdego z nich wyprowadzony uprzednio wzór na szybkość wypływu $V_z = \alpha\sqrt{2gz}$ otrzymamy elementarny wydatek

$$dQ = \beta b\,dz\,V_z = \alpha\beta\sqrt{2g}\,b\sqrt{z}\,dz$$

Całkując powyższe wyrażenie dla całego otworu w założeniu, że α i β mają odpowiednio stałe wartości, znajdziemy ogólnie, iż wydatek całkowity

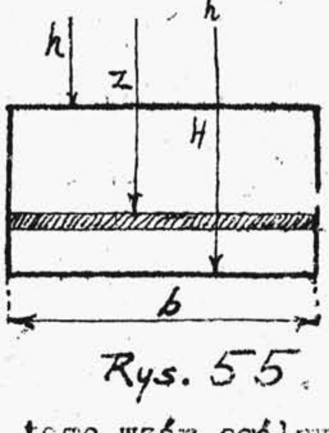


Rys. 54.

$$Q = \alpha\beta\sqrt{2g}\int_{z_1}^{z_2} b\sqrt{z}\,dz,$$

Zastosujmy powyższy wzór dla paru wypadków szczególnych. Załóżmy tedy, iż mamy do czynienia z otworem prostokątnym o dwu bokach poziomych /rys.55/. Wówczas $b = const.$ skąd

$$Q = \alpha\beta\sqrt{2g}\,b\int_{h}^{H}\sqrt{z}\,dz = \tfrac{2}{3}\alpha\beta\sqrt{2g}\,b\left(H^{3/2}-h^{3/2}\right);$$



Rys. 55.

W przypadku otworu kołowego o promieniu r jest dla dowolnego paska /rys.56/:

$$z = h + r\sin\varphi$$
$$dz = r\cos\varphi\,d\varphi$$

oraz

$$b = 2r\cos\varphi$$

Wobec tego wzór ogólny przekształci się jak następuje:

$$Q = \alpha\beta\sqrt{2g}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} 2r\cos\varphi\sqrt{h + r\sin\varphi}\; r\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2\alpha\beta\sqrt{2gh}\, r^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^2\varphi\sqrt{1 + \frac{r}{h}\sin\varphi}\; d\varphi$$

Rozwijając dwumian na szereg :

$$\sqrt{1 + \frac{r}{h}\sin\varphi} = 1 + \frac{1}{1!\,2^1}\frac{r\sin\varphi}{h} - \frac{1}{2!\,2^2}\frac{r^2\sin^2\varphi}{h^2} +$$

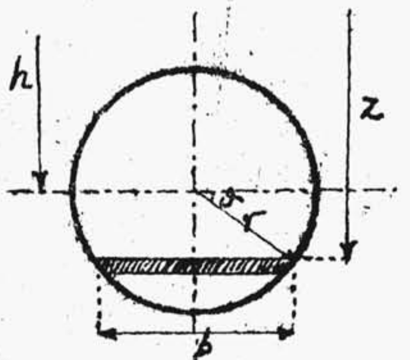
$$+ \frac{1.3}{3!\,2^3}\frac{r^3\sin^3\varphi}{h^3} - \frac{1.3.5}{4!\,2^4}\frac{r^4\sin^4\varphi}{h^4} - \ldots\ldots$$

i całkując otrzymane wyrażenia, znajdziemy, iż

$$Q = 2\alpha\beta\sqrt{2gh}\, r^2 \cdot \frac{\pi}{2}\left[1 - \frac{1}{32}\frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{r^4}{h^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{105}{65531}\frac{r^6}{h^6} - \ldots\right] = \pi\alpha\beta r^2\sqrt{2gh}\left[1 - \frac{1}{32}\frac{r^2}{h^2} - \frac{5}{1024}\frac{r^4}{h^4} - \ldots\right]$$

gdzie otrzymany szereg jest bardzo szybko zbieżny. Ze wzoru powyższego widać, że dla niewielkiego otworu kołowego można pominąć wszystkie wyrazy szeregu, począwszy od drugiego, tak, że otrzymany wzór



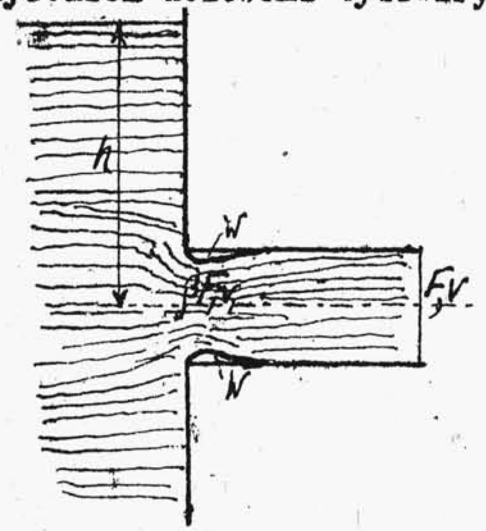
Rys. 56.

$$Q = \pi\alpha\beta r^2\sqrt{2gh}$$

będzie identyczny ze wzorem otrzymanym dla niewielkich otworów, zastosowanym w przypadku koła. Analogiczne rachunki można przeprowadzić dla ścian pochyłych, tylko otrzymane wzory będą bardziej złożone.

§25. Przystawki.

Rozpatrzymy z kolei wypływ cieczy nie bezpośrednio przez otwór w ścianie, lecz przez przystawione do niej krótkie rurki, zwane "przystawkami". Zajmiemy się przedewszystkiem kołowemi cylindrycznemi przystawkami /rys.57/.



Rys. 57.

Obliczając za pomocą równania Bernouilli'ego wartość szybkości wypływu, otrzymamy analogicznie do poprzedniego wartość $V = \alpha\sqrt{2gh}$. Różnica polega tylko na wartości spółczynnika, który w przypadku przystawki walcowej wynosi dla otworu kołowego tylko $\alpha \cong 0{,}82$. Większa strata jest tu uwarunkowana głównie obecnością wirów W przy nasadzie przystawki. Obracające się w nich cząstki cieczy nie biorą udziału w ruchu postępowym, lecz pozostają w pierścieniowej przestrzeni W /rys.57/, ocierając się o nadpływające cząstki. Jakkolwiek zjawisko dławienia zachodzi i tutaj, spółczynnika β nie znamy ze względu na trudność pomiarów. Zakładamy tedy, że i w tym przypadku

$\beta = 0,62$ tak iż wydatek

$$Q = Fv = \beta F v_1$$

skąd

$$v_1 = v/0,62$$

t.j. szybkość u nasady jest większa. Stosując tedy równanie Bernouilli'ego do powierzchni swobodnej cieczy i do przekroju βF, dla którego zakładamy, iż nadwyżka ponad ciśnienie atmosferyczne odpowiada wysokości h_1 mamy, iż

$$h + p_a/\gamma + 0 = h_1 + p_a/\gamma + 1/2g \; v^2/0,62^2$$

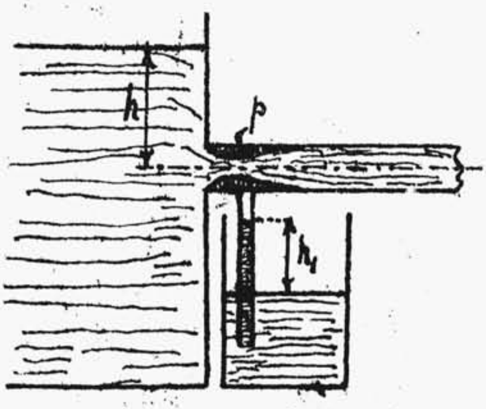
A że

$$v = \alpha\sqrt{2gh}$$

zatem po podstawieniu $h_1 \simeq 0,8h$ t.j. w przekroju βF panuje ciśnienie niższe od atmosferycznego i to o wartość

$$-\gamma h_1 = 0,8h\gamma\,;$$

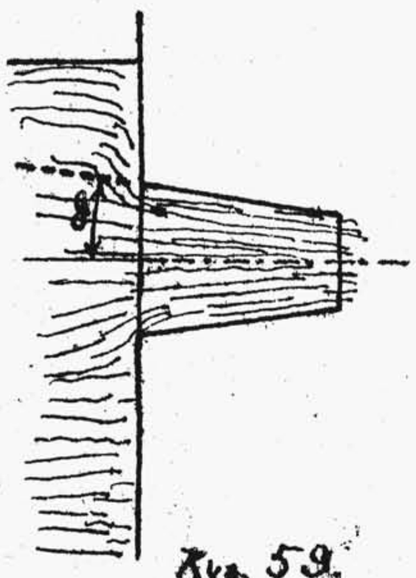
Ten teoretyczny wynik łatwo sprawdzić doświadczalnie. W tym celu wystarcza umieścić u nasady przystawki /rys. 53/ rurkę, zanurzoną do naczynia z cieczą. Ponieważ chodzi nam tylko o wartość ciśnienia p, panującego w danem miejscu przystawki, umieszczamy do niej rurkę prostopadle, aby pominąć energję kinetyczną przepływających cząstek. Wówczas woda w rurze się podniesie właśnie na wysokość h_1, która przy niewielkich prędkościach istotnie w przybliżeniu wyniesie $0,8h$. Doświadczenie potwierdza również naszą hypotezę co do istnienia wirów u nasa-



Rys. 58.

dy, na karb których położyliśmy zmniejszenie się spółczynnika α. Gdy mianowicie wstawimy odpowiedniego kształtu pierścień w miejscu wirów, wartość strat spadnie i α wzrośnie średnio o 10 %.

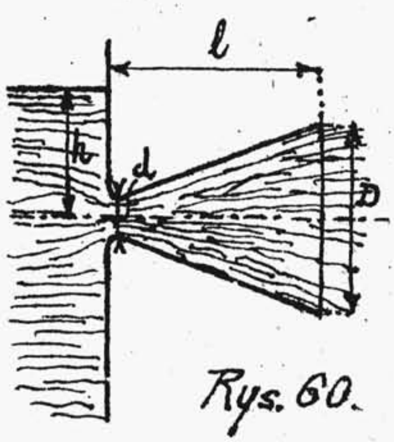
Przejdźmy z kolei do przystawek stożkowych. Zwężające się przystawki spotykają się często przy przyrządach pożarniczych, np. u wylotów węży sikawek /rys.59/. Dzięki zwężaniu się przekrojów otrzymujemy w nich równomierny ścisły strumień cieczy, dający duży spółczynnik $\alpha\beta$. Wykonane doświadczenia ustaliły wartość α dla poszczególnych wartości δ. Tak więc przy $\delta = 0$ jest $\alpha = 0,82$ i przystawka staje się cylindryczną. Następnie α rośnie wraz z δ, przybierając dla $\alpha = 6,5^{\circ}$ wartość maximalną $\alpha_{max} = 0,95$. Dalej α maleje, przechodząc przez $0,85$ przy $\delta = 45^{\circ}$, do wartości $\alpha = 0,62$, odpowiadającej otworowi w cienkiej



Rys. 59.

ścianie, dla którego $\delta = 90°$. Chcąc obliczyć wydatek, musimy wziąć pod uwagę ciśnienie i szybkość cieczy, odpowiadające bezpośrednio położeniu przed nasadą przystawki.

Dla przystawek stożkowych rozszerzających się wartość wydatku zależy głównie od wartości otworu końcowego /rys.60/. Ponieważ bowiem wartość szybkości wypływu zależy tylko od wysokości h, więc zwiększając lub zmniejszając ten otwór, w tym samym kierunku zmieniamy wartość wydatku. Stąd widać, że dodanie zwykłego lejka na końcu cylindrycznej przystawki znacznie zwiększa wydatek, co napozór wydaje się paradoksalnem.

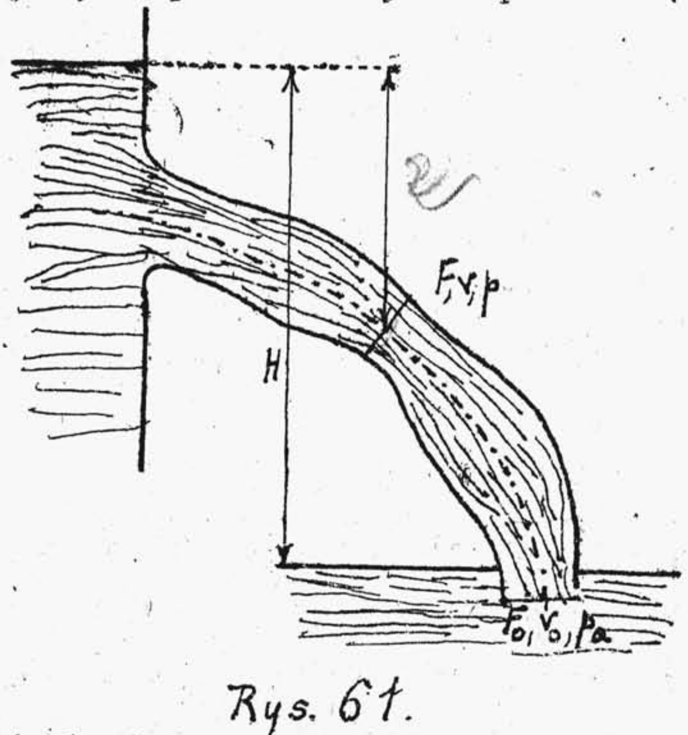


Rys. 60.

Tak np. dla $l = 20$ cm, $D = 4{,}5$ cm, $d = 2{,}5$ cm /na rys.65/, wydatek był 2 razy większy, niż dla odpowiedniej cylindrycznej przystawki. Zdawałoby się, że możemy w ten sposób dowolnie zwiększać wartość wydatku. Ale wszystkie nasze równania, wyprowadzone w założeniu ciągłego strumienia cieczy wymagają, aby ta ciecz szczelnie wypełniała naczynie. Natomiast doświadczenie uczy, że rozchylając zbytnio stożek, wywołujemy oddzielenie się strugi od powierzchni lejja, a co zatem idzie, wydatek spada. Chcąc zachować ciągłość przepływu, moglibyśmy stosować zatopione przystawki tego typu. Ale i wówczas doświadczenie wskazuje, że przepływająca struga nie zawsze lej wypełnia.

Przewód o zmiennym kształcie.

Rozpatrzymy teraz najogólniejszy przypadek przepływu trwałego cieczy przez przewód o zmiennym kształcie bez uwzględnienia oporów szkodliwych. Zaniedbując straty, powstałe przez tarcie i szybkość dopływu, znajdziemy u wylotu przewodu /dla przekroju F_o/ /rys.61/ szybkość $V_o^2 = 2gh$. Ponieważ mamy tu do czynienia z wypadkiem analogicznym do rozpatrzonego w § 25, opierając się na własnościach przystawek wy-



Rys. 61.

wnioskować możemy, iż wydatek zależeć będzie tylko od przekroju końcowego F_o, oraz od prędkości V_o, czyli $Q = F_o V_o$. Oprócz tego na podstawie ciągłości cieczy