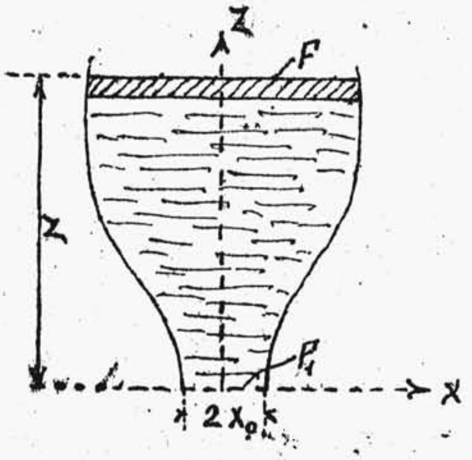
przebiegu zjawiska stosują się i tutaj. Jako praktyczne zastosowanie powyższej teorji wymienimy dawniej stosowany sposób podnoszenia poziomu cieczy w komorach śluzowych.

§ 29. ZADANIA NA RUCH CIECZY TRWAŁY I NIETRWAŁY.

ZADANIE. Jaki być musi kształt naczynia, żeby przy wypływie nietrwałym, szybkość obniżania poziomu była stała.

Załóżmy przedewszystkiem, że naczynie o przekroju, jak na rys. 69 jest obrotowem. Otóż ogólnie wydatek



Rys. 69.

$$dQ = \alpha\beta F_1 \sqrt{2gz}\, dt$$

gdzie przez F_1 oznaczyliśmy przekrój otworu wypływowego. Z drugiej strony tę samą wartość uzyskamy i na innej drodze, gdyż

$$dQ = -F dz$$

gdzie przez F oznaczyliśmy powierzchnię swobodną cieczy. W rozważanym przypadku jest

$$F_1 = \pi x_0^2 ; \qquad F = \pi x^2 ;$$

tak iż

$$dQ = \alpha\beta \pi x_0^2 \sqrt{2gz}\, dt = \pi x^2 dz$$

skąd stała szybkość

$$-\frac{dz}{dt} = \alpha\beta x_0^2 \sqrt{2g} \frac{\sqrt{z}}{x^2} = \text{const.}$$

czyli $z = Cx^4$, gdzie C oznacza pewną stałą, którą łatwo znaleźć.

Gdyby naczynie było korytem cylindrycznem o tworzących stałej długości L, prostopadłych do płaszczyzny rysunku, wówczas

$$dQ = \alpha\beta 2x_0 L\sqrt{2gz}\,dt = 2xL\,dz\,;$$

czyli szybkość

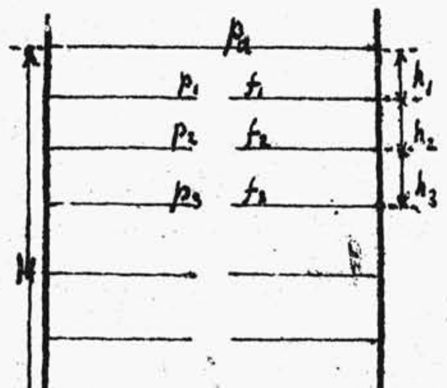
$$\frac{dz}{dt} = \alpha\beta x_0\sqrt{2g}\,\frac{\sqrt{z}}{x} = const.$$

skąd

$$x^2 = pz$$

gdzie stałą p łatwo znaleźć. W tym wypadku przekrój cylindrycznego naczynia jest parabolą.

<u>ZADANIE.</u> Zbadać szybkość wypływu trwałego cieczy z naczynia z przegródkami /rys.70/.



Rys. 70.

Naczynie składa się tedy z n przegródek, wypełnionych całkowicie cieczą i połączonych otworami. Ponieważ wówczas wydatek musi być stały, więc rozpatrując różnicę ciśnień dla każdej przegrody i jej wysokość, znajdziemy, iż

$$Q = \alpha_1\beta_1 f_1\sqrt{2g\left(h_1 + \frac{p_a - p_1}{\gamma}\right)} = \alpha_2\beta_2 f_2\sqrt{2g\left(h_2 + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}\right)} = \alpha_n\beta_n f_n\sqrt{2g\left(h_n + \frac{p_{n-1} - p_n}{\gamma}\right)}$$

Z szeregu n powyższych równań wynika bezpośrednio, iż

$$Q^2 \sum \frac{1}{\alpha_i^2 \beta_i^2 f_i^2} = 2g(h_1 + h_2 + \dots + h_n) = 2gH$$

Gdy wielkości α, β i f są odpowiednio stałe dla wszystkich przegródek, wówczas

$$Q = \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha \beta f \sqrt{2gH};$$

t.j. wydatek jest $\sqrt{n}$ razy mniejszy, niż przy swobodnym wypływie z wysokości H. Praktycznie stosujemy niekiedy tego rodzaju uszczelnienie wodne, np. między tłokiem a cylindrem w pompach pożarniczych, gdzie szczeliwo miękkie, np. skóra lub konopie, jako narażone na wyschnięcie podczas postoju, jest niepraktyczne.

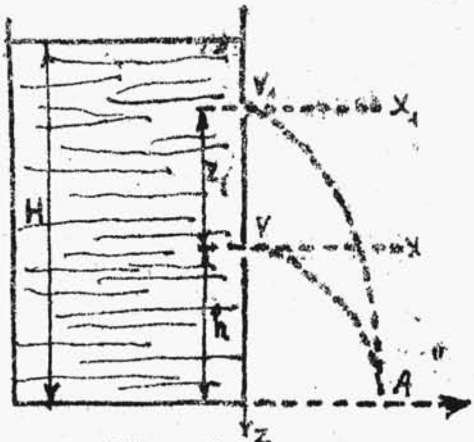
<u>ZADANIE.</u> W naczyniu z wodą o wysokości H zrobiono 2 małe otwory. Wiedząc, że jeden z nich znajduje się na wysokości h od dna, znaleźć odległość z drugiego tak, aby teoretyczne parabole wypływu przecięły się w jednym punkcie A na poziomie dna /rys.71/.

Wiemy, że w układzie XZ równanie pierwszej paraboli będzie

$$x^2 = \frac{2v^2}{g} z ;$$

zaś w układzie $X_1 Z_1$ równanie drugiej da analogicznie

$$x_1^2 = \frac{2v_1^2}{g} z_1 ;$$



Rys. 71.

Dla punktu A znajdziemy tedy, iż

$$\frac{2v^2}{g} h = \frac{2v_1^2}{g} (z_1 + h) ;$$

skąd

$$\frac{z+h}{h} = \frac{v^2}{v_1^2} \qquad /1/$$

Ale na zasadzie teorji wypływów jest

$$v = \sqrt{2g(H-h)}$$

zaś

$$v_1 = \sqrt{2g(H-h-z_1)} \qquad /2/$$

Na zasadzie równań /1/ i /2/ znajdziemy, że z_1 czyni zadość równaniu stopnia II-go kształtu:

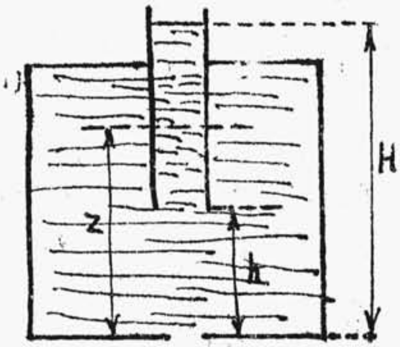
$$z_1 (H - 2h - z_1) = 0 ;$$

czyli

$$z_1 = H - 2h ;$$

<u>ZADANIE.</u> Zbadać wypływ cieczy z naczynia Mariotte'a /rys.72/.

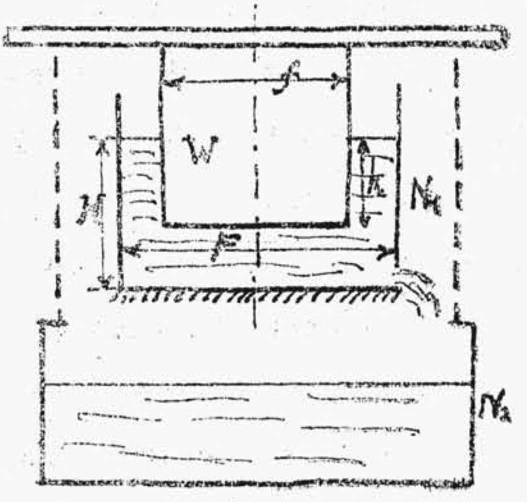
Wyobraźmy sobie naczynie, wypełnione cieczą z zanurzoną doń rurką, w której poziom cieczy sięga powyżej górnego denka naczynia. Wyobraźmy sobie dalej, że w pewnej chwili otwieramy w denku dolnym otwór f; chodzi o zbadanie ruchu cieczy.



Rys. 72.

Otóż jest rzeczą oczywistą, że początkowo naczynie pozostaje wypełnione cieczą, natomiast w rurze obniża się poziom, będziemy przeto mieli do czynienia z wypływem nietrwałym. Ten pierwszy okres wypływu cieczy o szybkości $V=\alpha\sqrt{2gz}$, gdzie przez z oznaczamy zmienną wysokość poziomu cieczy w rurce, trwa dotąd dopóki poziom ten nie obniży się na wysokość h, zaś V spadnie do wartości $V=\alpha\sqrt{2gh}$. Wówczas pęcherzyki powietrza mogą się już dostawać zzewnątrz do naczynia, otrzymujemy okres trwałego wypływu cieczy z prędkością stałą $\sqrt{2gh}$. Okres drugi kończy się w chwili, gdy poziom cieczy w naczyniu dosięgnie poziomu otworu rurki. Wówczas następuje już trzeci okres wypływu nietrwałego cieczy z naczynia, aż do jego zupełnego opróżnienia.

ZADANIE. Do naczynia N_1 z wodą zanurzamy walec W zaopatrzony w płytę, na której się zwiesza naczynie N_2 /rys.73/. W naczyniu N_1, które jest nieruchome, uczy-



Rys. 73

niono otwór tak, że ciecz wypływa zeń do naczynia dolnego. Jak się będzie zmieniać wysokość H z czasem?

Przypuśćmy, że po pewnym czasie wysokość h przybrała wartość h_1, zaś H odpowiednio H_1. Wypłynęła tedy z naczynia górnego ilość

$$[(HF-hf)-(H_1F-h_1f)]$$

wody, która dzięki istniejącym połączeniom o tyleż zwiększy wypór cieczy w naczyniu N_1 na walec. Ale zwiększenie wyporu wynosi $(h_1-h)f\gamma$. Wobec tego możemy napisać, iż

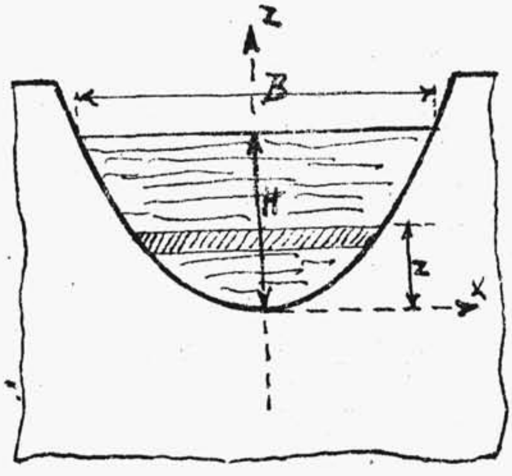
$$[(HF-hf)-(H_1F-h_1f)]\gamma=(h_1-h)f\gamma;$$

czyli $H=H_1$. A więc okazuje się, iż wysokość cieczy H w naczyniu pozostaje aż do chwili zetknięcia walca W z dnem naczynia N_1 niezmienna. Wnosimy stąd, że i szybkość wypływu $v=\sqrt{2gH}$ zachowuje stałą wartość.

<u>ZADANIE.</u> Znaleźć wydatek cieczy przez przewał o parabolicznym wykroju /rys.74/.

Obierając osi, jak na rysunku, załóżmy, że równanie paraboli jest

$$x^2 = 2pz$$



Rys. 74.

Łatwo wówczas znaleźć parametr p, znając szerokość B powierzchni cieczy na wysokości H od wierzchołka paraboli. Podstawiając bowiem, otrzymamy wówczas, iż

$$\frac{B^2}{4} = 2pH;$$

t.j.

$$2p = \frac{B^2}{4H};$$

czyli ostatecznie równanie paraboli będzie miało kształt następujący:

$$x^2 = \frac{B^2}{4H}\cdot z;$$

Wówczas wydatek elementarny

$$dQ = 2\alpha\beta x\,dz\sqrt{2g(H-z)};$$

zaś całkowity wydatek wyniesie

$$Q = 2\alpha\beta\sqrt{2g}\int_0^H \sqrt{H-z}\cdot x\,dz =$$

$$= 2\alpha\beta\sqrt{2g}\,\frac{B}{2\sqrt{H}}\int\sqrt{(H-z)z}\,dz =$$

$$= \alpha\beta B\sqrt{2g/H}\int_0^H \sqrt{H^2/4 - (H/2 - z)^2}\, dz$$

Ponieważ zaś ogólnie

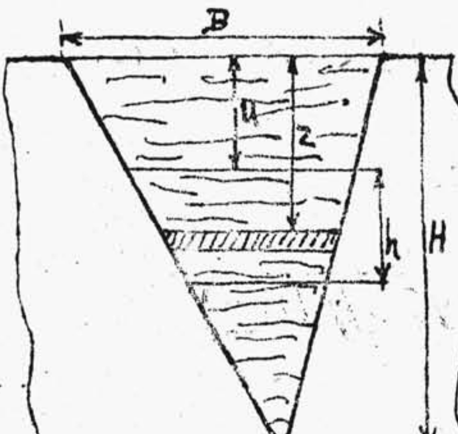
$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = 1/2\left\{x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin x/a\right\} + C$$

więc przez analogję znajdziemy, iż

$$Q = \alpha\beta B\sqrt{2g/H}\cdot 1/2\left|(z - H/2)\sqrt{(H-z)z} + H^2/4\cdot\right.$$

$$\cdot \arcsin\frac{z - H/2}{H/2}\Big|_0^H = 1/4\,\pi\alpha\beta B\sqrt{g/2}\,H^{3/2};$$

ZADANIE. Wyobraźmy sobie trójkąt narysowany na ścianie naczynia, leżący podstawą na poziomie cieczy i skierowany wierzchołkiem na dół. Część tego trójkąta, tworząca trapez o danej wysokości podstawach poziomych stanowi otwór przez który ciecz wypływa. Określić położenie trapezu, przy którym wydatek jest największy /rys.75/.



Rys. 75.

Obliczmy wydatek Q w założeniu, że większa podstawa trapezu jest odległa o u od podstawy B trójkąta. Wówczas

$$dQ = \alpha\beta\, dz\, B\,\frac{H-z}{H}\sqrt{2gz}$$

zaś

$$Q = \frac{\alpha\beta B\sqrt{2g}}{H}\int_u^{u+h}\sqrt{z}\,(H-z)\,dz =$$

$$= C\int_u^{u+h}(H-z)\sqrt{z}\,dz;$$

gdzie przez C oznaczyliśmy wartość stałego wyrażenia $\frac{\alpha \beta B \sqrt{2g}}{H}$. Aby Q było maximum, musi być $\frac{dQ}{du} = 0$ t.j.

$$C\left[(H-u-h)\sqrt{u+h} - (H-u)\sqrt{u}\right] = 0$$

skąd

$$\left(\frac{H-u-h}{H-u}\right)^2 = \frac{u}{u+h}$$

czyli

$$\frac{(H-u-h)^2}{2h(H-u)-h^2} = \frac{u}{h};$$

t.j.

$$u(2H-h-2u) = (H-u-h)^2$$

Znosząc nawiasy, znajdziemy tedy ostatecznie, iż

$$3u^2 - (4H-3h)u + (H-h)^2 = 0$$

Widzimy stąd, że zadanie niezawsze jest rozwiązalne. Gdy w szczególnym przypadku $h = H/3$, wówczas

$$3u^2 - 3Hu + 4/9\, H^2 = 0;$$

skąd

$$u = H\left(\frac{3 \pm \sqrt{H/3}}{6}\right);$$

Weźmiemy tu oczywiście pod uwagę tylko znak /-/, gdyż wprawdzie u jest w obu przypadkach dodatnie, to jednak w drugim wypadku $u + h > H$, czyli druga podstawa trapezu nie przetnie się z trójkątem.