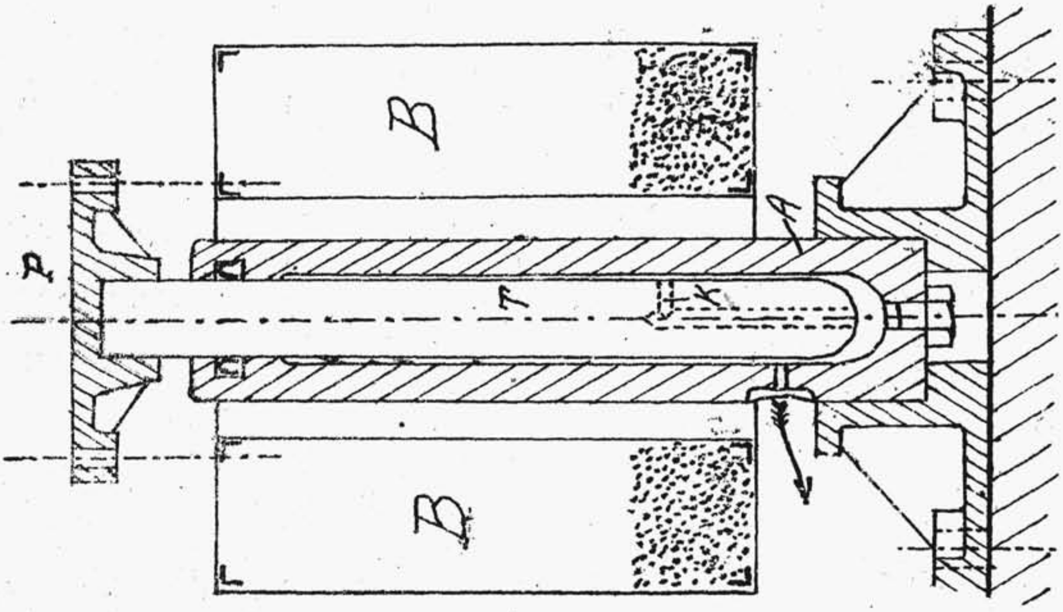
nic hydraulicznych, pracujących na podobnej zasadzie, jak prasy.

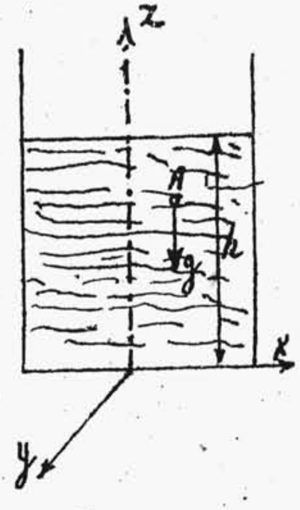


Rys. 6

§ 6. Rozpatrzymy parę przykładów zastosowania powyższych danych teoretycznych.

ZADANIE. Znaleźć powierzchnie ekwipotencjalne dla cieczy doskonałej, zawartej w naczyniu w stanie równowagi.

Załóżmy początkowo, że wymiary naczynia są tak drobne, w porównaniu z promieniem ziemskim, iż można przyjąć część pola ciążenia ziemskiego w nim zawartą za pole jednostajne. Innemi słowy, na każdy element cieczy, zawartej w naczyniu /rys.7/, działają tylko stałe siły zewnętrzne, które pochodzą od ciążenia powszechnego. Obierając tedy prostokątny układ spółrzędnych, którego płaszczyzna xy nakrywa się z płaskiem dnem naczynia, zaś oś jest skierowana pionowo ku górze, możemy łatwo wyznaczyć wartość składowych siły objętościowej jednostkowej w dowolnym p. A . Mianowicie



Rys. 7

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=0; \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}=0$$

oraz

$$Z=\frac{\partial U}{\partial z}=-g$$

Całkując te równanie znajdziemy, iż $U=-gz+C_1$. Stąd widać bezpośrednio, że powierzchnie ekwipotencjalne są w tym szczególnym przypadku płaszczyznami poziomemi. Ponieważ nadto $p=\sigma U+C_2$, więc przez podstawienie znajdziemy

$$p=-\sigma g z+C=-\gamma z+C; \qquad /1/$$

Jeżeli powierzchnia swobodna znajduje się na wysokości h, licząc od dna naczynia, to, uwzględniając, iż dla niej p sprowadza się do wartości ciśnienia atmosferycznego p_a, możemy napisać równość

$$p_a=-\gamma h+C; \qquad /2/$$

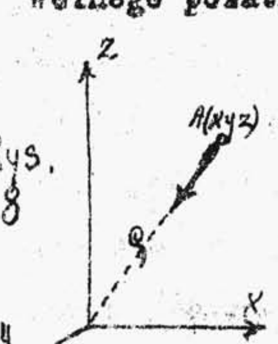
Z równości /1/ i /2/ wynika, że

$$p-p_a=\gamma(h-z); \qquad /3/$$

Wzór ten wskazuje, iż powierzchnia swobodna jest również ekwipotencjalną, t.j. musi być pozioma. A więc teorja daje wyniki zgodne z doświadczeniem. Jeśli początek spółrzędnych obieramy na powierzchni swobodnej, zaś oś zwrócimy pionowo na dół, to równanie /3/ przybierze prostszą postać $p-p_a=\gamma z$;. Wzór ten, którym się będziemy posługiwać przy dalszych rozważaniach teoretycznych, daje nam bezpośrednio wartość ciśnienia, panującego w cieczy na dowolnej głębokości. Nawzajem, zakładając z góry wartość ciśnienia, możemy ze wzoru tego wyznaczyć odpowiadającą jej głębokość cieczy. Tak np. kładąc $p-p_a=1\,at$ znajdziemy $z=1/\gamma$. A zatem powyższym wzorem wyraża się głębokość cieczy, której cząstki podlegają ciśnieniu o 1 atm. większemu, niż panujące ponad cieczą ciśnienie atmosferyczne.

Resultaty poprzednich badań się zasadnicze zmienią, gdy naczynie z cieczą jest za duże, aby można było przyjąć $g = const$. Wówczas musimy się uciec do Newton'owskiego prawa ciążenia powszechnego. Obierzmy mianowicie środek dowolnego pozatem układu prostokątnego spółrzędnych w środku ziemi./rys.8/. W dowolnym p. A pola panuje natężenie skierowane wzdłuż promienia wodzącego AO i równe $-\frac{c}{\varrho^2}$ /znak minus piszemy ze względu na kierunek/.

Rys. 8



Wykazaliśmy, że wzrost potencjału w dowolnym kierunku równa się składowej sił objętościowych w tymże kierunku. Obierzmy za taki kierunek kierunek wektora OA, to

$$-\frac{c}{\rho^2}=\frac{\partial U}{\partial \rho}=\frac{dU}{d\rho}$$

gdyż wskutek doskonałej symetrji potencjał zależy tylko od wartości promienia wodzącego. Stąd, całkując, znajdziemy, iż $U=\frac{c}{\rho}$, t.j. powierzchnie ekwipotencjalne sprowadzają się do układu powierzchni kulistych, zatoczonych ze środka ziemi. Wzór ogólny $p=\sigma U+C_1$ daje w tym wypadku wartość $p=\frac{c\sigma}{\rho}+C_2$. Dla powierzchni swobodnej cieczy, która musi stanowić część powierzchni kuli, zakreślonej jakimś promieniem R, otrzymamy $p_a=\frac{c\sigma}{R}+C_2$, gdzie p_a oznacza ciśnienie atmosferyczne, panujące ponad cieczą. Stąd

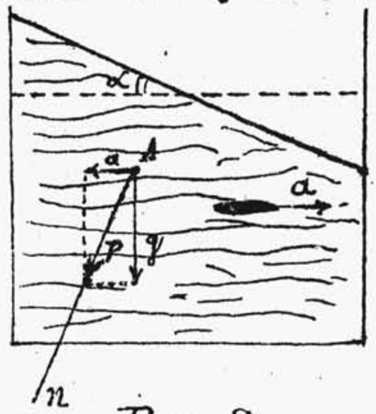
$$p-p_a=c\sigma\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)$$

Wzór ten wskazuje, że ciecz umieszczona na głębokości środka ziemi, podlegałaby nieskończenie wielkiemu ciśnieniu, gdyż dla $\rho=0$ jest $p=\infty$. Łatwo zauważyć, że powierzchnie ekwipotencjalne są zawsze wtedy kulami, gdy natężenie pola jest tylko funkcją odległości od danego stałego punktu.

Często rozpatrujemy równowagę względną cieczy względem naczynia, opierając się na zasadzie d'Alembert'a. Zasada ta, jak wiemy, polega na tem, że zagadnienia dynamiki sprowadzamy do prostszych zadań statyki. Wystarczy w tym celu do każdego elementu rozpatrywanego ciała dodać siłę, odwrotną do czynnej, a wszystkie elementy, czyli i całe ciała będą w równowadze. Otrzymawszy od cieczy w ruchu taki stan równowagi, możemy stosować do niej równania hydrostatyki.

Przykłady wyjaśnią lepiej tę teorję.

ZADANIE. Naczynie z cieczą porusza się ze stałem przyśpieszeniem. Znaleźć powierzchnie ekwipotencjalne. Zauważmy, że gdyby naczynie poruszało się ze stałą szybkością, to siły czynne wynosiłyby zero, a więc stan cieczy niczem by się nie różnił od rozpatrywanego już przez nas stanu spoczynku naczynia. Jeśli natomiast naczynie porusza się ze stałem przyśpieszeniem a /rys.9/, to na każdy element A działają następujące siły objętościowe jednostkowe: siła ciążenia powszechnego g, i odwrotna do czynnej siła a.



Rys. 9

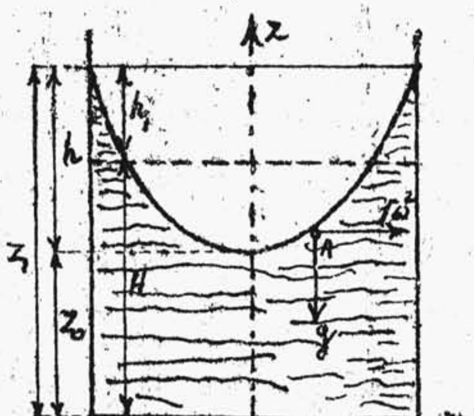
Wypadkowa P tych obu sił jest dla wszystkich punktów cieczy stała co do wielkości i kierunku. Wobec tego wzrost potencjału zachodzi tu tylko w kierunku n siły P ; t.j.

$$P = \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{dU}{dn}\,; \quad \text{skąd} \quad U = Pn + C\,;$$

Powierzchniami ekwipotencjalnemi są to tedy płaszczyzny prostopadłe do kierunku P. Powierzchnia swobodna cieczy, jako ekwipotencjalna, posiada identyczne nachylenie , które łatwo znaleźć liczbowo, pamiętając, iż $\operatorname{tng} \alpha = a/g$

Zadanie to można urozmaicić, prowadząc naczynie z cieczą po równi pochyłej. Ale i wówczas otrzymamy zawsze szereg płaszczyzn równoległych, jako powierzchnie równego potencjału. Nadto pochylenie tych płaszczyzn zależy od tego, czy uwzględnimy tarcie, czy nie, i jaką wartość posiada ten spółczynnik tarcia w drugim wypadku. Gdyby równia była pionowa, to przy ruchu na dół siły objętościowe sprowadziłyby się do zera, t.j. ciecz pozostawałaby jedynie pod wpływem symetrycznego układu sił międzycząsteczkowych. To nam wyjaśnia, dlaczego krople spadającej cieczy mają kształt kulisty /tarcie powietrza gra tu małą rolę/.

ZADANIE. Naczynie kształtu walca napełnione cieczą, obraca się dokoła osi pionowej walca ze stałą szybkością kątową ω. Znaleźć powierzchnie ekwipotencjalne.



Rys. 10.

Doświadczenie nas uczy, że powierzchnia swobodna cieczy staje się wklęsła. Znalazłszy równanie powierzchni ekwipotencjalnych, tem samem określimy i kształt powierzchni swobodnej.

Najdogodniej będzie tu obrać układ spółrzędnych cylindryczny o osi Z tak, jakeśmy to już rozpatrzyli w § 4. Stosując zasadę d'Alembert'a widzimy, że na każdy element cieczy działa prócz siły ciążenia g jeszcze jedna siła objętościowa, mianowicie siła $r\omega^2$, odwrotna do czynnej. Stąd

$$P_z = -g = \frac{\partial U}{\partial z}; \quad P_r = \frac{\partial U}{\partial r} = r\omega^2; \quad P_\vartheta = 0 = \frac{\partial U}{r\partial\vartheta},$$

Wobec tego

$$U = -gz + \frac{r^2\omega^2}{2} + C; \quad /1/$$

czyli powierzchniami ekwipotencjalnemi są paraboloidy o równaniach kształtu

$$-gz + \frac{r^2\omega^2}{2} = C_1;$$

Ponadto widzimy, że paraboloidy są utworzone przez obrót parabol $-gz + \frac{x^2\omega^2}{2} = C_1$ koło osi cylindra Z, będącej zarazem osią układu tych krzywych. Pamiętając, iż $p = \sigma U + C_2$ znajdziemy na zasadzie wzoru /1/ wartość

$$p = -\sigma gz + \frac{\sigma r^2\omega^2}{2} + C_3;$$

Z równania tego wyrugujemy stałą C_3, znając spółrzędną Z_0 wierzchołka paraboloidy, odpowiadającej powierzchni swobodnej cieczy. Jeśli jeszcze bowiem ciśnienie p_a panuje ponad cieczą, to

$$p_a = -\sigma g z_0 + C_3; \quad \text{czyli} \quad p - p_a = \sigma g(z_0 - z) + \frac{\sigma r^2\omega^2}{2};$$

Ustaliwszy w ten sposób równanie ogólne powierzchni ekwipotencjalnych, możemy łatwo tę z nich wyznaczyć, która odpowiada powierzchni swobodnej cieczy. Wówczas bowiem

$p = p_a$; i $0 = \rho g(z_0 - z) + \frac{\rho r^2\omega^2}{2}$ czyli $g(z - z_0) = \frac{r^2\omega^2}{2}$; /2/

Znając promień R cylindra, w którym się ciecz znajduje, łatwo wyliczymy z równania /2/ wysokość z_1 skrajnego okręgu przecięcia paraboloidy powierzchniowej z powierzchnią cylindryczną, kładąc $r = R$. Stąd

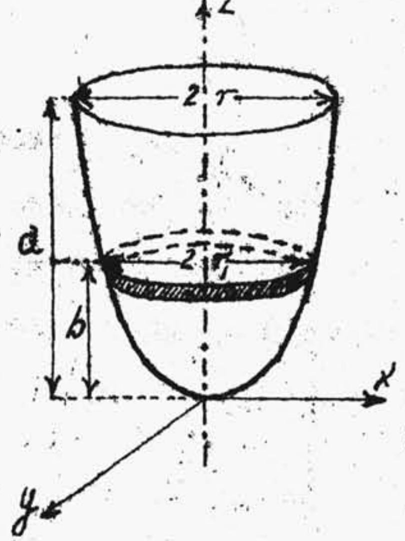
$$g(z_1 - z_0) = \frac{R^2\omega^2}{2} \quad \text{czyli} \quad h = \frac{R^2\omega^2}{2g}$$

gdzie $z_1 - z_0 = h$. Wobec tego, zmierzywszy przyrządem mierniczym głębokość h paraboli, możemy znaleźć szybkość kątową ω. Ta doświadczalna metoda zawodzi, gdy ω jest duże, bo h rośnie z kwadratem szybkości kątowej tak, że paraboloida szybko się wydłuży, aż do zetknięcia z dnem naczynia, a następnie dno się częściowo obnaży, przyczem zależność między h i ω ulegnie zmianie. W krańcowym przypadku, gdy paraboloida zetknie się z dnem naczynia, otrzymamy jej równanie, kładąc w równości /2/ $z_0 = 0$. Wówczas $gz = \frac{r^2\omega^2}{2}$, zaś podawnemu $h = \frac{R^2\omega^2}{2g}$. Zastanówmy się jeszcze nad tem, na jakiej wysokości H od poziomu znajdowała się ciecz, gdy cylinder z wodą znajdował się w spokoju. Nim rozwiążemy to zagadnienie, obliczmy objętość, powstałą przez obrót paraboli $x^2 = 2pz$ dokoła osi /rys.11/. Otóż objętość elementarna $dV = \pi x^2 dz = 2\pi p z\, dz$ czyli objętość paraboloidy ściętej, zawartej między płaszczyznami

$z = a$ i $z = b$ będzie

$$V = \int_b^a 2\pi p z\,dz = \pi p(a^2 - b^2) = \frac{\pi}{2}(a-b)\cdot 2p(a+b) =$$
$$= \frac{\pi}{2}(a-b)(r^2 - r_1^2)$$

gdyż $x^2 = 2pz$. Gdy w szczególnym wypadku $b = 0$, to objętość całej paraboloidy będzie: $V = \pi p\, a^2$, albo ze względu na to, że $r^2 = 2pa$, mamy $V = \frac{\pi r^2 a}{2}$. Innemi słowy objętość całej paraboloidy równa się połowie objętości walca, opisanego na niej. Zastosujemy te wyniki do rozważanego zadania, pamiętając, że na zasadzie nieściśliwości cieczy objętość jej czy to w ruchu, czy to w spoczynku musi być nieźmienna. Zadanie potraktujemy w sposób najogólniejszy.



rys.11.

Przypuśćmy tedy, że w stanie spoczynku ciecz znajdowała się na wysokości H w naczyniu, to objętość jej wynosiła $V = \pi R^2 H$. Skoro wprawimy naczynie w ruch, ciecz utworzy na powierzchni paraboloidę /całkowitą, czy ściętą/, która się przetnie z powierzchnią cylindryczną na wysokości z_1. Załóżmy początkowo, że wierzchołek paraboloidy znajduje się ponad poziomem dna, albo że w granicznym wypadku paraboloida jest styczna do płaszczyzny dna. Wówczas objętość cieczy w ruchu składa się z objętości cylindra o wysokości z_1, zmniejszonej o objętość paraboloidy, czyli

$$V = \pi R^2 z_1 - \tfrac{1}{2}\pi R^2 h$$

Porównywując powyższe dwie wartości na objętość cieczy mamy

$$\pi R^2 H = \pi R^2 (z_1 - h/2)$$

skąd

$$H = z_1 - h/2$$

czyli

$$z_1 - H = h_1 = h/2$$

Poziom cieczy w spoczynku dzieli w tym razie wysokość paraboloidy na połowę. Gdy natomiast dno się częściowo obnaży, należy postępować inaczej. Przedewszystkiem wyprowadzimy równanie powierzchni swobodnej cieczy. Otóż ogólne równanie powierzchni ekwipotencjalnych jest:

$$p = -\sigma g z + \frac{\sigma r^2 \omega^2}{2} + C_3 ;$$

Ponieważ na wysokość z_1 od dna cząstki cieczy, znajdujące się na powierzchni cylindrycznej podlegają ciśnieniu atmosferycznemu, więc

$$p_a = -\sigma g z_1 + \frac{\sigma R^2 \omega^2}{2} + C_3$$

Odejmując powyższe równania od siebie, otrzymamy ogólne równanie powierzchni ekwipotencjalnych:

$$p - p_a = \sigma g (z_1 - z) + \frac{\sigma \omega^2}{2}(r^2 - R^2)$$

które dla powierzchni swobodnej, t.j. przy $p = p_a$ wyrazi się jak następuje:

$$0 = \rho g(z_1 - z) + \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - R^2) \quad \text{czyli} \quad g(z_1 \ldots = \frac{\omega^2}{2}(R^2 - r^2$$

Obliczmy kwadrat promienia koła, które się obnaży na dnie naczynia w czasie ruchu. Otóż dla $z = 0$ znajdziemy

$$g z_1 = \frac{\omega^2}{2}(R^2 - r_1^2);$$

skąd

$$r_1^2 = R^2 - \frac{2g}{\omega^2} z_1$$

Wobec tego na zasadzie wzoru na objętość paraboloidy ściętej objętości cieczy $\pi R^2 H$ będzie z drugiej strony równa

$$\pi R^2 z_1 - \frac{\pi}{2} z_1 \left(R^2 + R^2 - \frac{2g}{\omega^2} z_1\right);$$

Stąd

$$\pi R^2 H = \pi R^2 z_1 - \frac{\pi}{2} z_1 \left(2R^2 - \frac{2g}{\omega^2} z_1\right)$$

czyli

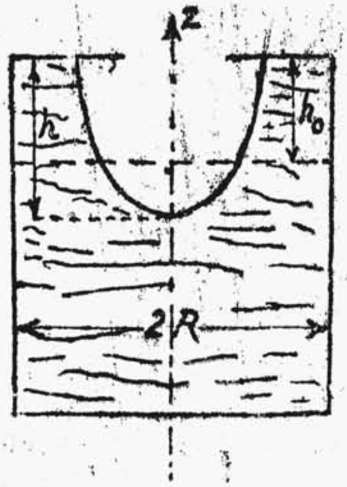
$$R^2 H = R^2 z_1 - R^2 z_1 + \frac{g}{\omega^2} z_1^2 \quad ;$$

t.j.

$$z_1^2 = R^2 \frac{\omega^2}{g} H;$$

A więc w tym razie wysokość ściętej paraboloidy jest proporcjonalna już tylko do pierwszej potęgi ω, co nam pozwala drogą doświadczalną wyznaczać wielkie ilości obrotów. Gdyby wreszcie naczynie było przymknięte denkiem

/rys.12/, to parabola przestawałaby się w pewnej chwili stykać z powierzchnią cylindra. Zauważmy, że parametr tej paraboli, jak wogóle parametr wszelkiej powierzchni swobodnej w rozpatrywanym przykładzie jest $p = g/\omega^2$, o czem się łatwo przekonać z ich równania. Stąd warunek zachowania objętości da w tym razie następujące równanie:



rys.12.

$$\pi R^2 h_0 = \pi p h^2 = \pi \frac{g}{\omega^2} h^2 ;$$

czyli

$$h^2 = \frac{R^2}{g} \omega^2 h ,$$

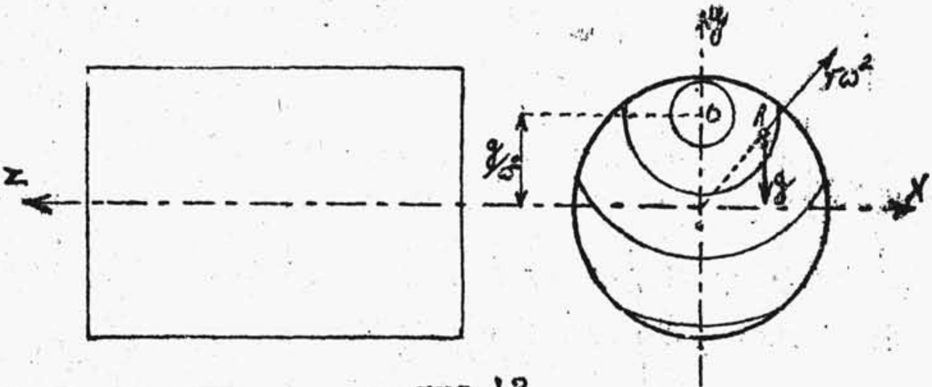
A więc i w tym przypadku wysokość paraboloidy jest proporcjonalna do pierwszej potęgi ω . Jeżeli w obracającym się walcu o osi pionowej umieścimy dwie ciecze nie mieszające się ze sobą, to ciecz lżejsza podczas obrotu pozostanie na powierzchni i będzie odgraniczona od cieczy cięższej powierzchnią paraboloidy, stanowiącej jedną z powierzchni poziomu. Jeżeli nawet ciecze rozpatrywane były ze sobą mechanicznie zmieszane, jak np. olej z wodą w postaci emulsji, to podczas obrotu ulegną one rozdzieleniu. Jeżeli teraz w obracającej się cieczy lżejszej zanurzymy odpowiednio skierowaną nieruchomą rurkę, to możemy ciecz tę podczas obrotu całkowicie wyczerpać z naczynia. Na tej

$$\pi R^2 h - \pi p h^2 = \pi R^2 (h - h_0) ;$$

własności oparte są np. wirówki do oddzielania śmietanki od mleka.

ZADANIE. Naczynie z wodą obraca się koło osi poziomej. Znaleźć powierzchnie ekwipotencjalne.

Budujemy prostokątny układ spółrzędnych xyz, kierując oś z wzdłuż osi obrotu, zaś oś y pionowo do góry /rys.13/. Wówczas równania hydrostatyki przybiorą



rys.13.

następującą postać:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = r\omega^2 \frac{x}{r} = x\omega^2;$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = r\omega^2 \frac{y}{r} - g = y\omega^2 - g;$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = 0;$$

Stąd

$$U = \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gy + C_1;$$

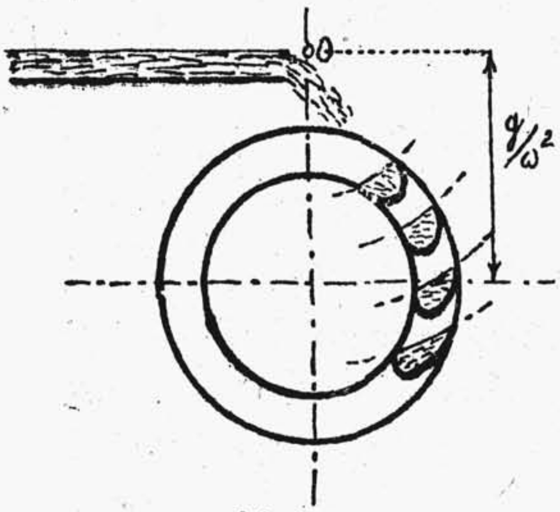
t.j. równania powierzchni ekwipotencjalnych będą kształtu

$$x^2 + (y - g/\omega^2)^2 = C_2$$

A zatem tworzą one układ koncentrycznych powierzchni walcowych, których oś ma spółrzędne $x = 0$; $y = g/\omega^2$ Nadto ciśnienie

$$p = \sigma U + C_3 = \frac{\sigma\omega^2}{2}(x^2+y^2) - \sigma g y + C$$

Gdy szybkość kątowa ω rośnie, wyraz g/ω^2 maleje, t.j. oś powierzchni cylindrycznych zbliża się do osi Z obrotu. W stanie spoczynku jest $g/\omega^2 = \infty$, t.j. oś powierzchni leży w nieskończoności, co się najzupełniej zgadza z rozpatrzonym przez nas wypadkiem cieczy w spoczynku. Rezultatem ruchu jest tedy przesunięcie osi cylindrycznych powierzchni ekwipotencjalnych z nieskończoności do punktu $(0, g/\omega^2)$. Przy dużej ilości obrotów, np. pompach odśrodkowych, można pominąć wartość g/ω^2, kładąc, że oś powierzchni ekwipotencjalnych nakrywa się z osią Z. Teorja ta gra ważną rolę w kołach wodnych nasiębiernych /rys. 14/.



rys.14.

Koło takie składa się z bębna, na którym są nasadzone korytkowate naczynia, ograniczone z obu stron tarczami. Pod wpływem siły ciężkości spadającej wody, koło się obraca. Gdy szybkość kątowa nie jest duża, to punkt odpowiadający osi powierzchni ekwipotencjalnych, jest dość wysoko, tak, iż powierzchnie swobodne cieczy w naczyniach, które otrzymamy w rzucie, zakreślając z punktu O odpowiednie okręgi, będą zbliżone do płaszczyzn poziomych. Gdybyśmy natomiast nadmiernie powiększyli liczbę obrotów koła, p. O by się obniżył i powierzchnie ekwipotencjalne byłyby tak wyraźnie wklęsłe, że wodaby się odrazu prawie całkowicie wylewała z korytek, nie wykonywując pracy.

§7.

STATYKA GAZÓW.

Jakeśmy już o tem mówili, gazy są pod wielu względami zbliżone do cieczy. Wiele dowodzeń stosuje się przeto do obu tych czynników, gdyż wystarcza tylko przeprowadzić z odpowiedniemi modyfikacjami rozumowanie, dowiedzione dla jednego z nich, aby otrzymać wyniki, słuszne i dla drugiego. Sposób wyprowadzenia równań hydrostatyki był tak ogólny, że równania ostateczne

$$X = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad Y = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad Z = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$

muszą być słuszne i dla gazów, o ile i cząsteczkom gazu nie przypiszemy wytrzymałości na rozciąganie i ścinanie. W jednym zachodzi tu tylko zasadnicza różnica. Ciecze przyjmowaliśmy za nieściśliwe, kładąc σ = const. Tego rodzaju założenie dla gazów nie odpowiadałoby nawet w grubem przybliżeniu rzeczywistości. Wiemy bowiem, że dla gazów