ruchu prostokątnego przekroju elementarnego prostopadłościanu płaszczyznami prostopadłemi do osi. Tym sposobem otrzymamy:

$$2\omega_{\vartheta} = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r};$$

$$2\omega_r = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r u_\vartheta)}{\partial z}\right];$$

$$2\omega_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r u_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}\right];$$

Wyrażenia te łatwo sprawdzić, uważając, iż muszą one być zerami w wypadku ruchu niewirowego. Pisząc w tym wypadku różniczkę zupełną potencjału prędkości, traktowanego jako funkcja trzech zmiennych niezależnych w postaci

$$d\Phi = r u_\vartheta d\vartheta + u_r dr + u_z dz;$$

widzimy, iż warunek ten jest spełniony.

§43. Całka pierwsza równań ruchu wzdłuż linji prądu w wypadku ogólnym ruchu wirowego.

Jeżeli ruch jest trwały i siły działające na ciecz posiadają potencjał, możemy scałkować równania ruchu wzdłuż linji prądu bez względu na to, czy ruch jest wirowy, czy też niewirowy. Oznaczmy potencjał sił przez U. Wówczas równania dynamiki będą:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$

Pomnożywszy powyższe równania kolejno przez $dx = u\,dt$, $dy = v\,dt$; $dz = w\,dt$ i dodając wyniki, znajdziemy, iż $u\,du + v\,dv + w\,dw = dU - \frac{1}{\sigma}dp$, czyli całkując wzdłuż linji prądu:

$$\frac{u^2+v^2+w^2}{2} = U - \frac{p}{\sigma} + C \ ;$$

Oznaczając szybkość całkowitą przez V, możemy przepisać powyższe równanie jako: $\frac{V^2}{2} - U + \frac{p}{\sigma} = C$. Otrzymane równanie jest właśnie równaniem Bernouilli'ego; podobne również wyrażenie otrzymaliśmy w przypadku ruchu trwałego niewirowego. Tam jednak stała C tyczy się wszystkich punktów cieczy, tu zaś stała C zmienia się wraz z poszczególnemi strugami. Dlatego też w tym ostatnim wypadku całka równania ma znaczenie praktyczne znacznie mniejsze, bo tyczy się poszczególnych strug, których równania nie są nam znane. Z całki tej nie można przeto określić kierunku prędkości, lecz tylko jej wielkość.

§44. Ruch niewirowy płaski.

Wróćmy teraz do ruchu niewirowego i zajmiemy się ruchem płaskim, w którym szybkości punktów cieczy są równoległe do pewnej płaszczyzny, sztywnie związanej z układem spółrzędnych i nie zależą od odległości od tej płaszczyzny początkowej. Przypuśćmy, że za taką płaszczyznę można przyjąć płaszczyznę xy . Wówczas, oznaczając jak zawsze potencjał prędkości przez ϕ możemy napisać, iż $u=\frac{\partial\phi}{\partial x}$; $v=\frac{\partial\phi}{\partial y}$, zaś $w=\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$. Wobec tego szybkości kątowe

$$\omega_x=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0;\quad \omega_y=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0;$$

oraz

$$\omega_z=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,, \qquad /1/.$$

Dwie pierwsze równości nie dadzą nam w przypadku ruchu płaskiego niewirowego nic nowego, gdyż $w=0$ zaś v i u nie zależy od z , istotnym jest tu tylko warunek trzeci.* Pozatem musimy wziąć na uwagę równanie ciągłości strugi $div(u\,v\,w)=\Delta_2\phi=0$, które w tym wypadku otrzyma kształt $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ lub też

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0 \qquad /2/$$

Wreszcie musimy uwzględnić całkę ogólną równań Euler'a w przypadku ruchu niewirowego:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{V^2}{2}=U-\frac{p}{\sigma}+F(t)\,; \quad /3/$$

Jasnem jest, iż w tym wypadku zamiast powierzchni potencjalnych prędkości możemy rozpatrywać linje potencjalne określone równaniem ϕ = const.

Musimy przedewszystkiem znaleźć równanie linji prądu z układu równań różniczkowych $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$, który w rozważanym przez nas ruchu płaskim się uprości:

$u\,dy - v\,dx = 0$. A ponieważ z równania /2/ jest

$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$, więc pierwsza część równania poprzedniego da się scałkować, gdyż stanowi różniczkę pełną $d\Psi$ jakiejś funkcji Ψ. Z określenia funkcji wynika, iż

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}; \qquad \text{zaś} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u = \frac{\partial \phi}{\partial x};$$

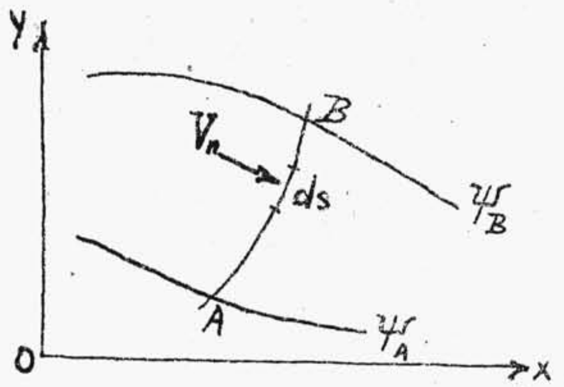
Z równań tych widać, że

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0;$$

czyli linje prądu i linje potencjalne tworzą płaski układ trajektorji ortogonalnych. Podstawiając wartości u i v w funkcji Ψ do równania /1/ otrzymamy:

$$2\omega_z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = -\Delta_2 \Psi = 0 \quad /4/$$

czyli funkcja Ψ, którą będziemy nazywali p o t e n c j a ł e m   p r ą d u musi również czynić zadość równaniu Laplace'a. Porównując warunki, które muszą spełniać funkcje ϕ = const., Ψ = const. widzimy najzupełniejszą symetrję, tak, iż obierając jedną z nich za równanie linji prądu otrzymamy drugą, jako równanie potencjału szybkości i nawzajem. Teoretycznie można więc ruch tak odwrócić, że linje prądu staną się linjami potencjalnemi i nawzajem. Takie dwa ruchy będziemy nazywali sprzężonymi. Wobec tego składową prędkość elementu cieczy można określić jako pochodną potencjału prędkości w kierunku tej składowej, albo jako pochodną potencjału prądu w kierunku prostopadłym do poprzedniego. Wskażemy jeszcze jedno fizyczne znaczenie potencjału prądu Ψ.



Rys. 114.

Niech w cieczy, znajdującej się w ruchu płaskim, będzie jakaś krzywa AB, której element ds posiada szybkość o składowej normalnej V_n /rys. 114/. Tworząc powierzchnię cylindryczną o kierownicy AB, zaś grubości dz, znajdziemy łatwo wartość wydatku cieczy przez ten element powierzchni jako

$$Q=\int V_n\,ds\,dz = dz\int_A^B \frac{\partial\Psi}{\partial s}\,ds = dz\left(\Psi_B-\Psi_A\right)$$

gdyż szybkość normalna V_n wyraża się pochodną potencjału prądu w kierunku ds, prostopadłym do V_n.

A więc wartość $Q/dz = q = \psi_B - \psi_A$ równa wydatkowi warstwy cieczy, mającej grubość jednostki, mierzy się różnicą wartości potencjału prądu w punktach krańcowych kierownicy AB. Widać stąd również, że wartość takiego wydatku jest stała dla wszystkich krzywych płaskich, poprowadzonych między danemi dwiema linjami potencjalnemi prądu.

Zastanówmy się z kolei nad całką równania Laplace'a

$$\Delta_2 \Phi = 0 = \Delta_2 \Psi;$$

które muszą spełniać zarówno potencjały prądu jak i prędkości. Otóż ogólna całka tego równania da się wyrazić jako funkcja

$$F = F_1(x+iy) + F_2(x-iy);$$

gdzie F_1 i F_2 oznaczają dwie funkcje analityczne zmiennej zespolonej, które można zastąpić przez jedną $f(x+iy)$. Łatwo sprawdzić, że tak jest istotnie, gdyż, kładąc $x+iy = z_1$; $x-iy = z_2$ mamy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial z_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z_1} + \frac{\partial F_2}{\partial z_2};$$

oraz podobnie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2};$$

Analogicznie będzie:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial F_1}{\partial z_1} - i\frac{\partial F_2}{\partial z_2} \quad \text{zaś} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial z_2^2}\right);$$

Łatwo zauważyć, że równanie Laplace'a zostaje spełniono przez wstawienie otrzymanych wartości $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ oraz $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$;

Wszelka funkcja zmiennej zespolonej, będąca całką równania, da się wyrazić, jak następuje:

$$f(x+iy)=f_1(xy)+if_2(xy);$$

gdzie f_1 oraz f_2 stanowią też całki równania Laplace'a. Łatwo okazać, że funkcje te muszą ponadto tworzyć układ ortogonalnych trajektorji. Istotnie

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+i\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial y}+i\frac{\partial f_2}{\partial y}=i\frac{\partial f}{\partial z};$$

Z równań powyższych otrzymamy:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}+i\frac{\partial f_2}{\partial y}=i\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+i\frac{\partial f_2}{\partial x}\right);$$

skąd

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}=\frac{\partial f_1}{\partial x}; \qquad -\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{\partial f_1}{\partial y};$$

Z powyższego widać, że funkcje f_1 i f_2 tworzą układ ortogonalny, spełniający równanie:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}=0;$$

Na zasadzie powyższego widać, iż można przy rozwiązywaniu zagadnienia założyć $f_1=\Phi$, zaś $f_2=\Psi$, gdyż te ostatnie funkcje spełniają dokładnie wszystkie te warunki, jakieśmy wprowadzili dla f_1 i f_2, tak, iż funkcja

$f = f_1 + if_2 = \phi + i\Psi$ będzie całką równania Laplace'a.
Ponieważ zaś ogólnie zmienna zespolona $z = r e^{i\vartheta} = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$ więc całkę tę można i tak przepisać:

$$f(z) = f(re^{i\vartheta}) = f[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)] = \phi + i\Psi;$$

Zauważmy, że analogiczne rezultaty otrzymamy przy zastosowaniu do rozważania ruchu płaskiego spółrzędnych biegunowych. Wykazaliśmy bowiem w § 42, iż równanie /4/ ciągłości strugi wyraziło się jako:

$$1/r^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + 1/r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0;$$

W przypadku ruchu płaskiego jest $\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$, tak iż w układzie biegunowym równanie Laplace'a przybierze w tym razie prostszą postać:

$$1/r^2 \frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + 1/r \frac{\partial\phi}{\partial r} = 0;$$

Podobnie równanie /3'/ powyższego paragrafu uprości się:

$$\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{\partial(u_r r)}{\partial r} = 0;$$

Wreszcie równanie linji prądu znajdźmy z układu $\frac{r\,d\vartheta}{u_\vartheta} = \frac{dr}{u_r}$ tak, iż $u_r r\,d\vartheta - u_\vartheta dr = d\Psi = 0$, gdzie na podstawie równania ciągłości $d\Psi$ jest różniczką zupełną pewnej funkcji Ψ. Równanie różniczkowe, które musi spełniać funkcja Ψ otrzymamy, podstawiając w wyrażeniu ω_z składowe prędkości, wyrażone przez pochodne potencjału prądu ψ. Ponieważ $u_r = \frac{\partial \psi}{r \partial \vartheta}$ zaś $u_\vartheta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$, więc warunek $\omega_z = 0$ można napisać:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\frac{\partial \psi}{r \partial \vartheta}\right) = 0;$$

Upraszczając i dzieląc przez r, otrzymamy:

$$1/r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + 1/r \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0;$$

takie samo równanie jak dla potencjału prędkości φ.

§ 45. Przykłady na ruch płaski niewirowy.

Postaramy się na szeregu przykładów uwydatnić powyższe wyniki:

1/ Niech tedy przedewszystkiem całka

$$f(z) = \varphi + i\psi = (A + Bi) \ln z;$$

gdzie $A B$ oznaczają pewne stałe, zaś $z = r(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$

Rozważmy, czy i jak da się tak pomyślany ruch zrealizować w rzeczywistości. Otóż

$$\varphi + i\psi = (A + Bi)(\ln r + i\vartheta) = (A \ln r - B\vartheta) + i(B \ln r + A\vartheta)$$

skąd

$$\varphi = A \ln r - B\vartheta; \quad \psi = B \ln r + A\vartheta;$$

A więc linje szybkości i prądu stanowią układ ortogonalnie przecinających się spiral logarytmicznych o równaniach $r = e^{\varphi/A + B/A\,\vartheta}$ oraz $r = e^{\psi/B - A/B\,\vartheta}$. Jednakże dla początku układu spółrzędnych wynikałoby stąd, iż wartości szybkości są nieskończenie wielkie. Ta nieciągłość analityczna oznacza, iż wzdłuż osi ciecz pojawia się sama przez się, t.j. mamy tu do czynienia z linjowem źródłem cieczy.

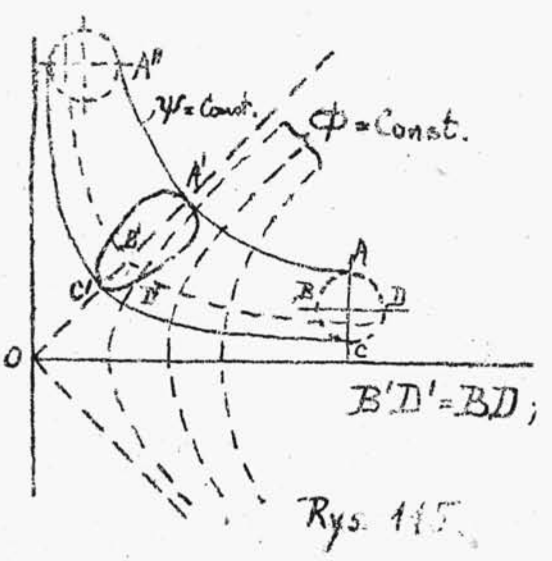
2/ Zważmy z kolei:

$$\Phi + i\Psi = Az^2 = A(x^2-y^2) + i\cdot 2Axy;$$

Wówczas $\Phi = A(x^2-y^2)$ oraz $\Psi = 2Axy$. Wobec tego prędkość $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Psi}{\partial y} = 2Ax$ oraz $v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -2Ay$ tak, iż cała prędkość

$$V = \sqrt{u^2+v^2} = \sqrt{4A^2(x^2+y^2)} = 2Ar$$

gdzie przez r oznaczyliśmy promień wodzący rozważanego punktu w cieczy. Graficznie znajdziemy stąd układ



$B'D' = BD$;

Rys. 115.

hyperbol równobocznych, odpowiadających linjom potencjalnym $\Phi = x^2 - y^2$ = constans, przecinający się ortogonalnie z układem takich samych hyperbol $\Psi = xy$ = const., odniesionych tylko do innych osi /rys.115/. Ponieważ szybkości są proporcjonalne do promienia wodzącego, przeto w punktach A, B, C /rys.115/, leżących blisko osi, mało się różnią od siebie. Jeżeli teraz przypuścimy, iż w przekroju AC następuje raptowna zmiana warunków ruchu, tak iż dalej wszystkie strugi cieczy stają się równoległe i posiadają tę samą stałą prędkość, to strata energji, występująca przy takiej raptownej zmianie będzie tem mniejsza, im dalej znajduje się przekrój AC od początku spółrzędnych. Przypuśćmy teraz, iż ciecz dopływa do przekroju AC rurą przekroju kołowego, zaś dalej następuje kolano, w którem chcemy urealizować ruch potencjalny powyżej rozważany. Kształt kolana w dowolnym przekroju np. $A'C'$ łatwo określimy z warunku, iżby strugi, które w przekroju AC znajdowały się na ścianach rury, w dalszym ciągu na tych ścianach pozostawały. Kolana takiego kształtu, jak stwierdziło doświadczenie, powodują znacznie mniejszy opór przy przepływie cieczy, niż kolana o przekroju kołowym. Jest rzeczą ciekawą, iż w turbinach o wałkach poziomych doświadczenie naprowadziło na podobny kształt.

3/ Weźmy ogólnie ten warunek, gdy całka równania Laplace'a

$$Z = f(z) = \varphi + i\psi = Az^n = Ar^n(\cos n\vartheta + i\sin n\vartheta)$$

Zrobimy tu ogólną uwagę, pozwalającą w pewnych w pewnych wypadkach bezpośrednio obliczyć składowe szybkości u i v. Otóż:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u - iv = \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial z};$$

Wystarcza przeto mieć $\frac{\partial Z}{\partial z}$, aby obliczyć stąd u oraz v przez porównanie obu stron równania. W rozważanym przykładzie:

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = nAz^{n-1} = nAr^{n-1}\left[Cos(n-1)\vartheta + iSin(n-1)\vartheta\right] = u - iv;$$

$$u = nAr^{n-1}Cos(n-1)\vartheta; \qquad v = -nAr^{n-1}Sin(n-1)\vartheta;$$

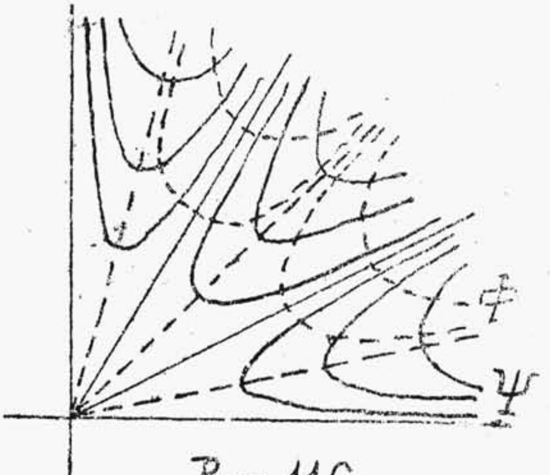
zaś całkowita prędkość

$$V = -nAr^{n-1} = \sqrt{u^2 + v^2};$$

t.j. jest proporcjonalna do $(n-1)$ potęgi promienia wodzącego. Dalej z wyrażenia:

$$Z = \phi + i\Psi = Ar^n(Cos\, n\vartheta + iSin\, n\vartheta)$$

widać, iż $\phi = Ar^nCos\, n\vartheta$ zaś $\Psi = Ar^nSin\, n\vartheta$. Z równości tych wynika, że dla promieni wodzących wierzchołków $2n$-kąta poziomego, określonych równością $Cos\, n\vartheta = 0$ lub $\vartheta = k\pi/n + \pi/2n$ jest $\Psi = 0$. Natomiast potencjał ϕ przyjmuje wartość zero dla promieni wodzących analogicznego $2n$-kąta, przesuniętego jednak o kąt $\pi/2n$ wstecz. Istotnie dla $Sin\, n\vartheta = 0$ jest $\vartheta = k\pi/n$. Łatwo stąd graficznie wyznaczyć linje, odpowiadające wartościom



Rys. 116.

$$\Phi = A r^n \cos n\vartheta = Const.$$

i

$$\Psi = A r^n \sin n\vartheta = Const.$$

Zauważmy, iż wartości szybkości wyrażą się w układzie biegunowym jako

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = n A r^{n-1} \cos n\vartheta;$$

zaś

$$u_\vartheta = -n A r^n \sin n\vartheta;$$

Z wykresu powyższego można otrzymać kształty przewodów, odpowiadające bardziej ostrym niż rozwartym przegięciom /rys. 116/.

4. Możemy zrobić jeszcze jeden krok na drodze uogólnienia, kładąc

$$Z = \Phi + i\Psi = \Sigma C_k z^k$$

gdzie, ogólnie wziąwszy, C_k oznacza stałą zespoloną. Otóż wyrażenie tego rodzaju da się zawsze sprowadzić do postaci:

$$Z = \Sigma A_k r^k \cos k\vartheta + i \Sigma B_k r^k \sin k\vartheta$$

która pozwala na obwodzie dowolnego koła o promieniu r = constans obrać zgóry układ wartości potencjału prędkości i potencjału prądu

$$\Phi = \sum A_k a^k \cos k\vartheta; \quad \Psi = \sum B_k a^k \sin k\vartheta;$$

jako też odpowiedni układ prędkości na obwodzie, a to na podstawie rozwinięcia w szereg Fourier'a, wyrażającej obrane zależności funkcji $f(\vartheta)$. Należy zaznaczyć, że sumowanie ma być rozciągnięte na dodatnie całkowite wartości k, o ile rozważamy warunki ruchu wewnątrz koła $r=a$. Przy rozważaniu ruchu cieczy, rozciągającej się do nieskończoności zewnątrz koła $r=a$ należy sumowanie rozciągnąć na całkowite ujemne wartości k.

5/ Załóżmy wreszcie, iż

$$Z = \Phi + i\Psi = A\left(\frac{a^2}{z}+z\right) = A\left(\frac{a^2}{x+iy}+x+iy\right) = Ax\left[\frac{a^2}{x^2+y^2}+1\right] + iAy\left[-\frac{a^2}{x^2+y^2}+1\right];$$

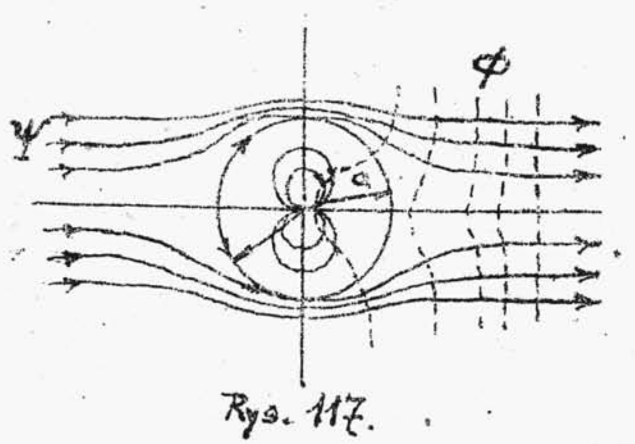
skąd

$$\Phi = Ax\left[\frac{a^2}{x^2+y^2}+1\right];$$

zaś

$$\Psi = Ay\left[-\frac{a^2}{x^2+y^2}+1\right]$$

Zauważmy, że potencjał prądu $\Psi=0$ dla $y=0$ lub gdy $x^2+y^2=a^2$ t.j. na obwodzie pewnego koła o promieniu a /rys. 117/. Poza tem w nieskończoności przy $x^2+y^2=r^2=\infty$



Rys. 117.

mamy $\Phi \Rightarrow Ax$ zaś $\Psi \Rightarrow Ay$, t.j. linje szybkości asymptotycznie zbliżają się do osi x, zaś szybkości

$$V \Rightarrow u \Rightarrow A$$

A więc powyższy przypadek odpowiada takiemu praktycznemu zagadnieniu, gdy cylinder o promieniu a wstawimy w cieczy, płynącej ruchem płaskim o szybkości $V=u=A$, gdyż istotnie wzdłuż obwodu i przekroju kołowego cylindra szybkość ma tylko składową styczną. Zauważmy jednak, że analityczne sformułowanie zagadnienia wymaga, aby i wewnątrz cylindra istniały linje prądu, t.j. cylinder ten nie może mieć charakteru materjalnego, lecz stanowi raczej fikcyjnie wyodrębnioną bryłę w cieczy. Istotnie wyrażenie

$$\frac{dZ}{dz} = u - iv = A\left(-\frac{a^2}{z^2} + 1\right);$$

da

$$u - iv = A\left(1 - \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\vartheta}\right);$$

skąd

$$u = A\left(1 - \frac{a^2}{r^2} \cos 2\vartheta\right) \quad \text{zaś} \quad v = -A\frac{a^2}{r^2} \sin 2\vartheta;$$

Wobec tego składowa v szybkości dąży do zera $r \Rightarrow \infty$, jakeśmy to już wyprowadzili wcześniej, gdy tymczasem $u \Rightarrow A$. Poza tem łatwo zauważyć z wyrażeń szybkości, że układ linji prądu musi być symetryczny względem osi. Szybkość całkowita:

$$V=\sqrt{u^2+v^2}=A\sqrt{1-2\frac{a^2}{r^2}\cos 2\vartheta+\frac{a^4}{r^4}}$$

przybiera na kole o promieniu a wartości $2a\sin\vartheta$. Wewnątrz koła będziemy mieli do czynienia z ujemnemi wartościami parametru ψ. Linje prądu stanowią dwa układy krzywych zamkniętych, zbiegających się w środku spółrzędnych. Ciecz płynie wzdłuż tych linji prądu, w kierunku strzałek - rys.117. Początek spółrzędnych stanowi w tym wypadku podwójne dodatnio-ujemne źródło cieczy, gdzie prędkości są nieskończenie wielkie. Zauważymy, że rozważany ruch cieczy wtedy tylko można by było zrealizować, gdybyśmy mogli utworzyć opisane źródło cieczy. Przy ruchu rozważanym walec nie napotykałby oporu w cieczy, gdyż prędkość wypadkowa, a zatem i ciśnienie nie zmienia się przy zamianie ϑ na $\pi-\vartheta$. Tymczasem doświadczenie uczy, iż walec przy ruchu w cieczy napotyka pewien dość znaczny opór. Należy przypuszczać iż w rzeczywistości przy ruchu walca, jako też wogóle ciała stałego w cieczy za ciałem tem powstają zmiany, powodujące spadek ciśnienia, stanowiący przyczynę opor

§46. Ruch niewirowy /por. § 42/, mający oś symetrj...

Jednym z najważniejszych zagadnień dla teoretu...