nę naczynia o szukanem ciśnieniu p . Cała różnica między manometrem płytkowym a rurkowym polega na tem, że odkształceniom podlega tu nie rurka, lecz faliste wygięta płytka P . Wyginając się, sprowadza wówczas wychylenie wycinka ω , ten zaś z kolei przesuwa wskazówkę na skali.

HYDRODYNAMIKA.

§ 18. Zwróćmy się teraz do rozpatrzenia ruchu cieczy. Zgóry zastrzeżemy się, że jest to zjawisko bardzo złożone. Wprowadzając nawet pojęcie cieczy doskonałej, uzyskujemy analitycznie rezultaty często bardzo zawiłe. Ruch zaś cieczy istotnej jest po dziś dzień w wielu wypadkach zagadnieniem otwartem. W dalszym toku naszych rozważań nie będziemy się kusić przy wielu zagadnieniach o matematyczną ścisłość i elegancję. Natomiast wprowadzimy szereg uproszczeń, starając się powetować popełnione przytem niedokładności zapomocą odpowiednio dobranych spółczynników.

Otóż w statyce cieczy, wprowadzając 3 zmienne niezależne, mianowicie spółrzędne x, y, z potrafiliśmy ustawić zasadnicze równania różniczkowe i rozwiązać w ten sposób zagadnienie. W hydrodynamice spotykamy się już z czwartą zmienną - czasem t . Pochodzi to stąd, że stan spoczynku od czasu nie zależy, natomiast stan cynematyczny i dynamiczny cieczy jest, ogólnie wziąwszy, w każdej chwili inny. Zauważmy jeszcze, że w hydrodynamice zachowamy te same oznaczenia, co i dotychczas. Wprowadzimy tu jeszcze wartość t.zw. wydatku cieczy, mierzącą się objętościową lub ciężarową ilością cieczy, przepływającą przez rozważany przekrój cieczy w jednostkę czasu. Wogóle zjawiska ruchu cieczy da się rozpatrzeć z 2-ch zasadniczych punktów widzenia, które już Euler wyodrębnił w swem dziele. Można mianowicie badać ruch cząstek cieczy, przepływających przez określony punkt sztywnego układu spółrzędnych, albo też, jak to analitycznie pięknie rozwinął Lagrange, można śledzić ruch jednej i tej samej cząstki cieczy, zmieniając wraz z nią ustawicznie położenie. Uwydatniwszy w ten sposób zasadniczą ideę każdego z tych rozwiązań, widzimy, że w pierwszym wypadku dla danego punktu układu szybkość, przyśpieszenie, ciśnienie i t.d. cząstek cieczy, będzie funkcją czasu oraz spółrzędnych rozpatrywanego punktu, natomiast przy stosowaniu drugiej metody rozważane wielkości będą funkcjami czasu oraz początkowego położenia cząstki, t.j. spółrzędnych punktu, w którym rozpatrywana cząstka znajdowała się w chwili, od której czas liczymy. I pierwsza i druga metoda z konieczności doprowadzi nas do równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych, w których w przypadku ogólnym będziemy mieli 4 zmienne niezależne.

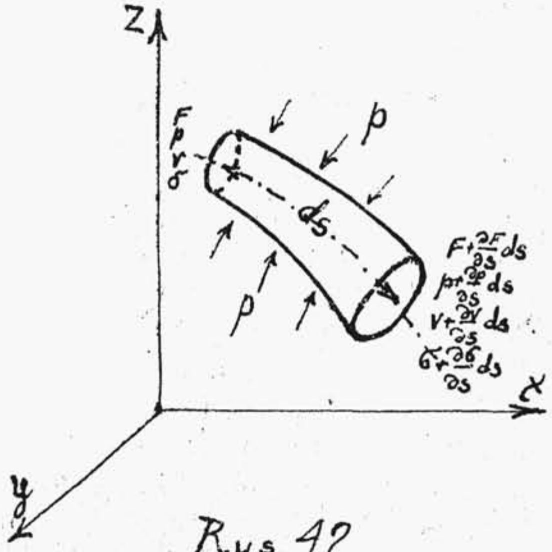
Wszelkie ruchy cieczy można podzielić na trwałe i nietrwałe. W pierwszym przypadku stan cynematyczny i dynamiczny układu nie zależy wyraźnie od czasu, lecz tylko od spółrzędnych rozpatrywanego punktu. Innemi słowy przy ruchu trwałym cząstki cieczy, przechodzące przez punkt rozpatrywany, posiadają w tym punkcie ciągle te same prędkości, podlegają tym samym ciśnieniom i t.d. W technice ruch trwały gra ważną rolę, gdyż równomierny ruch mechanizmów wywołuje zwykle również trwały ruch cieczy. Ruch nietrwały jest wypadkiem ogólnym. W tym razie warunki zachodzące w każdym punkcie przestrzeni ulegają zmianie z biegiem czasu, mamy przeto do czynienia w każdym punkcie z coraz innemi prędkościami, ciśnieniami i t.d.

Analitycznie ruch trwały charakteryzuje ta okoliczność, iż przy jego istnieniu pochodne cząstkowe prędkości, ciśnień i t.d. względem czasu są zerami dla wszystkich punktów przestrzeni, w której ten ruch ma miejsce. Przy ruchu nietrwałym wielkości te są różne od zera.

Będziemy uważali, iż podczas ruchu ciecz doskonała złożona jest ze strug elementarnych, wywierających na siebie wzajemnie tylko ciśnienia normalne. Przy ruchu trwałym osie strug czyli linje prądu są torami cząstek cieczy, zaś przy ruchu nietrwałym kształt strug zmienia się ustawicznie, tak iż tory cząstek są to obwiednie chwilowych linji prądu. Ze względu, iż sąsiednie strugi elementarne nie wywierają na siebie wzajemnie działań stycznych, ciecz nie może przedostać się z jednej strugi do drugiej. Jeżeli jeszcze założymy, że ciecz całkowicie wypełnia przestrzeń, w której się porusza, to otrzymamy warunki ciągłości ruchu cieczy, według których przy ruchu trwałym wydatek elementarny każdej strugi elementarnej nie ulega zmianie, ogólnie zaś struga nie może się ani zaczynać ani kończyć wewnątrz cieczy, o ile tylko prędkość pozostaje skończoną, i o ile struga nie jest zamkniętą. Prowadząc normalny przekrój elementarny strugi, wiemy, że szybkości wszystkich punktów przekroju będą doń normalne i odpowiednio sobie równe. Tę samą własność przypiszemy strudze o wymiarach skończonych. Popełniamy przytem nieścisłość, gdyż wzdłuż konturu przekroju skończonej wielkości, poprowadzonego normalnie do linji środkowej strugi, będą istnieć i składowe poprzeczne szybkości, które poza tem są różne. Przyjmijmy jednak nasze założenie, to szybkości oraz przekroje strugi będą w ogólnym przypadku ruchu nietrwałego zależeć tylko od długości s linji środkowej, liczonej od pewnego punktu na tej linji, oraz od czasu t, t.j. szybkość $v = f_1(st)$ zaś przekrój $F = f_2(st)$

§ 19. Równanie ciągłości oraz równanie ruchu strugi o przekroju skończonym.

Wychodząc z poprzednich założeń, postarajmy się ustalić równanie ciągłości strugi. W tym celu wyodrębnimy element strugi o długości ds, posiadający w przekroju $\mathcal{F}$ parametry p, v, σ, zaś w przekroju $\mathcal{F}+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds$ odpowiednio $p+\frac{\partial p}{\partial s}ds$; $v+\frac{\partial v}{\partial s}ds$; $\sigma+\frac{\partial \sigma}{\partial s}ds$.



Rys. 42.

Obliczmy zmianę masy cieczy, zawartej w rozważanym elemencie strugi w nieskończenie krótkim czasie dt. Otóż przez przekrój $\mathcal{F}$ wpływa w tym czasie masa $\mathcal{F}v\sigma dt$, zaś przez przekrój $\mathcal{F}+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds$ wypływa masa:

$$\left(\mathcal{F}+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds\right)\left(v+\frac{\partial v}{\partial s}ds\right)\left(\sigma+\frac{\partial \sigma}{\partial s}ds\right)dt$$

t.j. w cieczy pozostaje nadmiar

$$\left[\mathcal{F}v\sigma-\left(\mathcal{F}+\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds\right)\left(v+\frac{\partial v}{\partial s}ds\right)\left(\sigma+\frac{\partial \sigma}{ds}\right)\right]dt \qquad (1)$$

Z drugiej strony masa cieczy $\mathcal{F}ds\,\sigma$, zawarta w elemencie strugi zwiększy się w czasie dt o ilość

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}ds\,\sigma)\,dt \qquad (2)$$

Porównywując otrzymane dwa wyrażenia tej samej wielkości, widzimy, iż

$$\mathcal{F} v \sigma - \left(\mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} ds\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial s} ds\right)\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F} ds \sigma)$$

Rozwijając pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F} ds \sigma)$ i pomijając nieskończonostki wyższych rzędów, znajdziemy stąd bezpośrednio, iż

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}\sigma) + \mathcal{F} v \frac{\partial \sigma}{\partial s} + \mathcal{F}\sigma \frac{\partial v}{\partial s} + v\sigma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = 0$$

A że

$$\mathcal{F} v \frac{\partial \sigma}{\partial s} + \mathcal{F}\sigma \frac{\partial v}{\partial s} + v\sigma \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{F} v \sigma)$$

więc ostatecznie będzie

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{F}\sigma) + \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{F} v \sigma) = 0 \qquad (3)$$

Wynik ten, uzyskany najzupełniej ogólnie, jest ścisły dla strugi elementarnej, dla strugi skończonej stanowi tylko wynik przybliżony. Równanie powyższe da się w szczególnych wypadkach uprościć. A więc dla cieczy nieściśliwej, t.j. przy $\sigma = Const$, uzyskamy równanie

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{F} v) = 0;$$

Gdy zaś ponadto ruch ma być trwały, t.j. niema wyraźnie zależeć od czasu, wówczas

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0; \qquad i \qquad \frac{\partial}{\partial s}(\mathcal{F} v) = \frac{d}{ds}(\mathcal{F} v) = 0;$$

czyli

$$\mathcal{F} v = Const. \qquad (4)$$

Równanie /4/ ma bardzo proste fizyczne znaczenie.

Widać zeń mianowicie, że w każdym przekroju wydatek cieczy $\mathcal{F}v = Q$ ma wartość stałą.

Znając siły objętościowe jednostkowe P wzdłuż osi strugi i oznaczając przez p ciśnienie, panujące w przekroju $\mathcal{F}$ strugi, możemy ustalić jeszcze jedno równanie, mianowicie równanie ruchu strugi, w myśl zasad mechaniki. Na rozważany element strugi działa w kierunku osi siła objętościowa $P\mathcal{F}ds.\sigma$, różnica parć na powierzchnie czołowe

$$p\mathcal{F} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}ds\right)\left(\mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds\right)$$

oraz składowa ciśnień p na powierzchnię boczną równa $p\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds$. Ponieważ oznaczyliśmy szybkość cieczy w początkowym przekroju strugi przez v, więc otrzymamy następujące równanie dynamiki

$$\mathcal{F}ds\sigma\frac{dv}{dt} = P\mathcal{F}ds\sigma + p\mathcal{F} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}ds\right)\left(\mathcal{F} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds\right) + p\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial s}ds;$$

skąd po uproszczeniu

$$P\mathcal{F}ds\sigma - \mathcal{F}\frac{\partial p}{\partial s}ds = \mathcal{F}ds\sigma\frac{dv}{dt};$$

czyli

$$P - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial s}\cancel{ds} = \frac{dv}{dt};$$

Zauważmy jednak, że

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s};$$

ze względu na to, że $\frac{ds}{dt} = v$. Podstawiając powyższą wartość na $\frac{dv}{dt}$, znajdziemy ostatecznie, iż

$$P - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial s}; \qquad (5)$$

Równania /3/ i /5/ rozwiązują zagadnienie, pozwalając znaleźć p i v w funkcji s i t do czego samo równanie ruchu bez równania ciągłości byłoby niewystarczające.

§20. Równanie Bernoulli'ego.

Załóżmy, że ruch jest trwały, t.j. że stan cieczy nie zależy wyraźnie od czasu. Wówczas

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{dv}{ds}; \quad \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{ds};$$

i równanie /5/ się uprości na

$$P - \frac{1}{\sigma}\frac{dp}{ds} = v\frac{dv}{ds};$$

Gdy siły objętościowe posiadają potencjał, t.j.

$$P = \frac{\partial U}{\partial s} = \frac{dU}{ds};$$

wówczas

$$\frac{dU}{ds} - \frac{1}{\sigma}\frac{dp}{ds} = v\frac{dv}{ds};$$

Jeśli ponadto założymy, że ciecz jest nieściśliwa, otrzymamy po scałkowaniu

$$U - p/\sigma - v^2/2 = C_1;$$

Gdy ciecz podlega tylko sile ciężkości, to, kierując oś Z pionowo do góry mamy $U = -\varrho z$ czyli $-\varrho z - p/\sigma - v^2/2 = C_1$; skąd

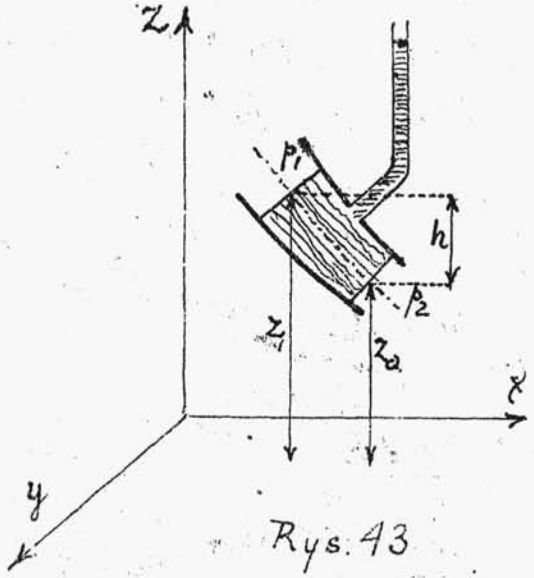
$$z + p/\varrho + \frac{v^2}{2\varrho} = C \qquad (6);$$

Otrzymane równanie nosi nazwę równania Bernoulli'ego od nazwiska matematyka, który je pierwszy ustalił. Przypomnijmy, że tyczy się ono tylko tego wypadku, gdy nieściśliwa ciecz znajduje się w ruchu trwałym pod wpływem siły ciężkości. Każdy z wyrazów równania ma określone znaczenie fizyczne. A więc Z oznacza wysokość środka przekroju ponad poziomem płaszczyzny xy. p/γ wyraża wysokość słupa cieczy, równoważącego ciśnienie p przekroju, wyraz $v^2/2g$ wreszcie oznacza wysokość, na jaką by się podniosło w próżni ciało rzucone z szybkością v. Zatem prawa Bernoulli'ego możemy sformułować i tak, mówiąc, że w każdym przekroju strugi cieczy suma trzech powyższych wysokości jest stała. Zauważmy ponadto, że prawo to można uzyskać bezpośrednio, stosując zasadę zachowania energji. Ponieważ bowiem ciecz spada pod działaniem siły ciężkości, suma energji potencjalnej i kinetycznej musi być dla wszystkich przekrojów ta sama. Zastosujmy to twierdzenie do 1 kg. cieczy, wówczas energji potencjalnej odpowiada suma $Z + p/\gamma$ zaś kinetycznej $-v^2/2g$ c.n.d.

Wyobraźmy sobie tedy, że mamy 2 normalne przekroje strugi /rys.48/, odpowiadające wysokościom Z_1 i Z_2. Teoretycznie wziąwszy, powinniśmy uzyskać równanie:

$$Z_1 + p_1/\gamma + v_1^2/2g = Z_2 + p_2/g + v_2^2/2g$$

Ponieważ równanie Bernoulli'ego, jak i cała powyższa teorja



Rys. 43

nie były wyprowadzone zupełnie ściśle, nadto nie uwzględniliśmy lepkości cieczy, więc w rzeczywistości suma 3-ch wysokości będzie maleć w kierunku strugi. Chcąc zachować znak równości, musimy do prawej strony, jak to wykazały doświadczenia, dodać wyraz $h_s = k\frac{v_2^2}{2g}$, proporcjonalny do kwadratu szybkości i zależny od empirycznego spółczynnika k. A więc w praktyce równanie Bernoulli'ego ma wygląd następujący:

$$z_1 + p_1/\gamma + v_1^2/2g = z_2 + p_2/\gamma + v_2^2/2g + k\,v_2^2/2g$$

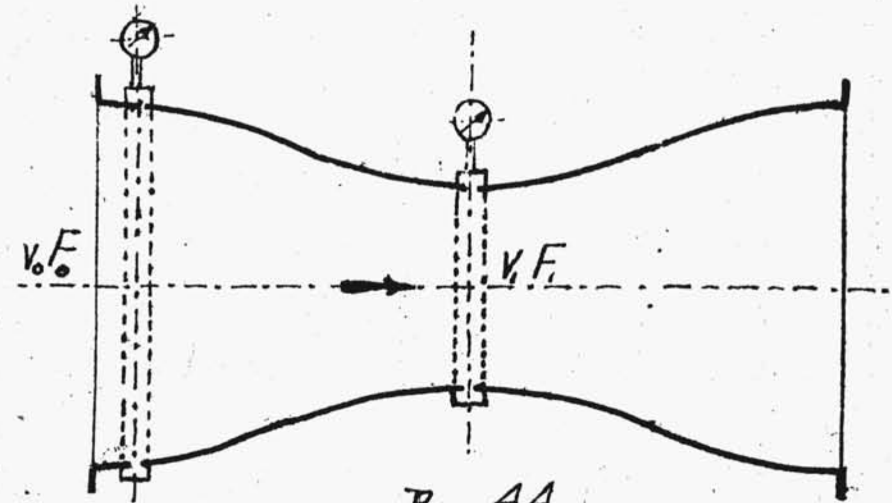
albo ze względu na $z_1 - z_2 = h$ jest:

$$h + p_1/\gamma + v_1^2/2g = p_2/\gamma + v_2^2/2g\,(1+k)$$

Ciśnienie, występujące w równaniu Bernoulli'ego, zwie się ciśnieniem hydrodynamicznem dla odróżnienia od ciśnienia hydrostatycznego, które od prędkości nie zależy. Ciśnienie hydrodynamiczne może być zmierzone za pomocą piezometru, jak wskazano na rys.43.

§ 21. Wodomiar Venturie'go.

Jako jedno z zastosowań prawa Bernoulli'ego rozpatrzymy wodomiar Venturi'ego /rys.44/.



Rys. 44.

Między kołnierze przewodów rurowych wstawiamy kawałek rury o zwężonym przekroju pośrodku. Zapomocą dwuch manometrów mierzymy ciśnienia p_0 i p_1 w przekrojach F_0 i F_1. W tym razie wzór się uprości, gdyż można założyć $h \cong 0$. Oprócz tego założymy, że ruch odbywa się bez oporów szkodliwych, t.j. $k \cong 0$ tak iż

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

Ale wydatek

$$Q = F_0 v_0 = F_1 v_1 \; ;$$

t.j.

$$v_0 = \frac{Q}{F_0} \; ; \quad v_1 = \frac{Q}{F_1} \; ;$$

Wobec tego

$$\frac{p_0}{\gamma} + \frac{Q^2}{2F_0^2 g} = \frac{p_1}{\gamma} + \frac{Q^2}{2F_1^2 g}$$

czyli

$$Q = \sqrt{\frac{2g(p_0 - p_1)}{\gamma\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)}} ;$$

Dla danego wodomiaru możemy raz na zawsze ustalić wartość

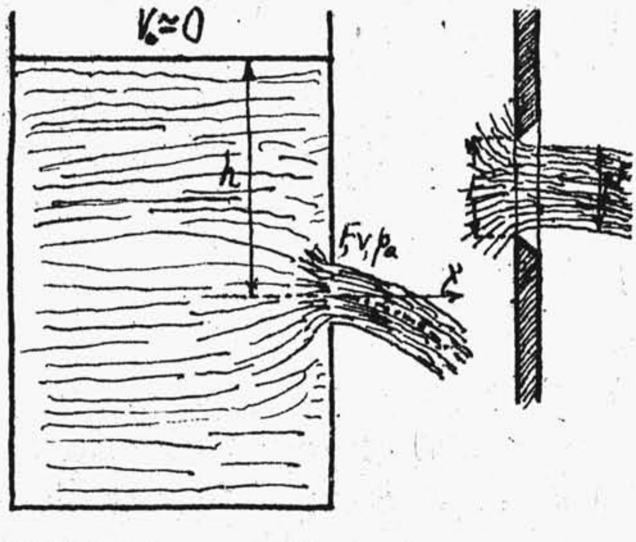
$$\mu = \sqrt{\frac{2g}{\gamma\left(\frac{1}{F_1^2} - \frac{1}{F_0^2}\right)}} ;$$

tak iż wówczas bezpośrednio

$$Q = \mu\sqrt{p_0 - p_1} ;$$

Wystarcza zatem zapomocą dwóch manometrów znaleźć wartość p_0 i p_1, aby otrzymać wartość wydatku. Często-kroć łączymy wodomiar Venturi'ego z samozapisującym mechanizmem zegarowym. Wówczas pole ograniczone otrzymaną krzywą i osią odciętych wyznacza w skali całkowitą ilość cieczy, która przepłynęła przez przewód od początku rachuby czasu.

§ 22. WYPŁYW CIECZY PRZEZ OTWÓR W ŚCIANIE NACZYNIA.



Rys. 45.

Zajmiemy się teraz teorją wypływów cieczy. Będziemy się w tym celu posługiwać równaniem Bernouilliego, stosując je do poszczególnych wypadków. Należy jed-