POLITECHNIKA WARSZAWSKA.

HYDRAULIKA

według wykładów

prof. C. WITOSZYŃSKIEGO

Rok 1921/22.

WARSZAWA

NAKŁADEM „KOMISJI WYDAWNICZEJ" TOW. BR. POM. STUD. POL. WARSZ.

Drukarnia i Litografja „Saturn", Marszałkowska 91. Tel. 20-44.

1921.

W s t ę p .

§ 1. Hydrauliką nazywamy ten dział mechaniki, który rozpatruje prawa, rządzące cieczami, wraz z zastosowaniami technicznemi zasad teorji. Ponieważ gazy wykazują znaczne podobieństwo do cieczy, więc wiele zagadnień z mechaniki gazów można włączyć do zakresu hydrauliki. Należy jednak zaznaczyć że naogół zasady mechaniki nie wystarczają przy rozpatrywaniu gazów; należy bowiem stale brać pod uwagę zasady energetyczne termodynamiki.

Potężna rola wody, nietylko w dziejach rozwoju cywilizacji, lecz wogóle dla świata organicznego , już od najdawniejszych czasów zmusiła ludzi do bliższego zapoznania się z jej własnościami. Pomijając znaczenie rzek i mórz, jako dróg komunikacji, zauważymy, że już w państwach starożytnego wschodu potrafiono budować ogromne sieci kanałów /Egipt/, posługiwano się stawidłami, kołami wodnemi, a nawet zapomocą przewodów obniżano i podnoszono sztucznie poziom naturalnych zbiorników wody. Jednakże ocalałe po dziś urządzenia rzymskie świadczą, że wiadomości z tej dziedziny wiedzy były podówczas bardzo szczupłe i dotyczyły głównie stanu równowagi cieczy. Zasady hydrostatyki podał już Archimedes /III wiek prz.nar.Chr./. Nie wprowadzając pojęcia ciśnienia hydrostatycznego, wyprowadził on znane prawa zanurzania się ciał w cieczach i ustalił warunki pływania. Pomijając tu i owdzie porozrzucane wzmianki, hydraulika przetrwała w tej postaci przez całe wieki średnie. Dopiero w XVI w. holender Stevin znalazł ciśnienie na ścianki naczynia i rozwiązał t.zw. "paradoks hydrostatyczny". Galileusz ze swoją teorją lewara i Pacal wykryciem równomiernego rozchodzenia się ciśnień w cieczach uzupełnili postulaty Archimedesa. Dalszy rozwój hydrauliki był przez cały wiek XVII ściśle związany z zagadnieniami astronomji. Huygens, Newton, Clairaut rozważali równowagę cieczy w związku z ruchem ziemi. W końcuXVII w. po raz pierwszy ukazał się szereg traktatów z hydrodynamiki. Castelli, Varignon, Pitot, a szczególnie Torricelli i D. Bernoulli ustalili tu szereg praw zasadniczych. Zasada d'Alemberta, dalszy rozwój matematyki i analizy matematycznej pozwoliły potraktować zagadnienie najzupełniej ogólnie. Za twórcę hydrodynamiki uchodzi Leonhard Euler /1707 - 1783/ który pierwszy ustalił trzy zasadnicze równania i zdefinjował szereg niezbyt jasnych pojęć w nauce o cieczach. Niezależnie od Euler'a, Lagrange wyprowadził te same prawa, rozwijając je matematycznie jeszcze szerzej. Odtąd dalszy rozwój hydrauliki opiera się na tym kamieniu węgielnym, jakim są prawa Euler'a - Lagrange'a i idzie głównie w dwu kierunkach. Część badaczy, jak Gerstner, Poisson, Cauchy, Rayleigh, Stokes, Helmholz, badali teorję ruchów falowych i wirów w cieczach, której strona doświadczalna została opracowana w kapitalnem dziele braci Weber. Inni uczeni natomiast zajmowali się raczej teoretycznem badaniem i uzasadnieniem molekularnych własności cieczy, a mianowicie lepkości, natężenia powierzchniowego i włoskowatości /Laplace, Neumann, van der Waals, Thomson, Reynolds, Lamb./ W badaniach tych praktyka szła poomacku częstokróć przed teorją. Jednakże rozbieżność ta powoli się zaciera, gdyż inżynierowie coraz ściślejszą znajomość zawierają z teorjami naukowemi, ubiegając się w szeregu prac o lepsze z zawodowymi badaczami. I dziś często wyniki teoretycznego rachunku nie zgadzają się z rezultatami praktyki. Jest to jednak koniecznością. Rozwiązując bowiem szereg równań o pochodnych cząstkowych, do których można sprowadzić każde zagadnienie hydrauliki, z góry czynimy szereg upraszczających założeń, aby móc te równania scałkować. Zależnie tedy, czy założenia te mniej lub bardziej odbiegają od warunków istotnych, otrzymane wyniki będą się zbliżały znacznie, lub tylko zgruba do rzeczywistości.

§ 2. Po tym pobieżnym rysie historycznym ustalimy szereg pojęć i określeń, któremi w przyszłości operować będziemy. Pod nazwą ciecz będziemy rozumieli ciało niesztywne, nie zachowujące kształtu, lecz zachowujące objętość. Innemi słowy ciecz przybiera kształt naczynia w tych miejscach, gdzie się styka z jego ściankami, zaś jej powierzchnia swobodna kształtuje się zależnie od rodzaju i rozmieszczenia sił działających. Podobnie jak w mechanice ogólnej, stwarzamy fikcję ciała sztywnego, tak w hydraulice rozpatrujemy ciecz doskonałą. Prócz zupełnej nieściśliwości, jakeśmy to poznali w jej definicji, zakładamy jeszcze, że nie może ona podlegać działaniu sił rozciągających i że nie jest lepka, t.j. cząsteczki jej dają się bez oporu przesuwać względem siebie, nie wykazując żadnej wytrzymałości na ścinanie. Ciecze rzeczywiste dość ściśle odpowiadają powyższym założeniom. Tak np. ustalono doświadczalnie, że dla wody naprężenie rozrywające wynosi

$$k_r = 3{,}7 \ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^2$$

zaś ścinające

$$k_t = 2{,}6 \ \mathrm{kg}/\mathrm{m}^2$$

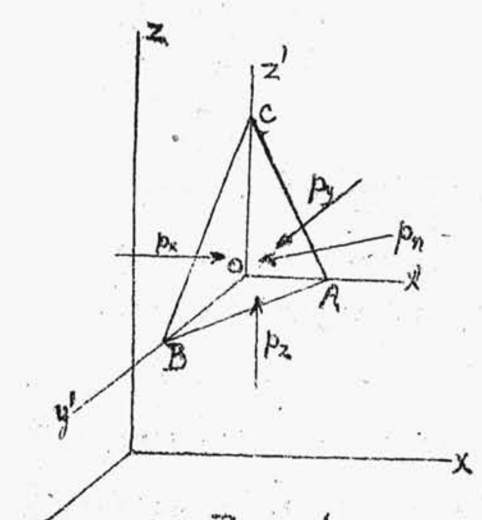
zaś spółczynnik ściśliwości stanowi tylko 0,00005 objętości pierwotnej przy wzroście ciśnienia o jedną atmosferę. Wiemy nadto, że i temperatura wpływa na objętość cieczy. Ponieważ jednak rozpatrujemy zwykle ciecze w warunkach normalnych, więc można śmiało pominąć nikłe wahania temperatury. Zauważymy nadto, że wogóle wszystkie te uproszczenia dają mniejsze odchylenia od wyników doświadczeń w hydrostatyce, niż w hydrodynamice. Poszczególne własności fizyczne będziemy wyrażali w układzie praktycznym miar. A więc ciężar właściwy oznaczamy przez γ i wyrażamy w kg/m^3 t.j. uważając go za wielkość mianowaną. Podobnie gęstość właściwą wyrażamy w jednostkach masy na jednostkę objętości i oznaczamy przez σ. Jest rzeczą oczywistą że $\sigma = \gamma/g$, gdzie g jest przyśpieszeniem ziemskiem; nadto wskutek nieściśliwości cieczy, zarówno γ jak i σ jest dla nich odpowiednio wielkościami stałemi.

Rozważania nasze przeprowadzać będziemy często w wypadku ogólnym dla zmiennych γ i σ. Wtedy wyniki będą miarodajne dla gazów lub dla cieczy ściśliwych. Zastanówmy się wreszcie nad jakością sił, występujących w cieczach. Ponieważ wszelkie zagadnienia hydrauliczne sprowadzamy do rozpatrywania elementów cieczy, więc i siły, działające w cieczach, musimy sprowadzać do tych elementów. Otóż rozróżniamy siły objętościowe, rozłożone na całą objętość cieczy w sposób ciągły i siły powierzchniowe, czyli ciśnienia, które działają normalnie do dowolnych powierzchni. Siły objętościowe wprowadzamy pod postacią sił jednostkowych, wyznaczając dla każdego elementu w cieczy siłę objętościową, którąby przypadła na jednostkę masy w tym punkcie, gdyby się proporcjonalnie zmieniała wraz z masą /objętością/. Chcąc tedy otrzymać siłę objętościową, działającą na dany element, musimy wartość siły jednostkowej w tym punkcie pomnożyć przez masę elementu $= \sigma dx\, dy\, dz$. A zatem siły objętościowe, działające na poszczególne elementy cieczy, są nieskończonostkami rzędu III. Ponieważ będziemy rozpatrywać nielepkie ciecze, więc siły powierzchniowe, działające na ścianki elementu mogą być do nich tylko prostopadłe. I tu wprowadzamy siły powierzchniowe jednostkowe, zwane ciśnieniami, określając je, jako te siły, któreby przypadły na jednostkę powierzchni, gdyby siły powierzchniowe wzrastały proporcjonalnie do powierzchni. Ciśnienia, działające na ściankę elementu cieczy, są nieskończonostkami II rzędu, bo chcąc je otrzymać, musimy wartość ciśnienia w danym punkcie pomnożyć przez wartość powierzchni elementu.

Siły objętościowe i ciśnienia są, ogólnie wziąwszy, funkcjami położenia.

HYDROSTATYKA.

§ 3. Opierając się na własności cieczy doskonałej, iż ciśnienie może być skierowane tylko normalnie do powierzchni elementu, dowiedziemy, że ciśnienie jednostkowe w danym punkcie jest we wszystkich kierunkach jednakowe, czyli nie zależy od kierunku, przechodzącego przez dany punkt elementu powierzchni. W tym celu przy dowolnym punkcie O /Rys 1/ budujemy w cieczy elementarny czworościan $OABC$ Niech ciśnienia, działające normalnie do ścian COB, AOC, AOB i ABC będą odpowiednio p_x, p_y, p_z i p_n. Na czworościan działa wprawdzie jeszcze, ogólnie wziąwszy, jakaś siła objętościowa. Ponieważ jest ona jednak nieskończonostką rzędu wyższego, niż siły powierzchniowe, więc przy ustalaniu warunków



Rys. 1.

równowagi można ją pominąć. Zauważmy jeszcze, że ciśnienia muszą być skierowane prostopadle wewnątrz elementu, gdyż ciecz jest nielepka i nie podlega rozciąganiu. Wiedząc, że siły powierzchniowe są odpowiednio

$p_x \cdot COB$, $p_y \cdot AOC$ i $p_z \cdot ABO$ oraz $p_n \cdot ABC$ wypiszemy równania rzutów w kierunkach 3-ch osi. Mianowicie:

$$p_x \cdot \overline{COB} = p_n \cdot \overline{ABC} \cdot \cos/N,x/$$
$$p_y \cdot \overline{AOC} = p_n \cdot \overline{ABC} \cdot \cos/N,y/$$
$$p_z \cdot \overline{AOB} = p_n \cdot \overline{ABC} \cdot \cos/N,z/$$

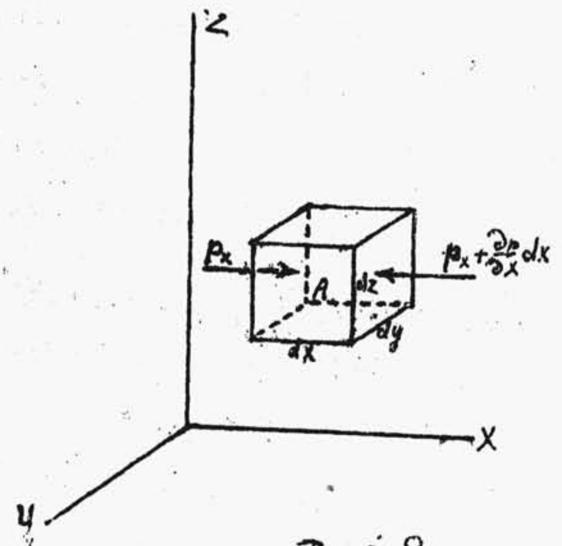
gdzie przez $/N,x/$, $/N,y/$, $/N,z/$ oznaczyliśmy kąty normalnej N z osiami. A ponieważ

$$\overline{COB} = \overline{ABC} \cdot \cos/N,x/$$
$$\overline{AOC} = \overline{ABC} \cdot \cos/N,y/$$
$$\overline{AOB} = \overline{ABC} \cdot \cos/N,z/$$

więc $$p_N = p_x = p_y = p_z = p \; ; \qquad \text{c.n.d.}$$

§ 4. Równania i warunki równowagi cieczy.

Ustalmy równania równowagi cieczy doskonałej. W tym celu wyodrębnijmy w cieczy nieskończenie mały prostopadłościan o bokach odpowiednio równych dx , dy , dz /Rys.2/, równoległych do osi x,y,z . Niech będzie punkt A wierzchołkiem



Rys. 2.

prostopadłościanu najbliższym początku spółrzędnych. Znajduje się on pod działaniem sił objętościowych zewnętrznych i sił powierzchniowych. Rozłóżmy siłę jednostkową objętościową, odpowiadającą temu elementowi na składowe X, Y, Z nadto na ściany $dy \cdot dz$, $dz \cdot dx$, $dx \cdot dy$, przechodzące przez p. A działa w kierunkach osi x, y, z ciśnienie jednostkowe p, natomiast na ściany przeciwległe w tychże kierunkach działają odpowiednio ciśnienia

$$p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\,,\quad p+\frac{\partial p}{\partial y}dy\,,\quad p+\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

Wobec tego biorąc sumę rzutów sił działających na oś x, znajdziemy:

$$X\sigma\,dx\,dy\,dz+p\,dz\,dy-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dz\,dy=0$$

czyli po uproszczeniu i odrzuceniu nieskończenie małych wyższego rzędu $X=1/\sigma\,\frac{\partial p}{\partial x}$;

analogicznie dla pozostałych osi otrzymamy:

$$\mathcal{Y} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y}; \qquad \mathcal{Z} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$

a więc wzrost ciśnienia w kierunku dowolnej osi jest proporcjonalny do rzutu sił objętościowych jednostkowych na tę oś. Zależność ta jest najzupełniej ogólna, bośmy nie czynili żadnych zastrzeżeń co do obioru osi współrzędnych. Mnożąc powyższe równania odpowiednio przez dx, dy i dz i dodając stronami, znajdziemy iż:

$$\mathcal{X}\,dx + \mathcal{Y}\,dy + \mathcal{Z}\,dz = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = \frac{1}{\sigma}dp \qquad (1)$$

Ponieważ zaś prawa strona powyższej równości jest różniczką zupełną, gdyż σ przyjmujemy za wielkość stałą, więc i lewa strona musi posiadać tę samą własność, t.j.

$$\mathcal{X}\,dx + \mathcal{Y}\,dy + \mathcal{Z}\,dz = d\mathcal{U}$$

Wobec tego:

$$\mathcal{X} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}; \qquad \mathcal{Y} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}; \qquad \mathcal{Z} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z};$$

Funkcję $\mathcal{U}$, posiadającą tę własność, że w każdym punkcie przestrzeni jej pochodne cząstkowe wzdłuż osi współrzędnych są odpowiednio równe rzutom sił objętościowych jednostkowych na te osie, nazywamy jak w mechanice ogólnej, potencjałem sił. Równanie / 1 / przybierze tedy następującą postać:

$$d\mathcal{U} = \frac{1}{\sigma}\,dp\,;$$

czyli po scałkowaniu

$$\mathcal{U} = p/\sigma + C_1 ;$$

albo

$$p = \sigma \mathcal{U} + C_2 ;$$

Wobec tego, warunki równowagi cieczy doskonałej możemy wyrazić i w ten sposób, mówiąc, że po pierwsze: siły objętościowe winny mieć potencjał. Po drugie: pomiędzy potencjałem sił i ciśnieniem istnieć musi zależność linjowa. Równowaga cieczy nie jest możliwa, jeżeli te dwa warunki nie są spełnione. Z powyższego widzimy, że dla $p = const$ również i $\mathcal{U} = const.$ t.j. powierzchnie ekwipotencjalne są dla cieczy zarazem powierzchniami równego ciśnienia. Powierzchnia swobodna będzie również powierzchnią ekwipotencjalną i powierzchnią stałego ciśnienia. Zauważmy jeszcze, że równość

$$\mathcal{U} = const.$$

pociąga za sobą równość

$$d\mathcal{U} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 1/\sigma\, dp = 0$$

A więc przy przesunięciu elementarnem na powierzchni ekwipotencjalnej $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$

t.j. praca sił objętościowych jednostkowych jest zerem czyli siły te są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej. Do tego samego wniosku dojdziemy, pamiętając, że składowa siły w danym kierunku jest pochodną potencjału w tym kierunku czyli stosunkiem nieskończenie małego przyrostu potencjału do nieskończenie małego przesunięcia w kierunku rozważanym. Przy przesunięciu po powierzchni ekwipotencjalnej przyrost potencjału jest zero, przeto składowa siły w tym kierunku nie istnieje. Rozważmy szereg nieskończenie bliskich powierzchni ekwipotencjalnych. Do każdej z nich poprowadźmy normalną zewnętrzną w punkcie przecięcia tej powierzchni z normalną do powierzchni poprzedniej. Z utworzonych tym sposobem wieloboków otrzymamy w granicy linje sił, które tworzą trajektorje ortogonalne powierzchni ekwipotencjonalnych. Kierunki sił są kierunkami stycznych do powyższych linji sił.

Jeżeli P jest siłą, przypadającą na jednostkę masy w danym punkcie cieczy, to Cos kąta między siłą P i osią X będzie X/P, albo też dx/ds, gdzie ds jest różniczką łuku linji siły przechodzącej przez punkt rozważany. Stąd równanie różniczkowe linji sił będzie

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}\left(= \frac{ds}{P}\right);$$

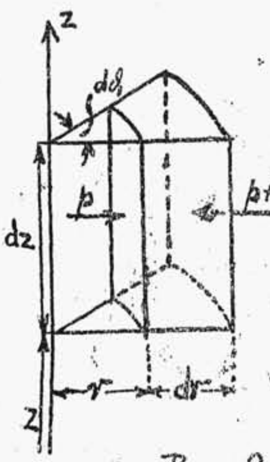
Dwie powierzchnie ekwipotencjonalne nie mogą się przeciąć, bo w punkcie przecięcia potencjał wykazałby skok. A że ogólnie składową siły jednostkowej w dowolnym kierunku równa się potencjałowi w tym kierunku, t.j.

więc wówczas $\frac{\partial U}{\partial n} = N$;

$$\partial U \neq 0; \quad \partial n = 0; \quad N = \infty;$$

Jest rzeczą oczywistą, że powyższe warunki równowagi się nie zmienią, o ile będziemy mieli do czynienia nie z jednorodną cieczą lecz z mieszaniną 2 lub więcej nie mieszających się ze sobą cieczy /np. olej i woda/ lub cieczy i gazów. Należy wówczas tylko uwzględnić zmianę wartości σ dla każdej cieczy. Łatwo wykazać, że w tych warunkach powierzchnie odgraniczające są zarazem powierzchniami ekwipotencjalnemi. Istotnie; jak wiadomo, $\frac{\partial p}{\partial U} = \sigma$; gdybyśmy przeto wzięli 2 nieskończenie bliskie powierzchnie ekwipotencjalne, to dla nich dp i dU, a więc σ muszą być wielkościami stałemi. A więc żadna powierzchnia ekwipotencjalna nie może przebić powierzchni odgraniczającej, czyli ta ostatnia jest również powierzchnią ekwipotencjonalną.

Rozpatrując równania równowagi, stwierdziliśmy, że wzrost ciśnienia w pewnym kierunku jest proporcjonalny do składowej siły objętościowej jednostkowej w tym samym kierunku. Nadmieniliśmy również, że twierdzenie to nie zależy od obioru osi. Wykażemy to jeszcze na przykładzie współrzędnych cylindrycznych /Rys.3/: r, ϑ, z. Rozkładamy siłę objętościową, od-



Rys. 3.

powiadającą elementowi o objętości $r \cdot d\vartheta \cdot dr \cdot dz$ na składowe P_r, P_ϑ, P_z, idące odpowiednio w kierunku promienia wodzącego, prostopadle doń w kierunku rosnącego kąta, i w kierunku osi. Nadto mamy tu dwa ciśnienia p i $(p+\frac{\partial p}{\partial \vartheta}d\vartheta)$ w ściankach bocznych oraz ciśnienia p i $(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr)$ w ściankach czołowych. Wówczas, biorąc rzut sił w kierunku promienia r, znajdziemy, iż

$$P_r \sigma r\, d\vartheta\, dr\, dz + p\, r\, d\vartheta\, dz - \left(p+\frac{\partial p}{\partial r}dr\right)(r+dr)\, d\vartheta\, dz + \cancel{2\, p\, dr\, dz \frac{d\vartheta}{2}} = 0$$

czyli $P_r = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial r}$; Analogicznie znajdziemy iż

$$P_z = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$

Wreszcie: $P_\vartheta \sigma r\, d\vartheta\, dr\, dz + p\, dr\, dz - \left(p+\frac{\partial p}{\partial \vartheta}d\vartheta\right) dr\, dz = 0$

czyli $P_\vartheta = \frac{1}{\sigma r}\frac{\partial p}{\partial \vartheta}$ co można było zresztą wywnioskować a priori.

$r \cdot p\, dr\, dz \frac{\partial\vartheta}{2} + \left(p + \frac{\partial p}{\partial\vartheta} d\vartheta\right) dr\, dz \frac{\partial\vartheta}{2}$