$$W = -\frac{p_0 - p_1}{\varsigma\mu L}\frac{r^2}{2} + B = 0;$$

gdyż w razie istnienia prędkości różnej od zera przy ściankach rury otrzymalibyśmy nieskończenie wielki opór tarcia. Wobec tego ogólna wartość szybkości jest

$$W = \frac{p_0 - p_1}{4\varsigma\mu L}\left(r_0^2 - r_1^2\right) = \frac{\gamma i}{4\varsigma\mu}\left(r_0^2 - r_1^2\right);$$

gdzie wprowadziliśmy wielkość

$$i = \frac{p_0 - p_1}{L\gamma};$$

W ten sposób otrzymaliśmy rezultat identyczny z otrzymanym w § 38 przy rozważaniu ruchu Poiseuille'a. Łatwo ponadto okazać, że otrzymany ruch jest wirowym o szybkości kątowej

$$\omega_\vartheta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\gamma i r}{2\varsigma\mu};$$

A więc mamy tu do czynienia z wirami kołowymi zamkniętymi, których szybkość wirowania rośnie proporcjonalnie do wartości promienia.

## ZAGADNIENIA ZE STATYKI CIECZY.

1. Mamy układ sił symetryczny względem osi

$$P_r = -kr;$$

Znaleźć i zbadać kształt powierzchni ekwipotencjalnych oraz kształt linji sił.

2. Prasa hydrauliczna ma służyć do wywierania nacisku sto ton. Skok tłoka pod tym naciskiem wynosi 500 m/m. Czas trwania jednej operacji 1 minuta. Obliczyć średnicę cylindra prasy, oraz średnicę i skok pompy o trzech tłokach pojedyńczo działających przy ciśnieniu roboczem 350 atm., wysokości pierścieni uszczelniających, wynoszącej około 1/5 średnicy oraz stosunku skoku do średnicy tłoka pompy nieco większym od dwuch, przy spółczynniku tarcia 0,25.

Obliczyć moc potrzebną do napędu pompy, kładąc $\eta = 0,5$

3. Składowe siły działającej na jednostkę masy w układzie płaskim są:

$$X = 3k(x^2 - y^2); \qquad Y = -6kxy;$$

Zbadać kształt linji potencjalnych oraz linji sił. /Zastosować spółrzędne biegunowe na płaszczyźnie/.

4. Składowe siły działającej na jednostkę masy cieczy w układzie płaskim są

$$P_r = kr^{n-1} \sin n\vartheta; \quad P_\vartheta = kr^{n-1} \cos n\vartheta;$$

gdzie $k$ jest wielkością stałą. Zbadać kształt linji potencjalnych oraz linji sił.

5. W naczyniu kształtu prostego cylindrowego o osi pio

nowej, średnicy 150 mm. znajduje się 1/2 litra wody oraz 1/2 litra oliwy. Jak wysokie ma być to naczynie, aby ciecz się nie wylała, kiedy naczynie obracać się będzie z prędkością 100 obrotów na minutę około swej osi. Określić ściśle przestrzeń zajmowaną przez wodę i przez oliwę podczas tego obrotu, wiedząc, iż ciężar właściwy oliwy jest mniejszy od ciężaru właściwego wody.

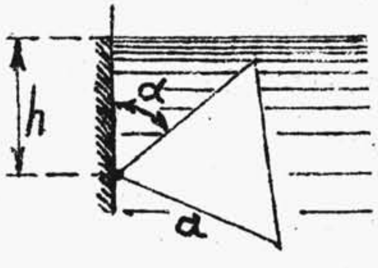
6. Naczynie kształtu prostego cylindra kołowego o średnicy 200 mm. i wysokości 200 mm. ustawione jest tak, iż oś jego tworzy z poziomem kąt $\pi/4$; naczynie to zaopatrzone jest w szczelne dna i napełnione wodą pod ciśnieniem 10 kg/cm$^2$. Zbadać rozkład ciśnienia podczas obrotu naczynia około jego osi z prędkości 200 obr. na minutę, obliczyć największe ciśnienie oraz wskazać punkt, gdzie ono występuje.

7. Naczynie stanowiące połowę prostego cylindra kołowego średnicy 500 mm. posiada oś poziomą i stanowi koryto napełnione wodą. Jaka część wody zostanie w korycie, jeżeli naczynie obracać się będzie z prędkością 150 obrotów na minutę około swej osi poziomej.

8. Naczynie kształtu prostego cylindra kołowego o osi

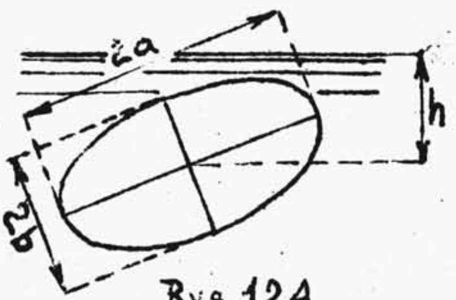
pionowej średnicy 200 mm. ma w dnie otwór okrągły 100 mm. średnicy, którego środek leży na osi. Naczynie to obraca się z prędkością 200 obrotów na minutę około swej osi. Określić objętość cieczy, którą może zawierać naczynie podczas obrotu, jako też wysokość, do której ciecz sięgać będzie.

9. Długi pręt o przekroju trójkąta równobocznego, prostopadły do płaszczyzny rysunku zanurzony jest w cieczy, jak wykazuje rys. 123 i może się obracać koło krawędzi $A$. Określić moment wywierany przez ciecz na jednostkę długości pręta względem osi $A$. Ciężar właściwy cieczy jest $\gamma$.



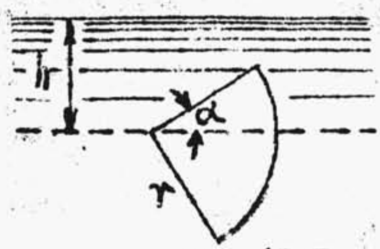
Rys. 123.

10. Wyznaczyć położenie środka parcia cieczy ciężkiej na pole elipsy, stanowiącej część pionowej ściany płaskiej. Położenie elipsy wskazano na rys. 124. Określić wielkość parcia.



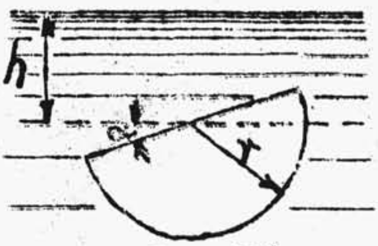
Rys. 124.

11. Obliczyć parcie oraz wyznaczyć położenie środka parcia cieczy ciężkiej na pole ćwierci koła, które stanowi część pionowej ściany płaskiej, według położenia na rys.125.



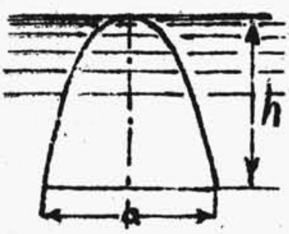

Rys.125.

12. To samo zadanie rozwiązać dla półkola /rys.126./



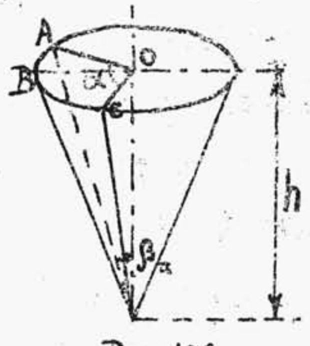

Rys.126.

13. Obliczyć parcie i znaleźć jego środek na część pionowej ściany płaskiej, ograniczoną przez parabolę i linję prostą poziomą podług rys.127.



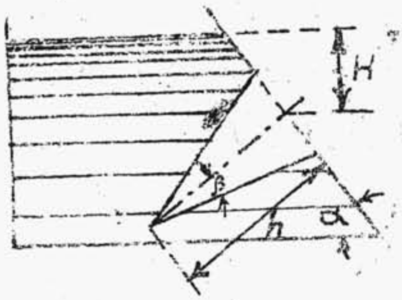

Rys.127

14. W naczyniu kształtu prostego stożka kołowego o osi pionowej, obróconej wierzchołkiem na dół, wstawiono dwie szczelne przegrody płaskie, przechodzące przez oś podług rys.128. Część OABC wypełniono cieczą aż do




Rys. 128.

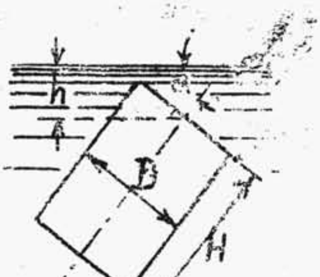
wierzchu. Zbadać parcie cieczy na ściany płaskie oraz na ścianę krzywą tej części.




Rys. 129.

15. Zbadać parcie cieczy na prosty stożek kołowy o osi prostopadłej do pochyłej ściany płaskiej, umieszczony symetrycznie względem płaszczyzny rysunku /rys.129/.

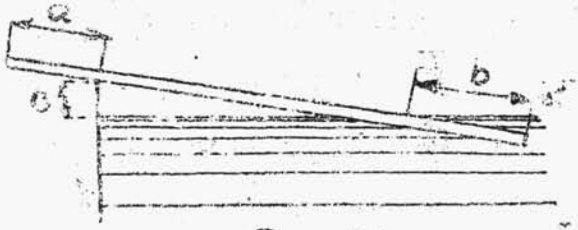
16. Zbadać parcie cieczy na boczną powierzchnię prostego cylindra kołowego, umieszczonego symetrycznie względem płaszczyzny rysunku /rys.130/.




Rys. 130.

17. Naczynie o ścianach płaskich pionowych napełnione wodą posiada ścianę prostokątną o szerokości 50 cm., która na wysokości 100 cm. styka się z wodą. Ciężar wody zawartej w naczyniu wynosi 250 kg. Do naczynia wrzucamy ciało stałe ważące [illegible] kg., pływające po powierzchni wody. Obliczyć parcie [illegible] na podaną ścianę przed i po wrzuceniu ciała

18. Cienką deska pływa jednym końcem, drugim zaś opiera się o kant ściany podług rysunku /rys.131/.



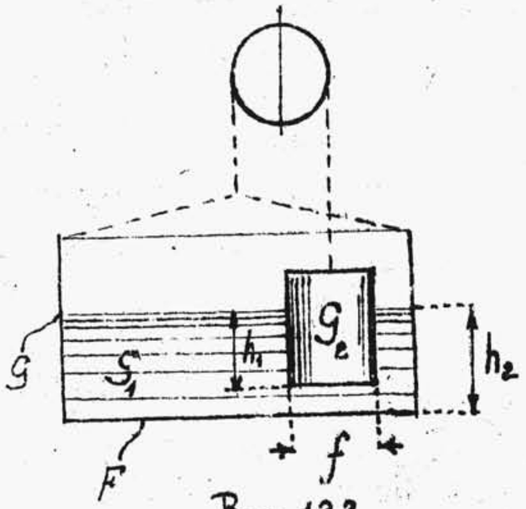
Rys. 131.

Określić $a$ i $b$ przy których istnieje równowaga. Kąt tarcia na miejscu $A$ jest $\varrho$. Daka długość deski $l$. Przekrój prostopadły do osi $f$. Ciężar właściwy deski $\gamma_1$, cieczy $\gamma$.

19. W półkulistem naczyniu o średnicy 100 cm. znajduje się 100 litrów wody. Jaki ma być ciężar kuli o średnicy 75 cm., pływającej w tem naczyniu, jeżeli ma ona pływać koncentrycznie do ścian naczynia.

20. Tarcza okrągła, której ciężar wynosi $G$ kg., opiera się na 3 pływających kulach o promieniach $r_1, r_2, r_3$. Ciężar właściwy materjału kul jest $\gamma_1$. Punkty oparcia płyty leżą w wierzchołkach trójkąta równobocznego, którego środek leży w środku płyty. W którem miejscu tarczy ma przypadać punkt zaczepienia dodatkowego obciążenia tarczy $P$, aby tarcza pozostawała poziomą. Jaka będzie wtedy odległość tarczy od powierzchni cieczy.

Na jednym końcu sznura, przerzuconego przez krążek, wisi naczynie cylindryczne o przekroju $F$, którego ciężar jest $G$, napełnione częściowo cieczą ważącą $G_1$ o ciężarze właściwym $\gamma$. Na drugim końcu wisi cylinder pełny o przekroju $f$ i wadze $G_2$.



Rys. 132.

Określić $h_1$ i $h_2$ w położeniu równowagi, zaniedbując tarcie /rys.132/.

22. Człowiek może udźwignąć na powietrzu kulę żelazną o średnicy 360 mm. Jakiej średnicy kulę człowiek udźwignie w wodzie. Cięż.wł.żelaza 7,8 kg/dcm$^3$.

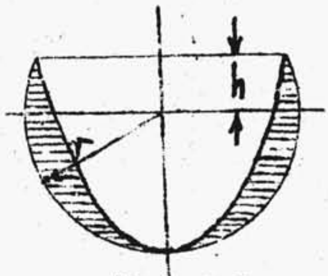
23. Zbadać warunki trwałości równowagi pływania długiego pręta o przekroju trójkąta równobocznego, zanurzonego wierzchołkiem na dół lub wierzchołkiem do góry.

24. Zbadać warunki trwałości równowagi pływania elipsoidy o połowach osi $a>b>c$, przy których każda z osi może być pionową.

25. Zbadać warunki trwałości równowagi pływania długiego pręta o przekroju eliptycznym wielką i małą osią pionową.

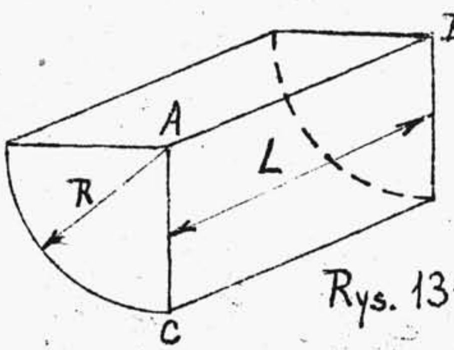
26. Wyprowadzić warunki równowagi cieczy, używając spółrzędnych biegunowych w przestrzeni.

27. Naczynie kuliste o promieniu $r$ obraca się jednostajnie około osi pionowej. Wyznaczyć prędkość oraz objętość cieczy, jeżeli ta ostatnia zajmuje położenie wskazane na rysunku /rys.133/.



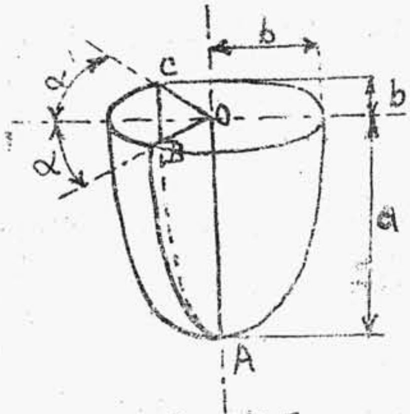

Rys. 133.

28. Obliczyć parcie cieczy na ściankę otwartego naczynia, stanowiącego 1/4 część prostego cylindra kołowego o osi poziomej AB. Krawędź AC jest pionowa. Znaleźć położenie wypadkowej /rys.134/.




Rys. 134

29. W naczyniu kształtu połowy elipsoidy obrotowej o osi pionowej wprawiono dwie szczelne płaskie ściany, przechodzące przez oś - rys.135. Naczynie AOBC wypełniono cieczą aż do wierzchu. Obliczyć wypadkową parcia ci-




Rys. 135.

czy aż do wierzchu. Obliczyć wypadkową parcia cieczy na ścianę krzywą ABC. Określić położenie wypadkowej.

30. Rozwiązać zadanie poprzednie biorąc półkulę zamiast połowy elipsoidy obrotowej.

## ZAGADNIENIA O RUCHU CIECZY.

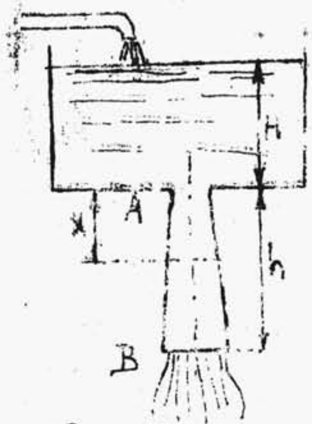
31. Ciecz wypływa z dużego naczynia przez otwór w płaskim dnia. Otwór posiada przekrój $f$ m$^2$ oraz ostre brzegi.


Rys. 136-

Do tegoż naczynia dopływa ciecz przez przewód $A$ /rys. 136/ Wydatek dopływu jest $Q$ m$^3$/sek. Określić stałą wysokość $H$ poziomu cieczy po nad poziomem otworu.

32. Zbadać zmianę poziomu cieczy w naczyniu w funkcji czasu, jeżeli w poprzednim zadaniu zmienimy raptownie wydatek $Q$ na $Q_1 \lessgtr Q$.

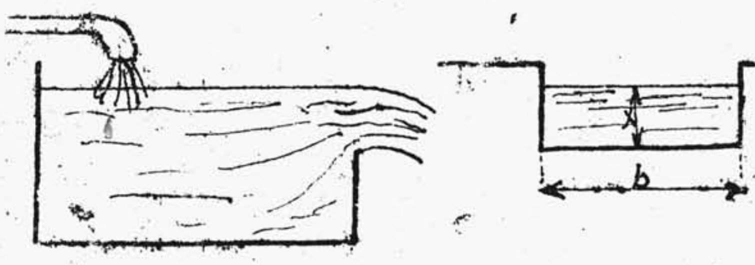
33. Z dużego naczynia /rys.137/ ciecz wypływa przez krótki rozszerzający się przewód pionowy AB. Wyznaczyć najmniejszy przekrój w miejscu A, przy którym przewód będzie jeszcze całkowicie wypełniony cieczą. Przekrój przewodu w miejscu B jest $f$. Ciecz doskonała. Brzegi w A zaokrąglone. Wysokość $h$ stała.



Rys. 137.

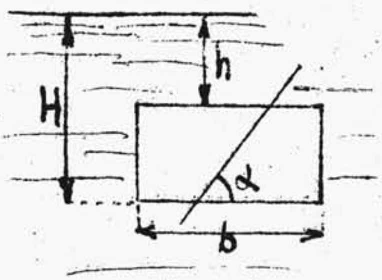
34. Wyznaczyć w poprzednim zadaniu najmniejszą dopuszczalną wartość przekroju odległego o $X$ od dna naczynia.

35. Z naczynia znacznych wymiarów wypływa ciecz przez przelew o ścianie pionowej rys.138. Równocześnie istnieje stały dopływ o wydatku Q. Zbadać zmianę wysokości $X$ w funkcji czasu, poczynając od zadanej wartości początkowej $X_0$.



Rys. 138.

36. Ciecz wypływa przez duży otwór prostokątny o podstawie poziomej wykonany w ściance zbiornika. Zanurzenie górnej krawędzi otworu pod powierzchnią cieczy jest $h$ /rys. 139/ dolnej $H$. Znaleźć położenie prostej pochylonej pod kątem $\alpha$, dzielącej otwór na dwie części o równych wydatkach.




Rys. 139.

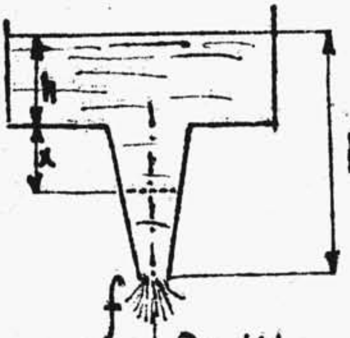
37. Naczynie wypełnione cieczą posiada kształt elipsoidy o połowach osi $a, b, c$. Jedna z osi jest pionowa. Na dolnym końcu osi pionowej znajduje się otwór, przez który ciecz wypływa, o przekroju $f$ zaś na końcu górnym jest mały otworek dla dostępu powietrza. Obliczyć czas opróżnienia górnej połowy elipsoidy oraz całej elipsoidy. Porównać trzy możliwe wypadki.

38. Zbadać dalszy przebieg wypływu takiego, jak w zadaniu poprzednim od chwili, w której, przy pewnym określonym poziomie cieczy w naczyniu, zamkniemy górny otwór. Zakładamy, iż powietrze zawarte w naczyniu rozpręża się [illegible] adiabatycznie.

Rys. 140.

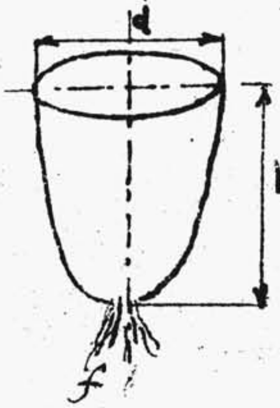
39. Wyznaczyć wydatek przelewu o trójkątnym przekroju strumienia podług rys.140.

40. Wyznaczyć kształt krótkiego przewodu, przez który ciecz wypływa ze zbiornika rys.141, t.zn. iżby ciśnienie było funkcją linjową odległości $x$. Przekrój przewodu u wylotu jest $f$. Ciecz doskonała.



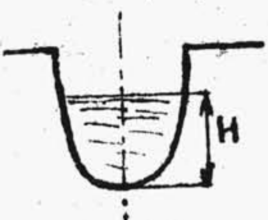
Rys. 141.

41. Wyznaczyć czas opróżnienia parabolicznego naczynia otwartego obrotowego o osi pionowej /rys.142/



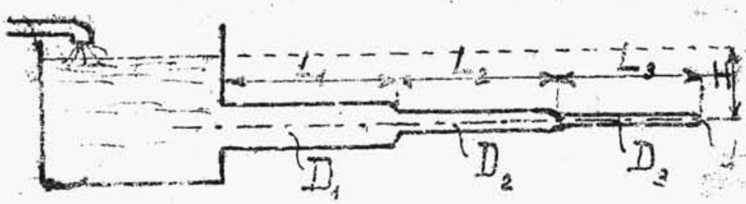
Rys. 142.

42. Wyznaczyć wydatek w zależności od $H$ przelewu o parabolicznym przekroju strumienia /rys.143/ Oś paraboli jest pionowa, parametr $p$.



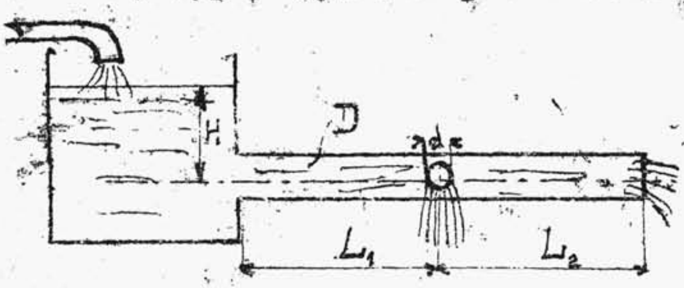
Rys. 143.

43. Wyznaczyć wydatek długiego przewodu podług rys.144 z uwzględnieniem tarcia. Wysokość $H$ jest stała. Zbiornik duży.



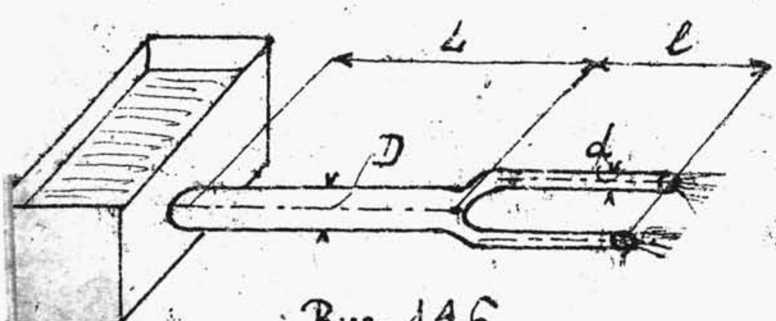
Rys. 144.

44. Ustawić równania, potrzebne do określenia wydatków, wypływających przez koniec poziomego długiego przewodu oraz przez otwór boczny /rys. 145/ z uwzględnieniem tarcia. Wysokość $H$ jest stała. Zbiornik duży.



Rys. 145.

45. Z dużego zbiornika wychodzi rozwidlony przewód o ramionach jednakowej średnicy $d$ i jednakowej długości $\ell$. Wysokość poziomu cieczy w zbiorniku ponad otworami przewodu jest $H$. Wysokość ta jest stała.

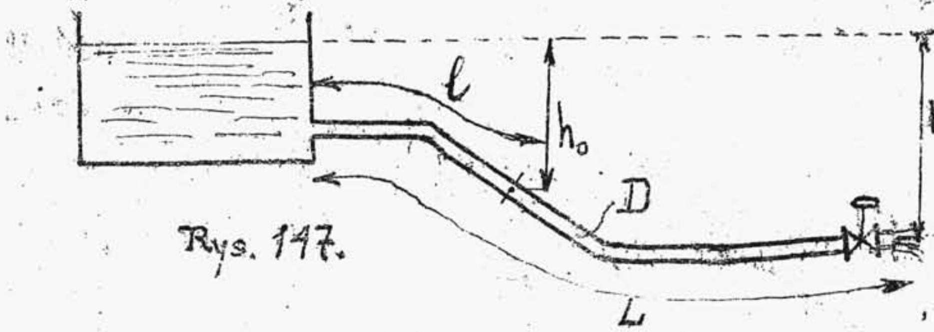


Rys. 146.

Obliczyć wydatek z uwzględnieniem tarcia/rys.146/

46. Obliczyć ciśnienie panujące podczas wypływu w dowolnem miejscu przewodów $D$ i $d$ poprzedniego zadania w założeniu, że przewody te są poziome.

47. Przewód, wychodzący z dużego zbiornika o stałym poziomie cieczy, zaopatrzony jest na końcu w kurek, pozwalający regulować wydatek rys.147. Jaki ma być ten wydatek, aby w miejscu A panowało w przewodzie przy uwzględnieniu tarcia ciśnienie zgóry obrane.



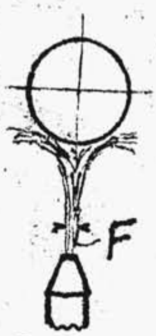
Rys. 147.

48. Ostra przegroda/rys.148/dzieli swobodny strumień cieczy na dwie połowy, które ulegają odchyleniu podług rysunku. Przekrój strumienia jest $F$, jego prędkość $V$. Prędkość powierzchni, w którą strumień uderza jest

Rys. 148.

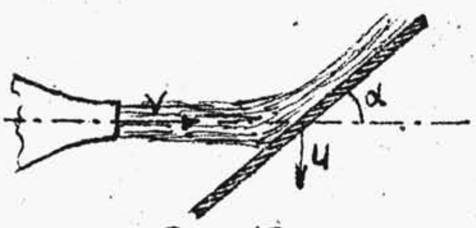
c. Zbadać działanie strumienia na powierzchnię.

49. Jaka ma być prędkość strumienia pionowego o przekroju $F$ jeżeli strumień ten ma utrzymywać w zawieszeniu kulę ważącą $G$. Założymy, iż przy uderzeniu strumień traci całkowicie swą prędkość /rys.149/.




Rys. 149

50. Swobodny strumień cieczy działa na płaszczyznę /rys. 150/ która porusza się z prędkością $u$ prostopadle do kierunku strumienia. Wyznaczyć działanie strumienia, jeżeli prędkość jego jest $V$ a przekrój $F$.




Rys. 150.

51. Sprawdzić, czy funkcje

$$A(x^3-3xy^2)\,; \qquad A(x^3y-xy^3);$$

gdzie $A$ jest wielkością stałą, mogą być potencjałami prędkości przy płaskim niewirowym ruchu cieczy. Wyznaczyć odpowiednie potencjały prądu oraz zbadać kształt linji prądu.

52. Zbadać kształt linji potencjalnych prędkości i linje prądu przy płaskim ruchu niewirowym cieczy, jeżeli funkcja od zmiennej zespolonej, określająca potencjał prędkości oraz potencjał prądu ma postać: $A/z$ gdzie $A$ jest stałą.

53. Dowieść, że jeżeli funkcja od zmiennej zespolonej, która określa potencjały $\phi$ i $\psi$ w ruchu niewirowym płaskim cieczy ma postać $A(z+a^2/z)$, gdzie $A$ jest stałą, to pomiędzy linjami prądu jest koło o promieniu $a$.

54. Zbadać przy użyciu współrzędnych biegunowych ruch płaski i niewirowy cieczy, określony przez funkcję od zmiennej zespolonej postaci $A\sqrt{z/a}$, gdzie $A$ i $a$ są stałe.

55. Dowieść, iż funkcja

$$A\left[r^2 - \frac{a^3 r^2}{(r^2+z^2)^{3/2}}\right]$$

gdzie $A$ i $a$ są stałe, zaś $r, z$ współrzędne cylindryczne, może być potencjałem prądu w ruchu niewirowym cieczy symetrycznym względem osi $z$. Znaleźć najprostszą, odpowiadającą temu ruchowi zamkniętą powierzchnię prądu.