noważny zastąpieniu $\gamma_1$ przez $\gamma - \gamma_1$, tak iż

$$\frac{\gamma - \gamma_1}{\gamma} > \frac{9}{32}$$

czyli

$$\gamma_1/\gamma < \frac{23}{32} \simeq 0,72;$$

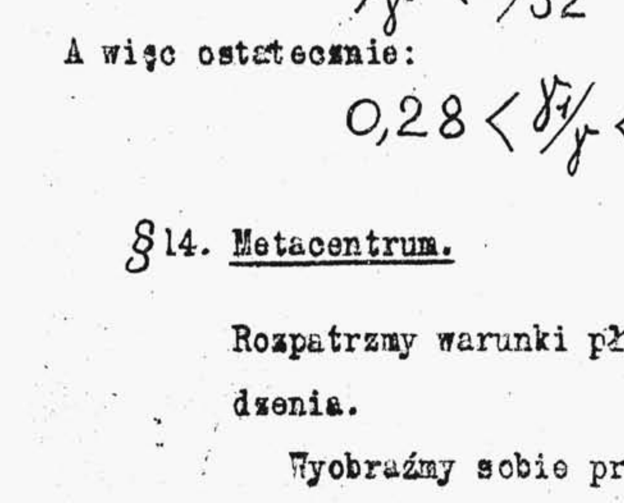
A więc ostatecznie:

$$0,28 < \gamma_1/\gamma < 0,72;$$

## §14. Metacentrum.

Rozpatrzmy warunki pływania z innego punktu widzenia.

Wyobraźmy sobie przeto, że płaszczyzna pływania $X$ po odchyleniu ciała o $\measuredangle\ \alpha$ przybrała położenie $X'$ /rys.26/. Nie będziemy brali pod uwagę klinów, lecz wyobrazimy sobie, iż całkowite działanie wyporowe cieczy na ciało sprowadzi się wówczas do wypadkowej $W$, przyłożonej w środku masy $A$, zanurzonej części ciała. Jeśli




Rys. 26.

uwzględnimy jeszcze ciężar $G$ ciała, to moment pary sił $W$ i $G = W$ względem osi obrotu, będzie się starał sprowadzić ciało do pierwotnego położenia. Moment ten, równy

$W\overline{SC} = Wm\,\mathrm{Sin}\,\alpha$, wyliczyliśmy w poprzednim paragrafie. Równy jest on bowiem momentowi $-v\gamma\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha$ sił $G$ i $W$ /por.rys.24/, zwiększonemu o sumę

$$M_1 + M_2 = \gamma\,\mathrm{Cos}^2\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,J_y$$

sił $P_1$ i $P_2$ względem osi obrotu. Wobec tego

$$Wm\,\mathrm{Sin}\,\alpha = -v\gamma\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha + \gamma\,\mathrm{Cos}^2\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,J_y;$$

Ale wypór $W = v\gamma$, gdzie przez $v$ oznaczyliśmy objętość wypartej cieczy. Stąd powyższa równość może być przepisana w następującej postaci:

$$mv\gamma\,\mathrm{Sin}\,\alpha = -v\gamma\delta\,\mathrm{Sin}\,\alpha + \gamma\,\mathrm{Cos}^2\alpha\,\mathrm{Sin}\,\alpha\,J_y;$$

czyli

$$m = \mathrm{Cos}^2\alpha\,{}^{J_y}/_{v} - \delta\;;$$

W przypadku niewielkich wahań można założyć $\mathrm{Cos}^2\alpha \cong 1$; Jeśli weźmiemy jeszcze pod uwagę tę oś obrotu, która odpowiada najmniejszej wartości $J_o$ momentu $J_y$, to wówczas

$$m = {}^{J_o}/_{v} - \delta\;;$$

Wykazaliśmy jednak już poprzednio, że w przypadku stałości równowagi musi być $\delta < {}^{J_o}/_{v}$. Wobec tego ${}^{J_o}/_{v} - \delta > 0$; czyli $m > 0$; równowaga będzie tem stalsza, im większa jest różnica ${}^{J_o}/_{v} - \delta$, a więc im większe będzie $m$. Punkt $B$, leżący na pierwotnej osi pływania w odległości

$m$ od środka masy $S$, i znajdujący się na kresie wyporu $W$ nazywamy "metacentrum". Powyższy warunek stałości równowagi da się tedy inaczej sformułować. Mianowicie: w przypadku równowagi stałej musi być metacentrum ponad środkiem masy i to tem dalej, im stalsza jest równowaga. Stąd odległość metacentrum od środka jest miarą stałości równowagi pływającego ciała. Łatwo pojąć, jak ważną rolę gra wyznaczenie położenia tego punktu przy budowie okrętów. Ponieważ kadłub statku ma swoisty kształt, nadto należy tu uwzględnić jeszcze zmienność obciążenia, wyznaczamy metacentrum lub jego miejsce geometryczne za pomocą statyki wykreślnej. Zastanówmy się jeszcze, jaki będzie dalszy ruch ciała pływającego, wychylonego z położenia równowagi i pozostawionego samemu sobie. Otóż w cieczy doskonałej, pozbawionej lepkości, mielibyśmy tylko ruch obrotowy koło środka ciężkości, gdyż siły działające $W$ i $G$ są równe co do wielkości i przeciwne co do znaku. Stąd moment

$$W m \sin\alpha = -v\gamma\delta\sin\alpha + \gamma\cos^2\alpha\sin\alpha\, J_y = -J_s\frac{d^2x}{dt^2}$$

gdzie przez $J_s$ oznaczyliśmy moment bezwładności ciała względem osi obrotu, przechodzącej przez środek masy. Dla małych wychyleń jest

$$\sin\alpha \simeq \alpha; \quad \cos^2\alpha \simeq 1;$$

skąd

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{-\gamma(J_y - v\delta)}{J_s}\alpha = -k^2\alpha;$$

gdzie przez $k^2$ oznaczyliśmy wartość

$$\gamma/_{J_s}(J_y - v\delta);$$

Widzimy tedy z kształtu równania, że otrzymany ruch będzie harmonicznym o okresie wahań

$$T = 2\pi/_k = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma/_{J_s}(J_y - v\delta)}}$$

Wreszcie równanie ruchu będzie kształtu

$$\alpha = A \sin k(t + C);$$

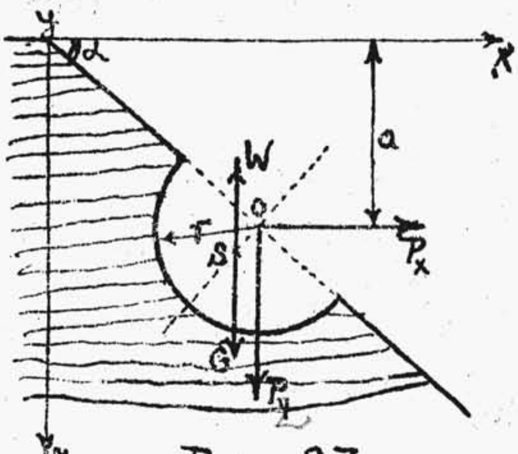
albo

$$\alpha = A \sin kt;$$

o ile założymy, że na początku rachuby czasu było $\alpha = 0$. Powyższe wywody są czystą teorją, gdyż, jak wiemy, ruch harmoniczny ciała, pływającego po cieczy rzeczywistej, bardzo szybko ulega przytłumieniu. Przyczyną tego jest nieuwzględniona przez nas lepkość cieczy. Zauważmy wreszcie, że można wywołać ruch harmoniczny i w kierunku pionowym, przykładając doń siłę w kierunku osi pływania.

§15. Wiemy, że ogólnie wziąwszy, parcia elementarne cieczy są wektorami swobodnymi, które nie zawsze dają się zsumować. W szczególnych przypadkach jest to jednak możliwe, np. w przypadku ścian i denek płaskich. Istnieje jednak poza tem szereg wypadków, w których prosta uwaga pozwala wyznaczać parcie wypadkowe. Szereg przykładów wyjaśni to bliżej.

Zadanie. Znaleźć parcie cieczy na półkulistą część ścianki oraz moment tego parcia względem poziomej osi $y$ /prostopadłej do płaszczyzny w rys.27/. Wszystkie parcia elementarne, jako prostopadłe do półkulistej ścianki, muszą przejść przez środek półkuli, to samo tyczy się tedy i wypadkowego parcia całkowitego $P$. Znając tedy punkt przyczepienia tego parcia, postaramy się wyznaczyć jego składowe w kierunkach osi spółrzędnych. Składowa $P_y$ dzięki doskonałej symetrji kuli musi być równa zeru. Chcąc znaleźć składową $P_z$, wyobraźmy sobie, że powyższa półkula stanowi część wyodrębnionej myślowo cieczy. Równowaga nie uległaby wówczas naruszeniu. Zauważmy jednak, że ciężar $G = \frac{2}{3}\pi r^3 \gamma$ tej półkuli z cieczy jest równoważony wyporem; wypór zaś sprowadza się do różnicy parć cieczy na powierzchnię półkuli i słupa cieczy ponad płaskiem kołem wielkiem półkuli, t.j. wypór $W$ jest równy szukanej składowej $(-P_z)$, zmniejszonej o




Rys. 27.

$$\pi r^2 a \gamma \cos\alpha;$$

Stąd

$$G = \frac{2}{3}\pi r^3 \gamma = W = -P_z - \pi r^2 a \gamma \cos\alpha;$$

czyli

$$-P_z = \tfrac{2}{3}\pi r^3\gamma + \pi r^2 a\gamma \cos\alpha;$$

Warunki równowagi fikcyjnej półkuli cieczy pozwalają nam również wyznaczyć składową $P_x$ parcia całkowitego. Ponieważ bowiem półkula jest w równowadze, więc składowa pozioma parcia $P_x$ musi być równoważona składową poziomą parcia cieczy na płaskie koło wielkie, t.j.

$$P_x = \pi r^2 \sin\alpha \, a\gamma$$

Mając zaś składowe $P_x$ i $P_z$ łatwo obliczymy moment parcia wypadkowego względem osi $y$, gdyż

$$M_y = P_z a \operatorname{ctg}\alpha - P_x a$$

ze względu na to, iż p. $O$ jest punktem przyczepienia parcia $P$.

<u>Zadanie.</u> Znaleźć parcie cieczy na ścianę w kształcie prostego stożka kołowego. I tu rozkładamy parcie wypadkowe $P$ w kierunkach osi spółrzędnych. Stosując teorję parcia na ściany krzywe widzimy, iż $P_y = 0$ zaś

$$P_x = \pi r^2 \sin\alpha \, \gamma a$$

Ale znalezienie $P_z$ można uskutecznić bezpośrednio. Mianowicie parcia cząstkowe na każdy element $dF$ powierzchni stożka tworzą ten sam kąt $(90^\circ - \beta)$ z osią stożka. Stąd parcie elementarne $dP = dF\gamma z$ daje w kierunku osi stożka składową

$$dP_1 = dF\gamma z \sin\beta$$

Całkując powyższe wyrażenie wzdłuż całej powierzchni stożka, znajdziemy

$$P_1 = \int dF \gamma z \sin\beta = \gamma \sin\beta \int z\, dF;$$

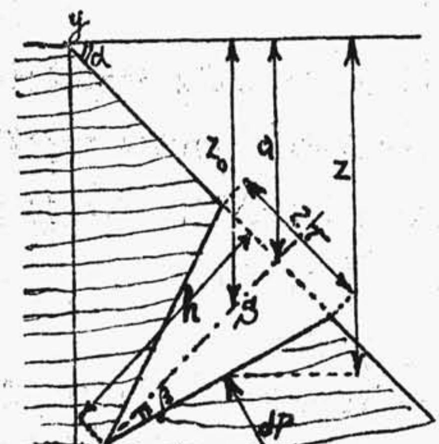
Ale wyrażenie $\int z\, dF$ przedstawia moment statyczny powierzchni stożka względem płaszczyzny $xy$. Wobec tego

$$\int z\, dF = F z_0 = \pi r \frac{r}{\sin\beta} z_0;$$

gdzie przez $z_0$ oznaczyliśmy spółrzędną $z$ środka masy $S$ powierzchni bocznej stożka, który, jak wiadomo, leży na $^1/_3$ wysokości, licząc od podstawy. Wobec tego

$$P_1 = \gamma \sin\beta \cdot \pi r^2 \frac{z_0}{\sin\beta} = \pi r^2 z_0 \gamma;$$

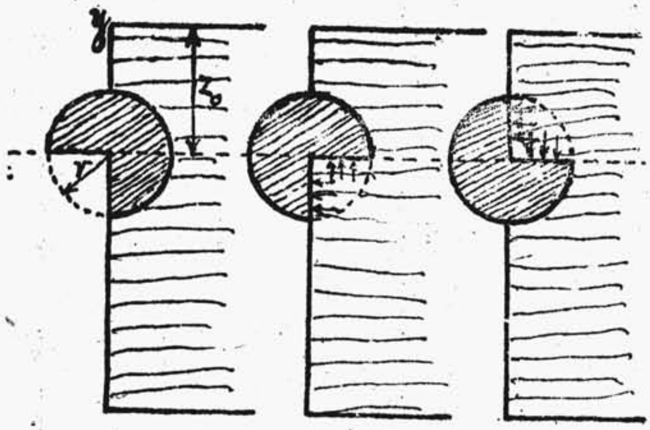
Mając zaś składową $P_x$ parcia oraz składową $P_1$ wzdłuż osi stożka, możemy już znaleźć $P_z$.



Rys. 28.

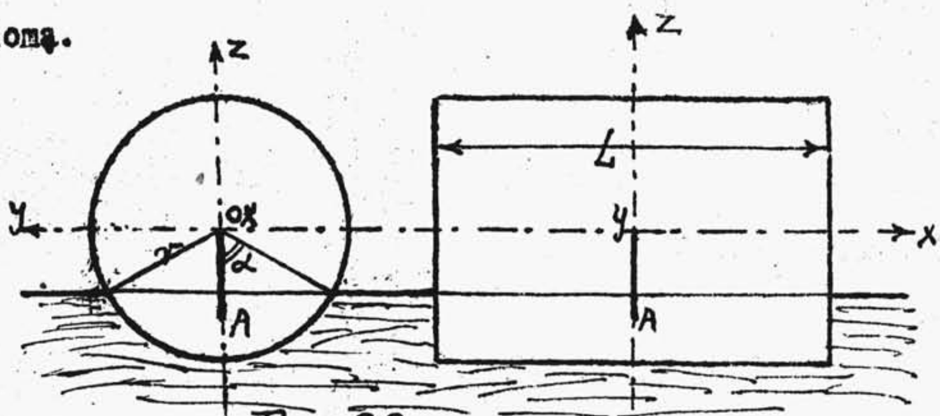
Zadanie. Określić warunki równowagi cylindrycznego kurka w trzech położeniach /rys.29/.

Zauważmy odrazu, że składowe poziome parcia $P_x$ są we wszystkich przypadkach jednakowe i równe $2rLz_0\gamma$ gdzie przez $L$ oznaczamy długość kurka. Podobnie składowe $P_y$ są we wszystkich trzech przypadkach zerem. Natomiast składowa $P_z$, która w danym razie będzie równa wyporowi części zanurzonej kurka, wynosi w pierwszym przypadku 2 razy więcej, niż w pozostałych. Zauważmy wreszcie, że o ile w pierwszem położeniu kurka parcia cieczy nie dają momentu względem względem jego osi, o tyle w dwu pozostałych ma to miejsce, przyczem moment w położeniu środkowem jest większy.




Rys. 29.

Zadanie. Rozpatrzyć równowagę walca pływającego po powierzchni cieczy w położeniu, przy którem oś jego jest poziomą.




Rys. 30.

Łatwo zauważyć, iż dzięki symetrji walca równowaga tej bryły koło osi poziomej $X$ jest obojętna /rys.30/. Zajmiemy się przeto przedewszystkiem równowagą walca około osi $y$. Z rysunku widać, że odległość środka masy $O$ bryły od punktu przyczepienia $A$ wyporu jest

$$\delta = \frac{2}{3}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}^3\alpha}{\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha};$$

gdyż temu się równa odległość środka masy odcinka kołowego od środka koła. Z drugiej strony stałość równowagi wymaga, aby $\delta < J_y/V$ gdzie

$$J_y = \frac{L^3 \cdot 2r\,\mathrm{Sin}\,\alpha}{12} = \frac{2}{12} L^3\,\mathrm{Sin}\,\alpha \cdot r;$$

zaś

$$V = (r^2\alpha - r^2\mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha)L = r^2L\,(\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha);$$

Stąd

$$\delta = \frac{2}{3}\,\frac{r\,\mathrm{Sin}^3\alpha}{\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha} < \frac{2L^3\,\mathrm{Sin}\,\alpha\, r}{12\,r^2(\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha)L};$$

czyli

$$\mathrm{Sin}^2\alpha < \frac{L^2}{4r^2};$$

skąd

$$\mathrm{Sin}\,\alpha < \frac{L}{2r}; \quad /1/$$

Zauważmy jednak, że wypór cieczy równoważy ciężar ciała, t.j.

$$r^2(\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha)L\gamma = \pi r^2 L\,\gamma_1;$$

skąd

$$\gamma_1/\gamma = 1/\pi\,(\alpha - \mathrm{Sin}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha) \quad /2/$$

Rozpatrzmy przypadek graniczny, gdy $\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{L}{2r}$. Wówczas

$$\alpha = \mathrm{arc\,Sin}\,L/2r\,; \quad \mathrm{Cos}\,\alpha = \sqrt{1 - L^2/4r^2}\,;$$

czyli

$$\gamma_1/\gamma = 1/\pi\left(\mathrm{arc\,Sin}\,L/2r - L/2r\sqrt{1 - L^2/4r^2}\right);$$

Taką więc wartość musi posiadać stosunek ciężarów właściwych w przypadku granicznym. Gdy $\sin\alpha < \frac{L}{2r}$, to i $\gamma_1/\gamma$ musi być mniejsze, bo funkcja

$$(\alpha - \sin\alpha \cos\alpha) = \tfrac{1}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$$

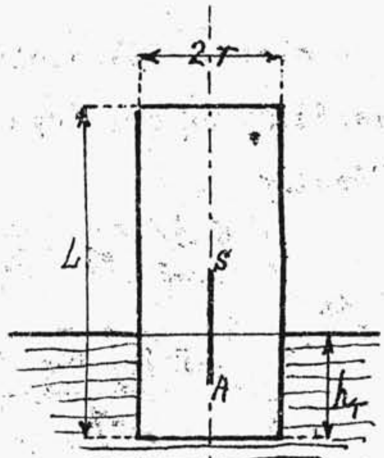
rośnie wraz z $\alpha$. Rozpatrzymy wreszcie przypadek równowagi cylindra, umieszczonego osią pionowo w cieczy /rys. 31/.

Jeśli cylinder zagłębia się na $h_1$ w cieczy, to na zasadzie prawa Archimedesa jest:

$$\pi r^2 h_1 \gamma = \pi r^2 L \gamma_1 ; \qquad \text{t.j. } h_1 = \gamma_1/\gamma \, L ;$$

Z drugiej strony ma być $\delta < J_0/v$, gdzie $J_0 = \pi r^4/4$ zaś $v = \pi r^2 h_1$. Wobec tego

$$\delta = L/2 - h_1/2 < \frac{\pi r^4}{4\pi r^2 h_1};$$




Rys. 31

czyli

$$r^2 > 2Lh_1 - 2h_1^2 ;$$

Uwzględniając wartość $h_1$ możemy przepisać powyższą nierówność w następującej postaci:

$$r^2 > 2L^2 \gamma_1/\gamma - 2(\gamma_1/\gamma)^2 L^2 ;$$

skąd

$$(\gamma_1/\gamma)^2 - \gamma_1/\gamma + \frac{r^2}{2L^2} > 0$$

A więc wartość stosunku $\gamma_1/\gamma$ musi się znajdować poza obrębem wartości pierwiastków powyższego trójmianu, t.j.

$$0 < \frac{\gamma_1}{\gamma} < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{r^2}{2L^2}}\ ;$$

albo

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{r^2}{2L^2}} < \frac{\gamma_1}{\gamma} < 1\ ;$$

Oczywiście warunki pływania wymagają, aby

$$0 < \frac{\gamma_1}{\gamma} < 1\ ;$$

Gdy

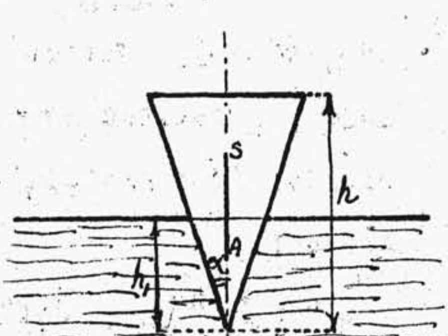
$$\frac{1}{4} - \frac{r^2}{2L^2} \leqslant 0$$

to $\gamma_1/\gamma$ może przybierać wszystkie wartości w obrębie $0 \div 1$.

<u>Zadanie.</u> Rozpatrzeć warunki równowagi stożka, pływającego osią pionowo.

Stosownie do nastręczających tu się 2 wypadków, rozpatrzymy je po kolei.

Załóżmy więc przedewszystkiem, że wierzchołek stożka jest zwrócony na dół /rys.32/.




Rys. 32.

Wówczas

$$\delta = \frac{3}{4}(h - h_1)$$

A że

$$J_0 = \frac{\pi h_1^4 \,\mathrm{Tng}^4\alpha}{4}$$

zaś

$$v = \frac{1}{3}\pi h_1^3 \,\mathrm{Tng}^2\alpha\ ;$$

więc

$$\delta = \frac{3}{4}(h - h_1) < \frac{3}{4}\,\frac{\pi h_1^4 \,\mathrm{Tng}^4\alpha}{\pi h_1^3 \,\mathrm{Tng}^2\alpha}$$

czyli

$$h < \frac{h_1}{\cos^2\alpha};$$

Ale na zasadzie prawa Archimedesa musi być

$$\frac{1}{3}\pi h_1^2 \operatorname{Tng}^2\alpha\, h_1 \gamma = \frac{1}{3}\pi h^2 \operatorname{Tng}^2\alpha\, h \gamma_1$$

t.j.

$$h_1 = \sqrt[3]{\gamma_1/\gamma};$$

Wobec tego

$$h < \frac{h}{\cos^2\alpha}\sqrt[3]{\gamma_1/\gamma};$$

skąd

$$\gamma_1/\gamma > \cos^6\alpha;$$

Wyobraźmy sobie teraz stożek wierzchołkiem do góry /rys. 33/, to

$$SA = \delta = AB - SB; \quad SB = 3/4\, h$$

$AB$ określimy biorąc momenty względem wierzchołka $B$

$$SB\,\frac{\pi R^2 h}{3} = 3/4\, h_1\,\frac{\pi r^2 h_1}{3} + AB\,\frac{\pi(R^2+r^2+Rr)}{3}(h-h_1);$$

$$AB = 3/4\,\frac{h^4-h_1^4}{h^3-h_1^3};$$

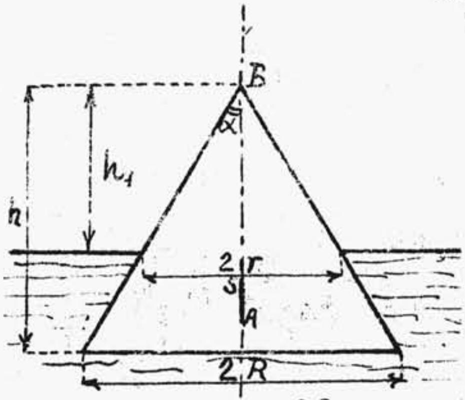
$$\delta = 3/4\,\frac{h_1^3(h-h_1)}{h^3-h_1^3}; \quad J_0 = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi \operatorname{Tng}^4\alpha\cdot h_1^4}{4};$$

$$v = \pi/3\,(R^2 h - r^2 h_1) = \pi/3\,\operatorname{Tng}^2\alpha\,(h^3-h_1^3);$$

Warunek $\delta < J_0/v$ wyrazi się

$$3/4\,\frac{h_1^3(h-h_1)}{h^3-h_1^3} < 3/4\,\frac{\pi\operatorname{Tng}^4\alpha\, h_1^4}{\pi\operatorname{Tng}^2\alpha\,(h^3-h_1^3)};$$

$$h-h_1 < h_1\operatorname{Tng}^2\alpha; \quad h < h_1/\cos^2\alpha;$$



Rys. 33.

Na zasadzie prawa Archimedesa mamy:

$$\frac{\pi}{3}\,\mathrm{tg}^2\alpha\,(h^3-h_1^3)\gamma=\frac{\pi}{3}\,\mathrm{tg}^2\alpha\cdot h^3\gamma_1;\quad h_1=h\sqrt[3]{1-\frac{\gamma_1}{\gamma}};$$

$$\cos^2\alpha<\sqrt[3]{1-\frac{\gamma_1}{\gamma}};\quad \frac{\gamma_1}{\gamma}<1-\cos^3\alpha;$$

<u>Zadanie.</u> Znaleźć wysokość zanurzenia $h_1$ cylindra w cieczy, gdy mamy połączenie, jak na rys. 34, przyczem waga naczynia jest $G_2$, cieczy - $G$, cylindra - $G_1$, zaś przekroje naczynia i cylindra są odpowiednio $F$ i $f$. Znajdziemy naprężenia w obu częściach sznura, przerzuconego przez blok, bez uwzględnienia ciężaru sznura. Otóż z prawej strony mamy sumę sił $G_1-W$, gdzie przez $W$ oznaczamy wypór. Z lewej zaś działa układ sił $G+G_2+W$. Skoro zachodzi równowaga, to

$$G_1-W=G+G_2+W;$$

czyli

$$2W=G_1-G-G_2 \qquad /1/.$$

Z drugiej strony wypór

$$W=fh_1\gamma; \qquad /2/$$

zaś ciężar cieczy

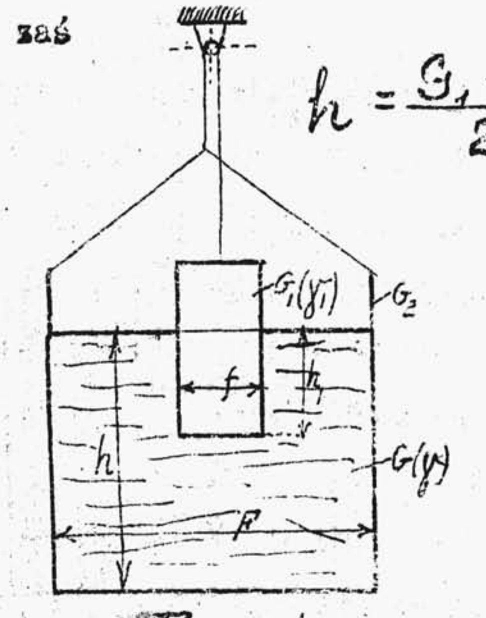
$$G=(Fh-fh_1)\gamma; \qquad /3/$$

Z równań /1/, /2/ i /3/ wynika, że

$$h_1=\frac{G_1-G-G_2}{2f\gamma};$$

zaś

$$h = \frac{G_1 + G - G_2}{2F\gamma};$$




Rys. 34

**Zadanie.** Rozpatrzeć warunki prawidłowego działania pływaka /rys.35/. Prawidłowo działający pływak normuje automatycznie poziom wody w naczyniu, gdyż po przekroczeniu pewnego poziomu $h$ wypór $W$ wody podnosi pływak i woda się wylewa przez otwór $f$ wentyla. W owem granicznem położeniu jest wypór

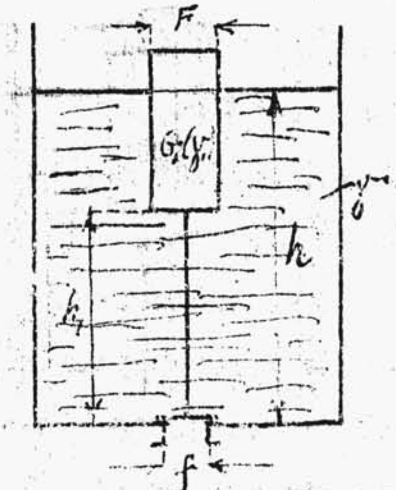
$$W = (h - h_1)F\gamma \quad /1/.$$

Ponadto siły, działające na pływak, dają następujący warunek równowagi

$$W = G_1 + fh\gamma \quad /2/$$

Z równań /1/ i /2/ wnioskujemy bezpośrednio, że

$$h = \frac{G_1 + h_1 F\gamma}{(F-f)\gamma};$$




Rys. 35

Równość ta pozwala nam teoretycznie normować wartości $G_1, F, f, h_1$ dla danej z góry wartości $h$ albo też nawzajem, mając $G_1, F, f, h$ obliczać wartość $h$.