t.j. szybkości odkształcenia w tych kierunkach $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$. Innemi słowy prostopadłościan o krawędziach skierowanych równolegle do kierunku osi głównych elementu, nie zmienia kątów, t.j. pozostaje nadal prostopadłościanem. Reasumując powyższe wyniki, możemy powiedzieć, że z punktu widzenia cynematyki wyodrębniliśmy w cieczy doskonałej następujące ruchy: 1/ ruch poszczególnych elementów, jako całości, oraz 2/ ruch cieczy wewnątrz elementu, który z kolei sprowadza się do: a/ ruchu odkształcenia /3 wyrazy pierwsze/ oraz b/ ruchu obrotowego /2 wyrazy końcowe/.

§33. Twierdzenie o zachowaniu ruchu wirowego w cieczy.

Rozczłonkowawszy w ten sposób ruch cieczy na elementy, zastanowimy się bliżej nad ruchem wirowym. Zwróćmy się tedy do równań Euler'a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$

Załóżmy, że siły zewnętrzne posiadają potencjał, t.j. istnieje taka funkcja spółrzędnych $U(xyz)$, iż

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

Wówczas przekształcając równanie pierwsze Euler'a, znajdziemy, iż

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) - v\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + w\left(-\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

Podstawiając oznaczenia poprzednich paragrafów i zauważywszy, iż

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2 + v^2 + w^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial (V^2)}{\partial x};$$

gdzie V oznacza całkowitą szybkość elementu, mamy

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial (V^2)}{\partial x} - 2\omega_z v + 2\omega_y w = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad /1/$$

Analogicznie przekształcimy 2 pozostałe równania:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial (V^2)}{\partial y} - 2\omega_x w + 2\omega_z u = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad /2/$$

oraz

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial (V^2)}{\partial z} - 2\omega_y u + 2\omega_x v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \quad /3/$$

Weźmy pochodną cząstkową równania /1/ względem y i odejmijmy odeń pochodną cząstkową równania /2/ względem x, to

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega_z v + 2\omega_y w\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} - 2\omega_x w + 2\omega_z u\right) = 0;$$

o ile tylko $\sigma = f(p)$. Wykonywując działania, znajdziemy, iż

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + 2v\,\frac{\partial \omega_z}{\partial y} + 2u\,\frac{\partial \omega_z}{\partial x} -$$

$$-2w\left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_x}{\partial x}\right) - 2\omega_x\frac{\partial w}{\partial x} - 2\omega_y\frac{\partial w}{\partial y} + 2\omega_z\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

Uczyńmy teraz drugie założenie, że ciecz jest nieściśliwa, t.j. σ = const. Wówczas

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z};$$

Uwzględniając dawne oznaczenia oraz te równości, możemy przekształcić ostatnie równanie jak następuje:

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \omega_x\frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial w}{\partial z}; \qquad /I/$$

gdy:

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{d\omega_z}{dt};$$

Analogicznie otrzymamy dwa dalsze równania:

$$\frac{d\omega_x}{dt} = \omega_x\frac{\partial u}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial u}{\partial z}; \qquad /II/$$

oraz

$$\frac{d\omega_y}{dt} = \omega_x\frac{\partial v}{\partial x} + \omega_y\frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z\frac{\partial v}{\partial z}; \qquad /III/$$

Otrzymaliśmy w ten sposób wyrażenie na pochodne pełne składowych szybkości kątowej ω, będące funkcjami linjowemi tych składowych. Wobec tego ruch wirowy cieczy nie może znikać lub powstawać samoczynnie. Jeśli go nie było danej chwili, to i w następnej się nie ukaże. Gdy zaś ruch ten zachodzi, to nie może w pewnej chwili zniknąć. Ruch wirowy stanowi tedy istotną cechę wszelkiego ruchu cieczy, tkwiąc jakby w jej cząstkach, nie zaś w otaczającej przestrzeni, gdyż tym tylko da się wytłómaczyć istota fizyczna powyższego prawa zachowania ruchu wirowego.

§ 40. Ruch niewirowy.

Ponieważ dla zastosowań praktycznych większe znaczenie ma ruch niewirowy, zwrócimy się więc przedewszystkiem do jego rozpatrzenia. Z założenia wynika bezpośrednio, iż

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Na zasadzie powyższych równości możemy stwierdzić, że wyrażenie $udx + vdy + wdz$ jest pełną różniczką jakiejś funkcji spółrzędnych $\phi(xyz)$, przyczem $\frac{\partial \phi}{\partial x} = u$; $\frac{\partial \phi}{\partial y} = v$; $\frac{\partial \phi}{\partial z} = w$. Przez analogję do mechaniki możemy nazwać funkcję ϕ potencjałem szybkości, podkreślając tę jej własność, że wzięta w dowolnym kierunku pochodna funkcji φ daje wartość szybkości elementu rozpatrywanego w tym samym kierunku. Widać stąd ponadto, że w kierunku niewirowym szybkości posiadają zawsze potencjał tak, iż w wypadku nieściśliwej cieczy

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \qquad /1/$$

t.j. potencjał musi czynić zadość równaniu Laplace'a. Ustaliwszy powyższe własności ruchu niewirowego, napiszemy jego ogólne równania, upraszczając w tym celu odpowiednio wyrażenia Euler'a. Uwzględniając, iż $\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$ ——————— otrzymamy po wprowadzeniu potencjału szybkości, że

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}\right)+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+w\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Ale

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u^2+v^2+w^2\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(V^2\right)$$

gdzie przez V oznaczamy szybkość całkowitą elementu. Ponadto

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=0;$$

zaś

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y};\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z};$$

o ile siły mają potencjał. Ostatecznie tedy otrzymamy następujące równanie:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(V^2\right) = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

analogicznie znajdziemy pozostałe dwa równania:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(V^2\right) = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

oraz

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(V^2\right) = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Wszystkie te trzy równania są sformułowaniem tej samej zależności między parametrami cieczy tak, iż całka pierwszego względem x, drugiego względem y i trzeciego względem z da to samo równanie:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} = U - \frac{p}{\rho} + F(t) \qquad /2/$$

gdzie przez $F(t)$ oznaczyliśmy pewną nieoznaczoną funkcję czasu. Równania /1/ i /2/ dają nam ogólne rozwiązanie zagadnienia w wypadku, gdy ciecz jest nieściśliwa, o ile tylko po scałkowaniu uwzględnimy pierwotne warunki. Jeśliby ruch miał być jeszcze trwały, to $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, skąd równanie /2/ przybierze postać:

$$\frac{V^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = Const. \qquad /3/$$

znaną już jako równanie Bernouille'go. Tutaj jednak równanie jest słuszne dla wszystkich punktów cieczy, tam zaś stosowało się do strugi elementarnej. Ponadto stała C mogła być różna w wypadku równania Bernoulli'ego dla poszczególnych strug, tu zaś nie zmienia się w całym rozpatrywanym obszarze. Nawiązując do powyższych równań uczynimy ważną uwagę, słuszną we wszystkich przypadkach rozwiązywania analitycznego zagadnień ruchu cieczy. Mianowicie nie każda funkcja, czyniąca zadość równaniom, odpowiada również fizycznym warunkom zagadnienia. Pomijając już tedy zgóry rozwiązania urojone, widzimy z równania /3/, iż np. szybkość przepływu nie może być zadana, bo inaczej ciśnienie przybierze wartość zerową lub ujemną, co przeczy naszym założeniom o właściwościach doskonałej cieczy. A więc nie każde rozwiązanie analityczne równań daje się realizować praktycznie.

Okażemy tu jeszcze jedną własność ruchu niewirowego. Rozpatrzymy tedy przypadek uderzenia w cieczach, gdy powstają ciśnienia chwilowe. Przypuśćmy tedy, że na element cieczy o ściance df działa w pewnym kierunku ciśnienie chwilowe, wytwarzające w tym kierunku impuls $G=\int_0^{\tau} p\,dt\,df$. Wówczas, stosując zasadę ilości ruchu i pamiętając, iż w tym wypadku działanie sił ciągłych można pominąć, zauważymy, iż przy tym, ...

dowych szybkości będą:

$$u_1 - u_0 = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial G}{\partial x}; \quad v_1 - v_0 = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial G}{\partial y}; \quad w_1 - w_0 = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial G}{\partial z};$$

Z równań powyższych wynika, że szybkości w tym razie posiadają potencjał, gdy ciecz jest nieściśliwa lub gdy gęstość σ jest funkcją samego tylko ciśnienia. Jeśli zaś założymy, że przed uderzeniem ruch był niewirowy, t.j. posiadał również pewien potencjał, wówczas, całkując powyższe równania, możemy napisać, iż zmiana potencjału $\varphi_1 - \varphi_0 = -G/\sigma + C$ a więc w tym razie potencjał się zmienia, czyli ruch niewirowy może powstać lub zginąć przez uderzenie. Oczywiście przy zastosowaniach praktycznych należy zawsze brać pod uwagę tę okoliczność, iż lepkość cieczy sprowadzi cały szereg odchyleń od powyższych wyników teorji.

§41. Linje i powierzchnie specjalne w cieczy.

Wprowadzając pojęcie potencjału prędkości, wskazaliśmy na analogję do teoretycznej mechaniki. Rozwijając tę analogję dalej możemy mówić o powierzchniach ekwipotencjalnych szybkości, których układ $\varphi(xyzt)$ w wypadku ogólnym ruchu nietrwałego zmienia się ciągle w czasie. Szybkości wszystkich punktów takiej powierzchni są do niej norniej normalne. Utworzywszy w ten sposób pole wektorowe szybkości, możemy mówić o linjach prądu, będących chwilowemi obwiedniami wektorów szybkości. Rozróżniając ruch trwały i nietrwały powiedzieć możemy, że przy ruchu trwałym tory cząsteczek są równocześnie linjami prądu, zaś przy ruchu nietrwałym tory cząsteczek są obwiedniami chwilowych linji prądu. Ponieważ ciecz nie może powstawać z niczego lub ginąć bez śladu, więc linje prądu tylko wtedy mogą całkowicie przebiegać wewnątrz cieczy, jeżeli stanowią krzywe zamknięte. W przeciwnym razie linje prądu nie mogą się ani zaczynać ani kończyć wewnątrz cieczy, lecz tylko na jej powierzchni. Gdy linje te nie są zamknięte, mamy do czynienia przy ruchu niewirowym z jednowartościowym potencjałem prędkości, w przeciwnym razie potencjał jest wielowartościowy. Nie chcąc zbytnio przeładowywać kursu matematyką, poprzestaniemy na ogólnych uwagach. Otóż, wyznaczając analitycznie równania powierzchni ekwipotencjalnych, możemy niekiedy otrzymać punkty i linje przecięcia się tych powierzchni. Trzymając się definicyj matematycznych winniśmy twierdzić, iż w punktach tych panują szybkości nieskończenie wielkie. Z punktu widzenia fizyki twierdzenie takie nie ma racji bytu, gdyż szybkości nieskończenie wielkich nie znamy. Z zaa.

kroczeniu pewnej wartości granicznej szybkości ciecz ulegnie rozpryśnieciu i strugi elementarne się zerwą. O ileby ciecz nie zawierała gazu, wówczas naskutek lepkości zerwanie strugi nastąpiłoby dopiero przy wartości ujemnej ciśnienia. Ponieważ zaś ciecze zawierają zwykle gazy, których prężność wchodzi wówczas w grę, więc już przy dostatecznie małem dodatniem ciśnieniu struga ulegnie zerwaniu. Zauważywszy, że składowe u, v, w szybkości są proporcjonalne do cosinus'ów kierunkowych stycznej w rozważanym punkcie linji prądu, możemy odrazu napisać równanie różniczkowe tych linji:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w};$$

którego całka zawierać będzie dwie stałe dowolne, pozwalające przesunąć taką linję prądu przez dowolny punkt przestrzeni, wypełnionej cieczą. Czasami chodzi nam o powierzchnie prądu, t.j. powierzchnie. po których przebiegają, całkowicie do nich przylegając, linje prądu. Powierzchnia prądu może stanowić dowolny układ nieskończonej liczby następujących po sobie sąsiednich linji prądu, przeto równanie różniczkowe powierzchni prądu musi być równaniem o pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu. Całka tego równania zawierać będzie jedną funkcję dowolną. Niech równanie powierzchni prądu będzie:

$$\varphi(xyzt) = C ;$$

gdzie czas t w danej chwili uważamy za parametr stały. Ponieważ dla danej jednej i tej samej powierzchni różniczka zupełna $d\varphi$ musi być zerem, oprócz tego mamy: $dx = u\,dt$; $dy = v\,dt$; $dz = w\,dt$, otrzymamy przeto równanie różniczkowe powierzchni prądu w postaci następującej:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} u + \frac{\partial\varphi}{\partial y} v + \frac{\partial\varphi}{\partial z} w = 0 ;$$

Sposobem analogicznym otrzymamy równanie linji wirowych:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} = 0 ;$$

oraz równanie powierzchni wirowych:

$$\psi(xyzt) = 0 ;$$

gdzie funkcja ψ musi spełniać równanie różniczkowe

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \omega_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \omega_z = 0 ;$$

Zauważymy jeszcze, że oba te układy linji i powierzchni w wypadku ogólnym ruchu nieustalonego zmieniają się w czasie tak, że zwykle mówimy tylko o ich obrazie chwilowym.

§42. Spółrzędne cylindryczne / §1 rys. 3/.

W zagadnieniach hydrodynamiki częstokroć okazuje się pożyteczniejszem wprowadzenie spółrzędnych cylindrycznych zamiast prostokątnych. Oznaczając tedy w nowym układzie, który jest również potrójnie ortogonalny, składowe szybkości w 3-ch kierunkach prostopadłych przez u_r u_ϑ u_z wypiszemy łatwo trzy równania dynamiki:

$$P_\vartheta r - 1/_\sigma \frac{\partial p}{\partial \vartheta} = \frac{d}{dt}(r u_\vartheta); \quad P_r - 1/_\sigma \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{u_\vartheta^2}{r};$$

oraz

$$P_z - 1/_\sigma \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{d u_z}{dt}; \quad /1/$$

Oznaczenia w tych równaniach są na zasadzie poprzednich paragrafów zrozumiałe; podkreślić tylko wypada niesymetryczność drugiego z nich, w którem wchodzi wyraz u_ϑ^2/r, odpowiadający normalnej składowej przyśpieszenia w ruchu obrotowym. Biorąc pod uwagę, iż

$$u_r = \frac{dr}{dt}; \quad u_z = \frac{dz}{dt}; \quad u_\vartheta = r\frac{d\vartheta}{dt};$$

możemy przekształcić równanie /1/ przez rozwinięcie stron prawych:

$$\frac{\partial(r u_\vartheta)}{\partial t} + \frac{\partial(r u_\vartheta)}{\partial \vartheta}\, u_\vartheta/_r + \frac{\partial(r u_\vartheta)}{\partial r}\, u_r + \frac{\partial(r u_\vartheta)}{\partial z}\, u_z = P_\vartheta r - 1/_\sigma \frac{\partial p}{\partial \vartheta};$$

Analogicznie znajdziemy 2 pozostałe równania:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}\, u_\vartheta/_r + \frac{\partial u_r}{\partial r}\, u_r + \frac{\partial u_r}{\partial z}\, u_z = P_r - 1/_\sigma \frac{\partial p}{\partial r};$$

oraz

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial \vartheta}\, u_\vartheta/_r + \frac{\partial u_z}{\partial r}\, u_r + \frac{\partial u_z}{\partial z}\, u_z = P_z - 1/_\sigma \frac{\partial p}{\partial z};$$

Ustalmy z kolei równanie ciągłości strugi. Przyjmując tedy pod uwagę zmianę ilości cieczy, zawartej w elemencie objętości /§ 4, rys.3/, możemy napisać, iż

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}(dr\,dz\,u_\vartheta\sigma)d\vartheta+\frac{\partial}{\partial r}(r\,dz\,d\vartheta\,u_r\sigma)+\frac{\partial}{\partial z}(r\,d\vartheta\,dr\,u_z\sigma)=-r\,d\vartheta\,dr\,dz\frac{\partial\sigma}{\partial t};$$

czyli

$$r\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sigma u_\vartheta)+\frac{\partial}{\partial r}(\sigma r u_r)+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma r u_z)=0 \qquad /3/$$

W szczególnym przypadku nieściśliwej cieczy dla σ = const. znajdziemy:

$$\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta}+\frac{\partial(r u_r)}{\partial r}+\frac{\partial(r u_z)}{\partial z}=0; \qquad /3'/$$

Jeśli szybkości posiadają potencjał, t.j. jeśli istnieje taka funkcja ϕ, że

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}=u_\vartheta;\quad \frac{\partial\phi}{\partial r}=u_r;\quad \frac{\partial\phi}{\partial z}=u_z;$$

to równanie ciągłości strugi dla nieściśliwej cieczy można przepisać w innej postaci:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=0;$$

lub po wykonaniu działań i podzieleniu przez r :

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0; \qquad /4/$$

Składowe prędkości wirowania około osi ϑ, r, z -- ω_ϑ, ω_r, ω_z określimy łatwo sposobem analogicznym, jak przy współrzędnych prostokątnych, rozpatrując warunki ruchu prostokątnego przekroju elementarnego prostopadłościanu płaszczyznami prostopadłemi do osi. Tym sposobem otrzymamy:

$$2\omega_\vartheta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r};$$

$$2\omega_r = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u_z}{\partial \vartheta} - \frac{\partial (r u_\vartheta)}{\partial z}\right];$$

$$2\omega_z = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (r u_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta}\right];$$

Wyrażenia te łatwo sprawdzić, uważając, iż muszą one być zerami w wypadku ruchu niewirowego. Pisząc w tym wypadku różniczkę zupełną potencjału prędkości, traktowanego jako funkcja trzech zmiennych niezależnych w postaci

$$d\Phi = r u_\vartheta d\vartheta + u_r dr + u_z dz;$$

widzimy, iż warunek ten jest spełniony.

§43. Całka pierwsza równań ruchu wzdłuż linji prądu w wypadku ogólnym ruchu wirowego.

Jeżeli ruch jest trwały i siły działające na ciecz posiadają potencjał, możemy scałkować równania ruchu wzdłuż linji prądu bez względu na to, czy ruch jest wirowy, czy też niewirowy. Oznaczmy potencjał sił przez U. Wówczas równania dynamiki będą:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$