§ 30. PRZEPŁYW CIECZY PRZEZ PRZEWODY Z UWZGLĘDNIENIEM TARCIA.

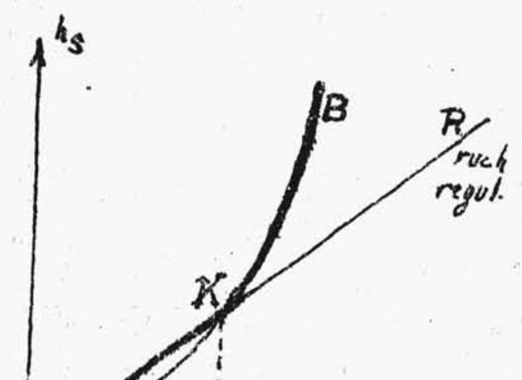
Przepływając przez przewody dowolnego kształtu, ciecz doznaje spadku ciśnienia. Zjawisko to ma miejsce nawet i wtedy, gdy poziomy przewód posiada stały przekrój, co dowodzi, że twierdzenie Bernouille'go nie ujmuje całokształtu czynników, działających na ciecz. Szereg pomiarów, poparty matematycznemi teorjami, podzielił zjawiska przepływu na 2 zasadnicze grupy. Otóż okazało się, że zjawisko spadu ciśnień jest w ścisłym związku z wartością szybkości przepływu. Wyobraźmy sobie tedy, że na długości L przewodu ciśnienie p_o spadło do wartości p. Wówczas, wprowadzając wysokość straconą h_s, określoną równaniem $h_s = \frac{p_o - p}{\gamma}$, nazywamy **stratą jednostkową** wysokości wartość

$$i = h_s / L$$

zaś spadem jednostkowym ciśnienia wielkość

$$i\gamma = \frac{p_o - p}{L} = h_s / L \, \gamma ;$$

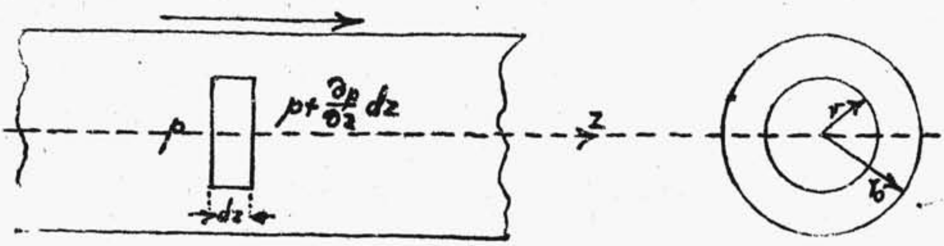
Innemi słowy spad ciśnienia $i\gamma$ mierzy się wartością wysokości straconej, przypadającą na jednostkę długości, mnożoną przez ciężar właściwy γ. Jakeśmy wyżej nadmienili, ten spad ciśnień, który przypisujemy lepkości cieczy, jest w ścisłym związku z szybkością przepływu. Dają się tu przytem wyróżnić 2 zasadnicze grupy zjawisk. Gdy szybkość przepływu jest niewielka, wówczas spad ciśnień i jest ściśle proporcjonalny do pierwszej potęgi wartości szybkości przepływu. Natomiast przy większych szybkościach zależność staje się bardziej złożoną, przyczem spad ciśnień jest proporcjonalny mniej więcej do kwadratu szybkości, który to związek jest znacznie mniej ścisły, niż w poprzednim przypadku. Oba te zjawiska są skutkiem działania tarć wewnętrznych cząstek cieczy, nie można tedy do nich stosować wzorów, wyprowadzonych dla doskonałych cieczy. W tym razie bowiem strugi elementarne oddziaływują na siebie nietylko normalnie, lecz i stycznie. Ponadto musimy założyć, że dla pierwszej grupy przepływów powstałe opory są proporcjonalne do pierwszych potęg szybkości, dla drugiej grupy - do kwadratu. Szybkości sąsiednich strug różnią się od siebie nieskończenie mało, siły tarcia wynikające z tych różnic są jednakże skończone. Wobec tego przy małych szybkościach przepływu cząstki cieczy przy ściankach przewodu muszą pozostawać nieruchome, bo w przeciwnym razie otrzymalibyśmy nieskończenie wielkie siły tarcia, co jest niemożliwe. W drugim wypadku strugi działają również stycznie na siebie, ale proporcjonalność spadu ciśnień do kwadratu szybkości dowodzi istnienia uderzeń tak, iż w tym wypadku nie możemy nic wywnioskować o szybkości cieczy przy ścianie rury. Wyróżnimy tedy ostatecznie w teorji przepływów ruch regularny, zwany też ruchem Poisenille'a, od nazwiska uczonego, który go pierwszy zbadał, oraz ruch burzliwy. Oczywiście nie może być mowy o ustaleniu ścisłej granicy między obu temi zjawiskami, gdyż już powyższe hipotezy wskazują na konieczność istnienia ciągłego przejścia. Prawa termodynamiki i doświadczenia wskazują, że przy danych wartościach szybkości uzyskamy ten z dwóch ruchów,



Rys. 76.

który daje większe opory. Jeśli tedy przedstawimy wykreślnie w układzie v, h_s oba ruchy /Reynalds/ /rys. 76/, to w warunkach zwykłych wraz ze zmianą szybkości otrzymamy przebieg łamany OKB, składający się z odpowiednich części prostej i paraboli. Punktowi K przecięcia tych dwu figur odpowiada t. zw. "szybkość krytyczna" V_k. Znając wartość szybkości krytycznej, możemy z góry przewidzieć, jak się ciecz zachowa przy danym przepływie. Można wprawdzie uzyskać ruch burzliwy i poniżej szybkości V_k, zaś ruch regularny powyżej, ale będą to stany, odpowiadające równowadze nietrwałej w mechanice lub przechłodzeniu w nauce o cieple. Rozważymy przedewszystkiem ruch Poisenille'a. Wyobraźmy sobie przeto, że przez poziomy przewód cylindryczny o promieniu r_0 przepływa ciecz w kierunku, wskazanym na rys. 77 Skoro ruch się już ustalił, szybkość v w poszczególnych miejscach strumienia będzie tylko funkcją odległości r od osi, natomiast od długości z przewodu nie zależy. Co do ciśnienia założymy zgodnie z doświadczeniami wprost przeciwnie, iż jest ono funkcją z, pozostaje zaś niezmienne dla danego przekroju. Weźmy pod uwagę nieskończenie krótki cylinder o promieniu r wyodrębniony myślowo w cieczy. Skoro ruch jest jednostajny, to masa cieczy w nim zawarta musi posiadać przyśpieszenie zerowe, t.j. siły zewnętrzne nań działające będą w równowadze. Jeśli ciśnienia na powierzchniach czołowych oznaczymy przez p i $p + \frac{dp}{dz} dz$, wówczas parcie wypadkowe wyniesie

$\pi r^2 \frac{dp}{dz} dz$. Ponadto wchodzi tu w grę opór strug sąsiednich. Wprowadźmy pojęcie oporu jednostkowego, odpowiadającego jednostce powierzchni, i załóżmy, że jest on proporcjonalny do spadu szybkości sąsiednich strug. Wówczas w rozważanym przypadku opór jednostkowy wyniesie $k \frac{dv}{dr}$, gdzie przez k oznaczamy stały spółczynnik proporcjonalności, zaś opór



Rys. 77.

całkowity wyrazi się jako $2\pi r dz\, k \frac{dv}{dr}$. Poprzednio ustalony warunek równowagi możemy przepisać w następującej formie:

$$\pi r^2 \frac{dp}{dz} dz = 2\pi r dz\, k \frac{dv}{dr}$$

skąd

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2k} \frac{dp}{dz} .$$

Ale na początku rozważanego paragrafu ustaliliśmy, iż spad ciśnień

$$i\gamma = \frac{p_o - p}{L} = \frac{h}{L}\gamma = -\frac{dp}{dz}$$

skąd

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{h_s}{L}\gamma$$

t.j.

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{\gamma h_s}{L} \cdot \frac{r}{2k}\,; \qquad /1/.$$

Całkując powyższe równanie znajdziemy, iż

$$v = C - \frac{\gamma h_s r^2}{L \cdot 4k} = C - \frac{\gamma i r^2}{4k}\,;$$

gdzie i oznacza stratę jednostkową wysokości. Ale dla $r = r_0$ szybkość

$$v = C - \frac{\gamma i r^2}{4k} = 0;$$

gdyż inaczej opór w pobliżu ścianek wynosiłby wówczas nieskończenie wiele. Wobec tego, rugując stałą C, otrzymamy ostatecznie

$$v = \frac{\gamma i}{4k}\left(r_0^2 - r^2\right);$$

t.j. rozkład szybkości jest dla każdego przekroju paraboloidalny o szybkości maximum $v_{max} = \frac{\gamma i}{4k} r_0^2$ odpowiadającej osi przewodu. Obliczmy wydatek elementarny dQ, odpowiadający elementarnemu pierścieniowi o promieniach r i $(r+dr)$. Otóż wyniesie on

$$dQ = 2\pi r dr\, v = 2\pi r dr \frac{\gamma i}{4k}\left(r_0^2 - r^2\right)$$

skąd całkowity wydatek

$$Q = \int_0^{r_0} dQ = \frac{\pi \gamma i}{2k}\int_0^{r_0} r\left(r_0^2 - r^2\right) dr = \frac{\pi \gamma i r_0^4}{8k}\,;$$

t.j. jest on proporcjonalny do czwartej potęgi promienia. Wobec tego średnia szybkość przepływu, którą znajdziemy, dzieląc całkowity wydatek Q przez pole przekroju, wyniesie

$$V_s = \frac{\pi \gamma i r_o^4}{8k} : \pi r_o^2 = \frac{\gamma i}{8k} r_o^2$$

t.j. jest dwa razy mniejsza od szybkości maximalnej V_{max}, co zresztą można było wywnioskować na zasadzie paraboloidalnego rozkładu szybkości. Doświadczenia Poisenille'a nad regularnym przepływem wody przez rurki włoskowate najzupełniej potwierdziły teorję. Okazało się ponadto, że i temperatura gra tu dość ważną rolę. Łatwo to wyjaśnimy, zauważywszy, iż we wszystkich wzorach występuje czynnik γ, zaś ciężar właściwy cieczy jest wyraźną funkcją temperatury. Zwróćmy uwagę na to, że wprowadzony przez nas czynnik proporcjonalności k nie jest liczbą oderwaną, lecz, jak to wynika chociażby ze wzoru na wartość szybkości maksymalnej

$$v_{max} = \frac{\gamma i}{4k} r_o^2$$

posiada wymiar

$$[ML^{-1}T^{-1}]$$

Podamy teraz szereg wartości uzyskanych empirycznie dla poszczególnych spółczynników w przypadku wody. Tak więc przy 10^oC. było

$$k = 157 \cdot 10^{-6} \left[\frac{sek \cdot kg}{m^2}\right]$$

przyczem spółczynnik ten posiada wogóle bardzo małą wartość. Reynalds'owi udało się ustalić empiryczny wzór na szybkość krytyczną w zależności od średnicy przewodu rurowego oraz spółczynnika . Mianowicie $V_k = \mu \frac{kg}{\gamma d}$, gdzie spółczynnik $\mu = 2000$. Znajdźmy dla przykładu wartość V_k dla wody. Otóż wówczas

$$V_k = 2000 \cdot \frac{157 \cdot 10^{-6} \cdot 9,81}{1000 \cdot 0,1} = 0,031 \, m/sek = 3,1 \, cm/sek$$

/jeżeli przewód ma średnicę d = 0,1 mtr./.

Widzimy stąd, że przepływ regularny nie ma znaczenia praktycznego dla techniki, która się nie posługuje tak nikłemi szybkościami.

Zwróćmy się z kolei do rozpatrywania ruchu burzliwego. Powiedzieliśmy już wyżej, że mamy tu do czynienia z uderzeniami, pochodzącemi stąd, że cząstki cieczy posiadają prócz średniego postępowego ruchu jeszcze ruch wahadłowy i obrotowy. Okazało się, że w tym wypadku nie można założyć związku proporcjonalnego między oporem i spadem szybkości tak, iż cząstki przyległe do ścianek naczynia mogą posiadać skończoną szybkość. Stąd już łatwo pojąć, że o ile w ruchu regularnym rodzaj ścian naczynia nie wpływał na warunki przepływu, tutaj materjał i stopień jego chropowatości jest zasadniczo ważny. Załóżmy, że w przybliżeniu opory są porporcjonalne do kwadratu średniej szybkości. Podobnie jak w ruchu regularnym jednostkowy spad wysokości $i = \frac{8kV_s}{\gamma r_0^2}$ /ze wzoru $V_s = \frac{\gamma i}{8k} r_0^2$/ był odwrotnie proporcjonalny do pola $\mathcal{F}$ przekroju, tak samo w wypadku ruchu burzliwego udało się ustalić analogiczną zależność. Ponadto okazało się, że wartość i jest proporcjonalna do zwilżanego obwodu ℓ przekroju $\mathcal{F}$ tak, iż ostatecznie

$$i = h_s/L = \varepsilon \frac{\ell}{\mathcal{F}} V_s^2 ;$$

gdzie ε oznacza empiryczny spółczynnik. Wprowadźmy nową wielkość zwaną promieniem hydraulicznym i określoną równością $R = \mathcal{F}/\ell$. Wówczas $i = \varepsilon/R\, V_s^2$ gdzie. Tak np. dla przekroju kołowego jest $\mathcal{F} = \pi d^2/4$, obwód zwilżony $\ell = \pi d$, czyli promień hydrauliczny $R = \pi d^2/4 : \pi d = d/4$. Wobec tego w tym przypadku $i = 4\varepsilon/d\, V_s^2$. Często wprowadzamy zamiast szybkości średniej V_s wydatek Q, który dla przekroju kołowego wyniesie

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} V_s ;$$

skąd

$$V_s = \frac{4Q}{\pi d^2} ;$$

Wobec tego spad jednostkowy wysokości wyrazi się, jak następuje:

$$i = 4\varepsilon/d \, \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4} = \frac{64\varepsilon}{\pi^2} \, \frac{Q^2}{d^5} = \lambda \frac{Q^2}{d^5}$$

gdzie przez λ oznaczamy stałą wielkość $64\varepsilon/\pi^2$. Widać stąd, że wartość strat, jako odwrotnie proporcjonalne do piątej potęgi średnicy, zależy w bardzo wysokim stopniu od jej wartości. Tak np. dla wody $\varepsilon \cong 1/2500$, więc $\lambda \cong 1/400 = 0{,}0025$ t.j. $i = 0{,}0025 \cdot \frac{Q^2}{d^5} = 0{,}0016 \frac{v_s^2}{d}$. Spółczynniki te bierzemy tu z nadmiarem, gdyż należy brać stale pod uwagę niedokładność połączeń poszczególnych rur ze sobą, zmian kierunku i t.d., która wywołuje dalsze straty. Jednakże z drugiej strony należy się wzorami posługiwać bardzo ostrożnie, szczególnie przy dłuższych przewodach /np. przewody, doprowadzające wodę do stacji kolejowych/. Istotnie, najlżejsze odchylenie w obiorze średnicy lub spółczynników da na długości każdych tysiąca metrów przewodu znaczną różnicę wysokości straconej co odpowiada różnicy kilku atmosfer w wartości ciśnień krańcowych przewodu. Ponieważ zaś wszelkie urządzenia wodne /pompy, turbiny/ są obliczone ściśle na określone wartości ciśnień, więc otrzymujemy zwiększoną nieprodukcyjną stratę energji. Istnieje tedy szereg wzorów, które mają na celu bliżej uwzględnić wszystkie czynniki wpływające na wartość spółczynnika ε . Rezultaty pod tym względem są jednak niezawsze pewne, tak, że stosując różne wzory częstokroć otrzymujemy wartości, różniące się od siebie dwukrotnie. Aby otrzymać wyniki zgodne z rzeczywistością należy stosować wzory oparte na doświadczeniach, wykonanych w warunkach podobnych do warunków zagadnienia. Uwzględniwszy dopiero wszystkie opory w przewodzie, których wartość mierzymy wysokością straconą h_s , możemy stosować do przewodów równanie Bernouille'go. Rozpatrując przeto przekrój początkowy zbiornika i dowolny pośredni, możemy napisać, iż

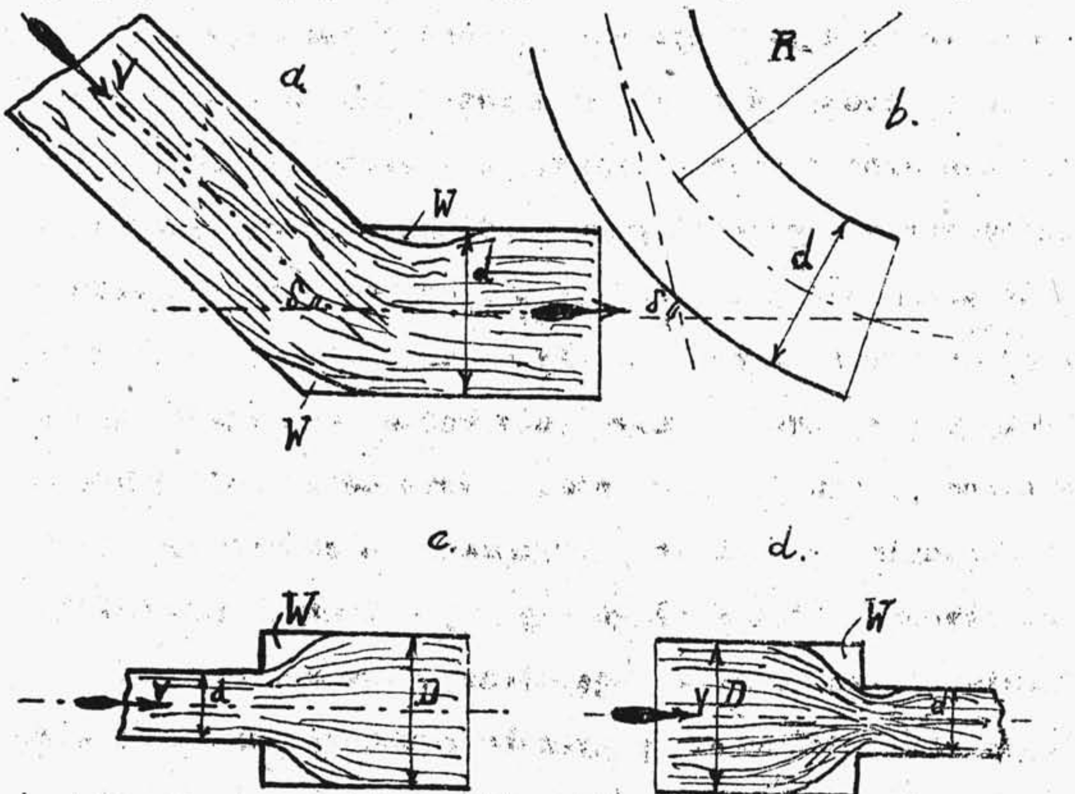
$$V_0^2/2g + h + p_0/\gamma = V_x^2/2g + p_x/\gamma + \sum h_s$$

Przy wypływie z dostatecznie wielkiego otwartego zbiornika,, możemy założyć, że $V_0 \cong 0$, zaś $p_0 = p_a$. Dla zbiornika zamkniętego należy manometrem znaleźć wartość ciśnienia p_0 . W każdym razie w obu przypadkach łatwo znaleźć dla dowolnego przekroju p_x , wyliczywszy dlań szybkość średnią V . Wogóle w zastosowaniach technicznych wartość prędkości V waha się w granicach $(1 \div 3)\ m/sek$, przyczem dla większych przewodów stosuje się większe prędkości, dla mniejszych - mniejsze, ażeby zachować mniej więcej tę samą wartość strat jednostkowych $\left(i = \frac{4\varepsilon}{d} V_s^2 \right)$. Wyliczywszy raz dla szeregu przekrojów wartość p_x, budujemy poprzednio rozpatrzoną linję ciśnień, która pozwala łatwo się orjentować co do miejsc, w których panuje ciśnienie niższe od atmosferycznego i co do związanych z tem trudności praktycznych. Zauważmy jeszcze, jako ważny szczegół, że przewody buduje się zawsze z nieznacznem wzniesieniem w kierunku ruchu, a nie w przeciwnym, jakby to można na pierwszy rzut oka wywnioskować. Pochodzi to stąd, że musimy stale odprowadzać powietrze. Przy wzniesieniu w kierunku ruchu zostaje ono porwane przez cząstki przepływającej cieczy. W przeciwnym razie zaś, o ile przewód posiada wzniesienia i spadki, powietrze gromadzi się w najwyższych miejscach poszczególnych części przewodu i może zatamować przepływ cieczy. Wzniesienie przewodu w kierunku ruchu wynosi zaledwie parę milimetrów na metr bieżący przewodu i szczególnie ważne jest wtedy, gdy w przewodzie panuje ciśnienie, niższe od atmosferycznego.

Wspomnimy jeszcze o przyrządach do doświadczeń nad przepływami. Otóż posługujemy się szklanymi przewodami, barwiąc jakąkolwiek strugę cieczy, aby móc śledzić za jej ruchem. Wówczas w przypadku ruchu Poiseuille'a okaże się, że struga zachowując swój kształt, pozostaje bez zmiany. Natomiast przy ruchu burzliwym, cząstki zabarwionej strugi rozbiegają się w dość szerokich granicach po strugach sąsiednich, co dowodzi, jak złożone ruchy muszą one wykonywać.

§ 31. OPORY POSZCZEGÓLNE W PRZEWODACH.

W poprzednim paragrafie wskazaliśmy na powstawanie oporów przy przepływie naskutek lepkości cieczy i związanych z nią oddziaływań stycznych między poszczególnemi strugami. Analogicznie do zjawisk



Rys. 78.

wypływu spotykamy się tu jeszcze z oporami drugorzędnymi, które można położyć na karb dławienia strumienia