TEORJA RUCHU OGÓLNEGO CIECZY.

§ 37. RÓWNANIE EULER'A

W § 1 mówiliśmy o dwóch metodach rozważania ruchu cieczy, można bowiem badać ruch cząstek cieczy, przechodzących przez określony punkt układu sztywnego /Euler/, albo śledzić ruch każdej takiej cząstki /Lagrange/. Zwrócimy się naprzód do metody Euler'a. Otóż w każdym punkcie (x, y, z) układu sztywnego spółrzędnych, szybkość przyśpieszenia cząstek cieczy, siły działające na ciecz oraz ciśnienie są funkcjami czasu t. Ogólnie tedy wielkości te zależą od 4 zmiennych niezależnych: x, y, z i t. Będziemy oznaczać składowe szybkości w kierunku osi przez u, v i w, t.j. kładziemy:

$$\frac{dx}{dt} = u\ ; \qquad \frac{dy}{dt} = v\ ; \qquad \frac{dz}{dt} = w\ ;$$

Biorąc drugie pochodne powyższych wyrażeń znajdziemy przyśpieszenia:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

Analogicznie będzie:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\ ;$$

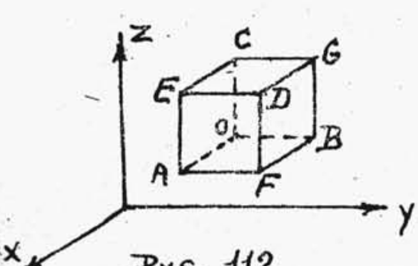
oraz

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z};$$

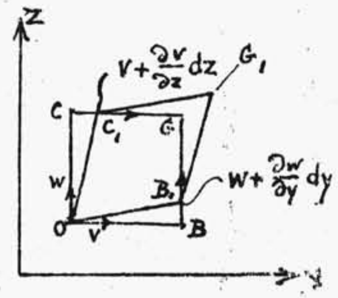
Umówimy się, że przy dalszych rozważaniach będziemy stosować układ spółrzędnych prawoskrętny, t.j. taki, w którym każde dwie osi w ich kolejnem uporządkowaniu $x\ y\ z$ —— następują po sobie w kierunku obrotu prawoskrętnej śruby, posiadającej ruch postępowy w kierunku osi trzeciej. Chcąc ustalić równanie Euler'a, obierzmy taki układ /rys.112/ i rozważmy w nim elementarny prostopadłościan cieczy.

Rozumować będziemy analogicznie, jak przy wyprowadzaniu równań hydrostatyki.

Załóżmy przedewszystkiem, że ciecz nie jest lepka, tak, iż ciśnienia są zawsze normalnie skierowane do powierzchni elementu. Oznaczając składowe siły objętościowej jednostkowej przez X, Y, Z zaś ciśnienie przez p, możemy napisać 3 równania dynamiki dla poruszającego się elementu cieczy o gęstości σ



Rys. 112.



Rys. 113.

Mianowicie, rzut na oś x da:

$$X\,dx\,dy\,dz\,\sigma + p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz = dx\,dy\,dz\,\sigma\,\frac{du}{dt}.$$

czyli po uproszczeniu:

$$/1/\quad X - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$/2/\quad Y - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z};$$

$$/3/\quad Z - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z};$$

W ten sposób otrzymaliśmy 3 równania, wyprowadzone w swoim czasie przez Euler'a, których szczególnym wypadkiem są równania hydrostatyki. Ponieważ jednak zmiennych zależnych posiadamy cztery: u, v, w, p, więc należy wyprowadzić jeszcze jedno równanie, aby zadanie było teoretycznie rozwiązane.

Zauważymy tylko, że otrzymane równania nie są w takim stopniu niezależne od układu spółrzędnych, jak w hydrostatyce. Pochodzi to stąd, że przyśpieszenia, występujące w równaniach ruchu, wyrażają się różnie, zależnie od obioru spółrzędnych.

Równanie czwarte wyprowadzimy, biorąc na uwagę zmianę masy cieczy w rozważanym elemencie układu stałego. Otóż przez trzy ścianki prostopadłościanu wpływają w czasie dt odpowiednie masy cieczy:

$$\sigma u\,dy\,dz\,dt\,, \quad \sigma v\,dx\,dz\,dt\,, \quad \sigma w\,dx\,dy\,dt$$

zaś przez trzy pozostałe wypływają masy:

$$\sigma u\,dy\,dz\,dt + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma u\,dy\,dz\,dt)\,dx\,, \quad \sigma v\,dx\,dz\,dt + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma v\,dx\,dz\,dt)\,dy$$

oraz

$$\sigma w\,dx\,dy\,dt + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma w\,dx\,dy\,dt)\,dz$$

Ostatecznie tedy po czasie dt w rozważanym elemencie okaże się cieczy o

$$\left[\frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma w)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz\,dt$$

mniej, niż na początku. Ale w tym czasie masa elementu cieczy

$$\sigma\,dx\,dy\,dz$$

wzrosła z drugiej strony o

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\,dx\,dy\,dz)\,dt\,;$$

wobec czego

$$\left[\frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma w)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz\,dt = -\frac{\partial}{\partial t}(\sigma\,dx\,dy\,dz)\,dt$$

skąd

$$\frac{\partial(\sigma u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma v)}{\partial z} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0 \qquad /4/$$

Gdyby pozbawiona lepkości ciecz była jeszcze nieściśliwa, to σ = const., zaś równanie /4/ się uprości:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0\,; \qquad /4'/$$

Równanie ostatnie, spotykane często w teorji fizyki /przewodnictwo cieplne, indukcja elektryczna/ jest bardzo ważne. Postaramy się je przeto wyprowadzić jeszcze na innej drodze, aby ujawnić jego fizyczne znaczenie w rozważanym przypadku.

Załóżmy tedy, że w elemencie $V = dxdydz$ znajdowała się w pewnej chwili ciecz o gęstości σ. Ponieważ masa σV tego elementu cieczy pozostaje w czasie ruchu niezmienna, więc

$$\frac{d(\sigma V)}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} V + \sigma \frac{dV}{dt} = 0;$$

skąd, dzieląc przez σV, znajdziemy, że

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 0; \qquad /5/$$

Zastanówmy się teraz nad zmianą objętości cieczy w tym czasie.

Otóż początkowo posiadała ona kształt prostopadłościanu. Ze względu jednak na zmienne szybkości jego wierzchołków prostopadłościan ten przeszedł po czasie dt w nieskończenie mało zbliżony równoległościan, którego objętość przeto również się wyrazi iloczynem 3-ch wymiarów.

Rozpatrzmy zmianę jednej krawędzi prostopadłościanu /rys.112/, np. krawędzi AO. Otóż p. A posiada względem p. O pewną szybkość względną, której składowe wzdłuż osi $x\,y\,z$ wyrażą się jako $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, $\frac{\partial v}{\partial x}dx$ i $\frac{\partial w}{\partial x}dx$. Wobec tego, po czasie dt punkt A przesunie się ruchem względnym, przyczem nową odległość OA' znajdziemy, biorąc pierwiastek kwadratowy z sumy kwadratów wyrażeń

$$dx\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt\right),\quad \frac{\partial v}{\partial x}dx\,dt \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial w}{\partial x}dx\,dt$$

Nam jednak nie chodzi o znalezienie nowej objętości elementu cieczy, tylko o zmianę tej objętości w czasie dt. Znajdźmy przeto, o ile się różni nowa krawędź OA' od dawnej.

W tym celu, ze względu na to, że mamy tu do czynienia z wielkościami nieskończenie małemi, można zastąpić różnicę tych odcinków różnicą ich rzutów na AO, która po odrzuceniu n eskończeności rzędów wyższych wyrazi się jako $\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dt$. Analogicznie dla pozostałych krawędzi OB i OC wykażemy zmianę długości o

$$\frac{\partial v}{\partial y}dy\,dt \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial w}{\partial z}dz\,dt$$

Wobec tego przyrost objętości elementu cieczy wyrazi się jako:

$$dx\,dy\,dz\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}dt\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}dt\right)-dx\,dy\,dz = dV;$$

tak iż po odrzuceniu odpowiednio małych wyrazów będzie:

$$dV = dx\,dy\,dz\,dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) = V\,dt\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

skąd

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z};$$

Z tej równości wynika, że wyrażenie

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

oznacza rozszerzenie jednostki objętości cieczy w jednostce czasu, co ostatecznie usprawiedliwia jego nazwę diwergencji /divergence, Divergenz/.

Podstawiając powyższą wartość $\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial t}$ do równania /5/, znajdziemy, iż

$$\frac{1}{\sigma}\frac{d\sigma}{dt}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0;$$

Równanie powyższe łatwo sprowadzić do postaci /4/, mnożąc obie strony przez σ, gdyż wówczas

$$\frac{d\sigma}{dt}+\sigma\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma\frac{\partial v}{\partial y}+\sigma\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}+\frac{\partial(\sigma u)}{\partial x}+\frac{\partial(\sigma v)}{\partial y}+\frac{\partial(\sigma w)}{\partial z}=0$$

ponieważ

$$\frac{d\sigma}{dt}=\frac{\partial\sigma}{\partial t}+u\frac{\partial\sigma}{\partial x}+v\frac{\partial\sigma}{\partial y}+w\frac{\partial\sigma}{\partial z};$$

W przypadku cieczy nieściśliwej wracamy tedy znów do równania /4'/

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0;$$

Ostatecznie uzyskaliśmy więc 4 równania, o pochodnych cząstkowych z czterema niewiadomemi, tak że teoretycznie wziąwszy wszelkie zagadnienie ruchu cieczy nielepkiej daje się rozwiązać, o ile po scałkowaniu równań uwzględnimy przy wyznaczaniu funkcyj dowolnych warunki początkowe, np. kształt powierzchni cieczy, wartość ciśnienia powierzchniowego i t.d.

Jednakże nasze wiadomości w dziedzinie rozwiązywania równań o pochodnych cząstkowych są tak niewielkie, że praktycznie zagadnienie daje się rozwiązać tylko w niewielkiej liczbie przypadków szczególnych. Otrzymane wówczas wyniki, mimo pominięcia lepkości cieczy, dają cenne wskazówki hydromechanice technicznej, pozwalając wytłomaczyć i przewidzieć wiele niezrozumiałych na pierwszy rzut oka zjawisk.

§ 38. RUCHY ELEMENTARNE CIECZY.

Przy dotychczasowych rozważaniach teoretycznych braliśmy zawsze pod uwagę element cieczy i ustaliliśmy dlań szereg zależności analitycznych, uwzględniając ruch elementu, jako całości. Okazało się jednak przytem, iż sam element ulega daleko idącym odkształceniom. Zajmiemy się przeto z kolei ruchami, zachodzącemi wewnątrz elementu /rys.113/.

Niech będzie tedy w rozpatrywanej chwili prostopadłościan elementarny cieczy $OABCD$. Rozważmy, jakim zmianom podlega on w płaszczyźnie równoległej do jednej z płaszczyzn spółrzędnych, np. yz. Nie biorąc pod uwagę składowej u szybkości, zastanowimy się, jak się zmieni ściana COB w nieskończenie krótkim odstępie czasu dt. Otóż jeżeli chwilowa szybkość cieczy w punkcie O posiada składowe u, v, w, to w punkcie B składowa wzdłuż osi z wyniesie $w+\frac{\partial w}{\partial y}dy$, zaś w punkcie C składowa wzdłuż osi y wyrazi się jako $v+\frac{\partial v}{\partial z}dz$. Wprawdzie punkty B i C posiadają jeszcze po jednej składowej szybkości w płaszczyźnie yz, ale przy rozpatrywaniu ruchu względnego tych punktów względem punktu O można je pominąć, jako nieskończoności niższego rzędu. Otóż w czasie dt droga ~~względem punktu~~ B względem punktu O wyniesie $\frac{\partial w}{\partial y}dy\,dt$, zaś punktu C $-\frac{\partial v}{\partial z}dz\,dt$. Stąd elementarne kąty wychylenia będą i dla ramienia OB

$$d\beta=\frac{\partial w}{\partial y}dt$$

dla ramienia OC

$$d\gamma=\frac{\partial v}{\partial z}dt$$

tak iż średni kąt przesunięcia ściany ze względu na różnokierunkowość powyższych obrotów będzie równy

$$\frac{1}{2}(d\beta-d\gamma)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)dt$$

co odpowiada średniej szybkości kątowej

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Analogicznie dla pozostałych ścian elementu znajdziemy inne szybkości kątowe średnie

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

skąd szybkość kątowa:

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}$$

Wektor, którego składowe wyrażają się za pomocą składowych wektora danego tak, jak to ma miejsce z szybkością kątową ω i z szybkością linjową, nosi nazwę rotacji albo curl'a /angielskie to curl - wichrzyć, kędzierzawić/.

Symbolicznie oznaczymy to w ten sposób, iż

$$\omega = rot.(uvw) = curl.(uvw)$$

Pomijając wszelkie fizyczne wyobrażenia, które się łączą z powyższemi wielkościami, widzimy, iż na zasadzie określeń

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = 0$$

t.j. dywergencja rotacji jest zawsze zerem, czyli symbolicznie

$$div.rot.(uvw) = div.curl.(uvw) = 0;$$

Zajmiemy się z kolei wyznaczeniem odkształceń, którym podlega prostopadłościan elementarny w czasie dt, Jak poprzednio, znajdziemy odkształcenie każdej ściany oddzielnie. Ponieważ odkształcenie nie zależy od kierunku przesunięcia, więc mierzy się ono wartością

$$d\beta + d\gamma = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) dt;$$

przyczem odkształcenie w jednostce czasu, inaczej prędkość odkształcenia, wyniesie

$$\varphi_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right);$$

Analogicznie dla pozostałych ścian znajdziemy:

$$\varphi_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right);$$

$$\varphi_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

Wprowadźmy ponadto funkcje pomocnicze $\Lambda_x \; \Lambda_y \; \Lambda_z$ określone równaniami:

$$\Lambda_x = \frac{\partial u}{\partial x};$$

$$\Lambda_y = \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\Lambda_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

Rozpatrzmy teraz ruch względny punktu D względem punktu O. Jeżeli szybkość punktu O ma składowe u, v, w to w tej samej chwili rzuty szybkości w punkcie D wyniosą $u+du, \; v+dv, \; w+dw$ czyli składowe szybkści względnej punktu D są równe:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz;$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz;$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz;$$

Wobec tego pierwotna długość

$$\overline{OD} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

po upływie czasu dt zmieni się tak, iż nowa wartość będzie.

$$\overline{O_1D_1} = (1 + \Lambda\, dt)\, \overline{OD};$$

gdzie Λ oznacza spółczynnik rozszerzalności linjowej w jednostce czasu, posiadający tę oryginalną własność, że jest funkcją czasu.

Znając wartości szybkości względnych punktu D, łatwo wyrazimy tę zmienioną odległość i w inny sposób, przyczem:

$$(1 + \Lambda\, dt)^2\, \overline{OD}^2 = \left\{dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz\right) dt\right\}^2 +$$

$$+ \left\{dy + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz\right) dt\right\}^2 +$$

$$+ \left\{dz + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz\right) dt\right\}^2;$$

Rozwijając powyższe równanie i podstawiając poprzednio wprowadzone wielkości, znajdziemy po odrzuceniu nieskończenostek wyższych rzędów i uwzględnieniu

$$OD^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 ;$$

iż

$$\Lambda\, ds^2 = \Lambda_x dx^2 + \Lambda_y dy^2 + \Lambda_z dz^2 + \varphi_x dy\,dz + \varphi_y dz\,dx + \varphi_z dx\,dy ; \quad (1)$$

albo

$$\Lambda = \Lambda_x a^2 + \Lambda_y b^2 + \Lambda_z c^2 + \varphi_x bc + \varphi_y ca + \varphi_z ab ;$$

gdzie

$$\frac{dx}{ds} = \cos(x, \widehat{OD}) = a ; \quad \frac{dy}{ds} = \cos(y, \widehat{OD}) = b ; \quad \frac{dz}{ds} = \cos(z, \widehat{OD}) = c ;$$

Wzór powyższy wykazuje, że wartość wydłużenia jednostkowego zależy tylko od szybkości węgłowych Λ, Λ_1 i Λ_2 oraz wartości $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$; natomiast szybkość kątowa ω żadnej roli tu nie gra, co było zresztą do przewidzenia. Ponadto ze wzoru /1/ wynika, że $\Lambda \lessgtr 1$ t.j. możemy mieć do czynienia zarówno z wydłużeniem, jak i ze skurczeniem.

Wprowadźmy teraz oznaczenia

$$ds = l ; \quad dx = \xi ; \quad dy = \eta ; \quad dz = \zeta ;$$

ξ, η, ζ będą nieskończenie małe współrzędne punktu D

względem układu prostokątnego, mającego początek w punkcie O. l jest odległością OD. Na podstawie powyższego możemy przepisać równanie /1/ jak następuje:

$$\lambda l^2 = \lambda_x \xi^2 + \lambda_y \eta^2 + \lambda_z \zeta^2 + \varphi_x \eta \zeta + \varphi_y \zeta \xi + \varphi_z \xi \eta ;$$

Ponieważ $\lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$ dla cieczy nieściśliwej jest zerem, przeto znaki $\lambda_x \lambda_y \lambda_z$ nie mogą być jednakowe. Z tego wynika, że punkty dla których λ jest stałe, leżą na hyperboloidzie jednopowłokowej lub dwupowłokowej, zależnie od znaku λ. Punkty dla których $\lambda = 0$, leżą na stożku asymptotycznym. Punkty, leżące wewnątrz stożka asymptotycznego przybliżają się do punktu O, zaś punkty leżące zewnątrz stożka od punktu O się oddalają lub odwrotnie.

Chcąc teraz zbadać, jak się porusza element cieczy, musimy znać szybkości względne du, dv, dw p. D. Otóż, przekształcając, mamy:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} dx + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \frac{dy}{2} + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] \frac{dz}{2}$$

Skąd ze względu na wprowadzone oznaczenia jest

$$du = \lambda_x dx + \frac{\varphi_z}{2} dy - \omega_z dy + \frac{\varphi_y}{2} dz + \omega_y dz ;$$

Analogicznie znajdziemy dla pozostałych szybkości:

$$dv = \Lambda_y dy + \frac{\varphi_x}{2} dz - \omega_x dz + \frac{\varphi_z}{2} dx + \omega_z dx;$$

oraz

$$dw = \Lambda_z dz + \frac{\varphi_y}{2} dx - \omega_y dx + \frac{\varphi_x}{2} dy + \omega_x dy;$$

Zastępując dx, dy, dz przez ξ, η, ζ, jak poprzednio, znajdziemy następujące wartości szybkości względnych:

$$du = \left(\Lambda_x \xi + \frac{\varphi_z}{2} \eta + \frac{\varphi_y}{2} \zeta\right) - \left(\omega_z \eta - \omega_y \zeta\right);$$

oraz

$$dv = \left(\Lambda_y \eta + \frac{\varphi_x}{2} \zeta + \frac{\varphi_z}{2} \xi\right) - \left(\omega_x \zeta - \omega_z \xi\right);$$

$$dw = \left(\Lambda_z \zeta + \frac{\varphi_y}{2} \xi + \frac{\varphi_x}{2} \eta\right) - \left(\omega_y \xi - \omega_x \eta\right);$$

Każdą składową szybkości względnej wyraziliśmy tedy jako sumę 2 wielomianów, przyczem 3 wyrazy pierwszego wielomianu dotyczą ruchu postępowego, dwa dalsze wyrazy drugiego - ruchu obrotowego. Łatwo zauważyć ponadto, iż szybkości ruchu postępowego są normalne do otrzymanej poprzednio powierzchni rzędu II-go. Wystarcza w tym celu wyrównać cosinus'y kierunkowe normalnej do powierzchni w p. $(\xi \eta \zeta)$ do cosinusów szybkości postępowej, określonej trzema pierwszymi wyrazami. Zauważmy wreszcie, iż istnieją 3 główne kierunki spółrzędnych, dla których równanie /2/ przybierze prostszą postać:

$$\pm A^2 = \Lambda_x \xi'^2 + \Lambda_y \eta'^2 + \Lambda_z \zeta'^2;$$

t.j. szybkości odkształcenia w tych kierunkach $\varphi_x = \varphi_y = \varphi_z = 0$. Innemi słowy prostopadłościan o krawędziach skierowanych równolegle do kierunku osi głównych elementu, nie zmienia kątów, t.j. pozostaje nadal prostopadłościanem. Reasumując powyższe wyniki, możemy powiedzieć, że z punktu widzenia cynematyki wyodrębniliśmy w cieczy doskonałej następujące ruchy: 1/ ruch poszczególnych elementów, jako całości, oraz 2/ ruch cieczy wewnątrz elementu, który z kolei sprowadza się do: a/ ruchu odkształcenia /3 wyrazy pierwsze/ oraz b/ ruchu obrotowego /2 wyrazy końcowe/.

§38. Twierdzenie o zachowaniu ruchu wirowego w cieczy.

Rozczłonkowawszy w ten sposób ruch cieczy na elementy, zastanowimy się bliżej nad ruchem wirowym. Zwróćmy się tedy do równań Euler'a:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$

Załóżmy, że siły zewnętrzne posiadają potencjał, t.j. istnieje taka funkcja spółrzędnych $U(xyz)$, iż