wysoko, tak, iż powierzchnie swobodne cieczy w naczyniach, które otrzymamy w rzucie, zakreślając z punktu O odpowiednie okręgi, będą zbliżone do płaszczyzn poziomych. Gdybyśmy natomiast nadmiernie powiększyli liczbę obrotów koła, p. O by się obniżył i powierzchnie ekwipotencjalne byłyby tak wyraźnie wklęsłe, że wodaby się odrazu prawie całkowicie wylewała z korytek, nie wykonywując pracy.

§7.

STATYKA GAZÓW.

Jakeśmy już o tem mówili, gazy są pod wielu względami zbliżone do cieczy. Wiele dowodzeń stosuje się przeto do obu tych czynników, gdyż wystarcza tylko przeprowadzić z odpowiedniemi modyfikacjami rozumowanie, dowiedzione dla jednego z nich, aby otrzymać wyniki, słuszne i dla drugiego. Sposób wyprowadzenia równań hydrostatyki był tak ogólny, że równania ostateczne

$$X = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad Y = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y}; \quad Z = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z};$$

muszą być słuszne i dla gazów, o ile i cząsteczkom gazu nie przypiszemy wytrzymałości na rozciąganie i ścinanie. W jednym zachodzi tu tylko zasadnicza różnica. Ciecze przyjmowaliśmy za nieściśliwe, kładąc $\sigma = const.$ Tego rodzaju założenie dla gazów nie odpowiadałoby nawet w grubem przybliżeniu rzeczywistości. Wiemy bowiem, że dla gazów gęstość zmienia się i pod wpływem ciśnienia i pod wpływem temperatury w sposób bardzo znaczny. Wiążąc dopiero tedy wartości ciśnienia p i temperatury t zależnością funkcjonalną $t = \varphi(t)$, odpowiadającą przebiegowi danego zjawiska, czynimy σ funkcją jednej tylko zmiennej, mianowicie ciśnienia. Wprowadźmy wówczas nową funkcję V, określoną jako całka nieoznaczona $\int \frac{dp}{\sigma}$, to równania statyki przekształcą się, jak następuje:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x} = X \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y} = Y\ ; \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z} = Z\ ;$$

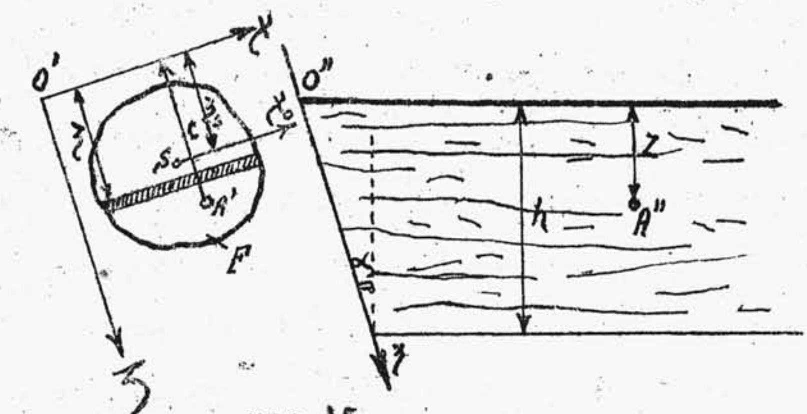
t.j. równania powyższe wskazują, iż równowaga gazów, podobnie jak równowaga cieczy, możliwa jest tylko przy istnieniu potencjału sił, mającego własności podobne, jak przy cieczach. Różnica polega na tem, iż zamiast związku linjowego między p i U, mamy tu następujący związek między V i U:

$$V = U + C\ ;$$

Ponieważ $V = f(p)$; i $p = f_1(V)$; przeto ze związku tego obliczyć możemy ciśnienie w każdym punkcie.

§ 8. PARCIE CIECZY, PODLEGŁEJ SILE CIĘŻKOŚCI NA DNO I ŚCIANKI NACZYNIA.

W pierwszym zadaniu § 4 wykazaliśmy, że w cieczy, będącej w spoczynku, ciśnienie na głębokości Z od poziomu jest $p = p_a + \gamma z$, t.j. $p - p_a = \gamma z$; gdzie p_a oznacza ciśnienie atmosferyczne. Wynika stąd bezpośrednio, iż dla naczynia z dnem poziomem płaskiem o głębokości h, którego przecięcie z płaszczyzną rysunku przedstawione jest na rys.15, ciśnienie na dno



rys.15.

$p_d = p_a + \gamma h$ czyli $p_d - p_a = \gamma h$. Zauważmy, że ogólnie wziąwszy, od dołu działa na naczynie również ciśnienie p_a. Wobec tego istotna przewyżka ciśnienia ponad ciśnienie atmosfery, czyli nadciśnienia będzie $p_d - p_a$. Stąd parcie na powierzchnię F, zakreśloną na płaszczyźnie dna będzie

$$F(p_d - p_a) = F\gamma h$$

A więc w cieczy, podległej tylko działaniu sił ciężkości, parcie na płaskie poziome dno wyraża się ciężarem słupa cieczy, znajdującej się nad dnem. Nie zależy ono przeto od kształtu ścian bocznych i od ilości cieczy, byleby tylko wysokość poziomu była stała.

Musimy w dalszym ciągu rozpatrzeć ciśnienie cieczy na płaską ścianę, tworzącą $\sphericalangle \alpha$ z pionem. Wyodrębnijmy przeto na ścianie pewien kontur, obejmujący pole F; nadto obierzmy na niej układ spółrzędnych $X\xi$, kierując oś X wzdłuż prostej przecięcia płaszczyzny poziomu cieczy z płaszczyzną ściany. Wówczas prostemi, równoległemi do osi X, możemy podzielić kontur na szereg elementarnych pasków. Dla każdego z nich nadciśnienie będzie stałe, i wyniesie $p-p_a=\gamma z$, gdzie z oznacza pionową odległość paska od poziomu, powiązaną z jego spółrzędną ξ równaniem $z=\xi\cos\alpha$. Na zasadzie § 3, jest rzeczą oczywistą, że ciśnienie to będzie prostopadłe do płaszczyzny ściany. A więc parcie elementarne na pasek dF będzie

$$dP=(p-p_a)dF=\gamma z\,dF$$

czyli dla całego konturu

$$P=\int\gamma z\,dF=\gamma\int_F z\,dF$$

Ale całka $\int_F z\,dF$ oznacza moment statyczny pola F względem płaszczyzny poziomu. Oznaczając przeto przez S środek masy pola konturu, zaś przez z_o odległość tego środka od poziomu, możemy napisać, iż $P=\gamma\int_F z\,dF=\gamma z_o F$. Wyobraźmy sobie, że przez p. S prowadzimy część płaszczyzny poziomej o powierzchni F, to parcie cieczy na nią będzie równe parciu na pole istotnego pochyłego konturu F. Prócz wartości parcia całkowitego ważnem jest znalezienie punktu przyczepienia tej wypadkowej parć elementarnych. Wyobraźmy sobie, że ten punkt zaczepienia znajduje się w A w odległości C od osi X, to biorąc sumę momentów elementarnych

$$dP\cdot\xi=(p-p_a)dF\xi=\gamma z\,dF\cdot\xi$$

względem osi X, mamy $\int_F \gamma z\,dF\xi = Pc$. Ale zaś

$$\int_F \gamma z\,dF\xi=\int_F \gamma\xi\cos\alpha\,dF\xi;$$

Wobec tego

$$\gamma\cos\alpha\int_F \xi^2 dF=\gamma\xi_s\cos\alpha\,Fc;$$

czyli

$$\int_F \xi^2 dF = J_x = F\xi_s c;$$

gdzie przez J_x oznaczyliśmy moment bezwładności pola konturu względem osi X. Prowadząc przez środek masy prostą $X_0 \parallel X$ wiemy, że

$$J_x = J_{x0} + F\xi_s^2$$

gdzie J_{x0} oznacza moment bezwładności względem osi X_0. Stąd

$$J_{x0}+F\xi_s^2=F\xi_s c$$

czyli

$$c=\xi_s+\frac{J_{x0}}{F\xi_s} \qquad /1/$$

Widać stąd, że punkt przyczepienia parcia wypadkowego, czyli t.zw. "środek ciśnienia", leży zawsze poniżej środka masy konturu. Wzór powyższy można przekształcić, pamiętając, że $J_{x0}=Fk_0^2$, gdzie k_0 - ramię bezwładności konturu względem prostej X_0. Stąd

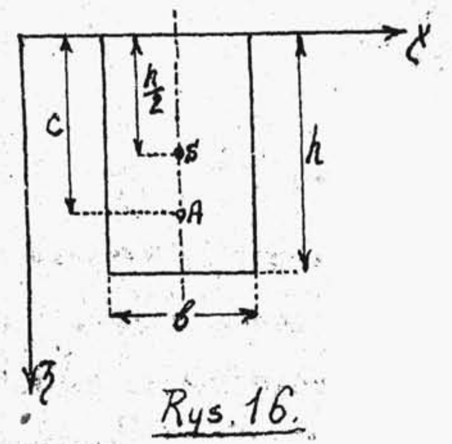
$$c=\xi_s+\frac{Fk_0^2}{F\xi_s}=\xi_s+\frac{k_0^2}{\xi_s};$$

czyli

$$c\xi_s = \xi_s^2 + k_o^2 ; \qquad /2/.$$

Analogiczny wzór wyprowadziliśmy w swoim czasie w mechanice, znajdując długość c zredukowanego wahadła dla wahadła fizycznego, w którem środek masy jest odległy o ξ_s od osi obrotu, zaś ramię bezwładności względem prostej, równoległej do osi obrotu i przechodzącej przez środek masy, jest równe k_o. Na szeregu przykładów wyjaśnimy bliżej ten wynik. Z góry tylko zauważymy, że dla konturów symetrycznych względem jakiejś prostej, równoległej do osi ξ, środek ciśnienia posiada tę samą odciętą, co i środek masy; powyższa wartość rzędnej c określa tedy najzupełniej jego położenie.

ZADANIE. Znaleźć środek ciśnień na ścianę pionową, prostokątną o szerokości b pod działaniem słupa wody o wysokości h /rys.16/.



Rys. 16.

Mamy tu właśnie przypadek przekroju symetrycznego, przyczem

$$\xi_s = h/2 ; \quad k_o^2 = h^2/12$$

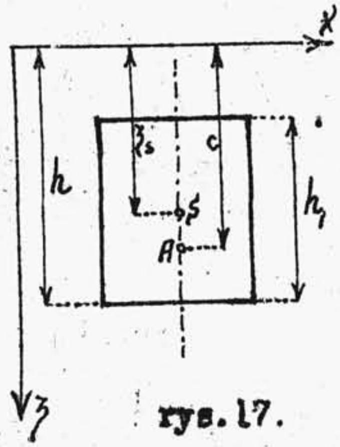
Stąd, na zasadzie wzoru /2/ jest:

$$c\,h/2 = (h/2)^2 + \frac{h^2}{12} ;$$

czyli

$$c = \frac{2}{3} h ;$$

<u>ZADANIE.</u> Znaleźć środek ciśnień na ścianę pionową, prostokątną, o szerokości b i wysokości h_1, licząc od dna, jeśli wysokość słupa cieczy wynosi h /rys.17/.



rys.17.

Podobnie, jak poprzednio, mamy tu:

$$\zeta_s = \frac{2h-h_1}{2}; \quad k_0^2 = \frac{h_1^2}{12}.$$

Wobec tego na zasadzie wzoru /2/ będzie:

$$c\,\frac{2h-h_1}{2} = \left(\frac{2h-h_1}{2}\right)^2 + \frac{h_1^2}{12}$$

czyli

$$c = \frac{1}{3}\cdot\frac{6h^2-6hh_1+2h_1^2}{2h-h_1};$$

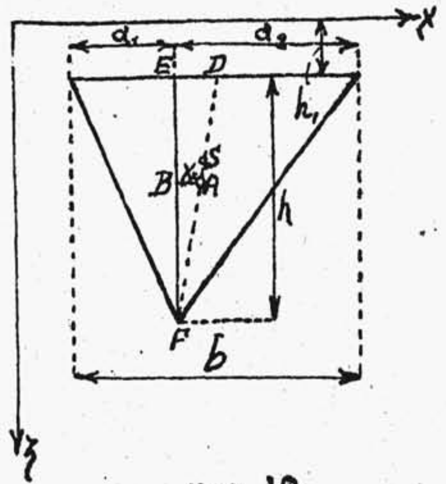
<u>ZADANIE.</u> Znaleźć środek ciśnień na kołowy wykrój ściany naczynia, o ile promień koła wynosi R, zaś odległość środka od poziomu cieczy jest h.

A więc mamy dane $\zeta_s = h$; $k_0^2 = \frac{R^2}{4}$, wobec czego na zasadzie wzoru /2/ musi być:

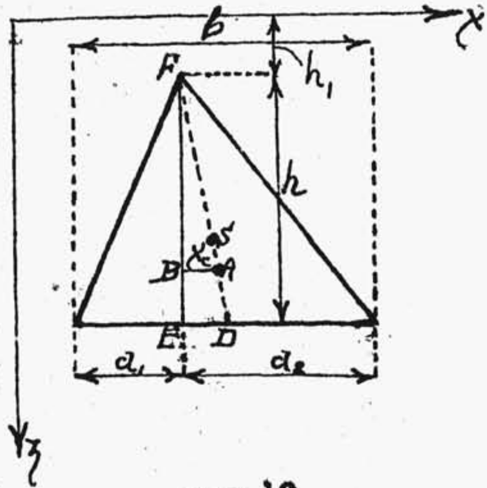
$$ch = h^2 + \frac{R^2}{4}; \qquad \text{skąd} \qquad c = h + \frac{R^2}{4h};$$

<u>ZADANIE.</u> Znaleźć środek ciśnień na trójkątny wykrój ściany, o ile podstawa trójkąta jest równoległa do poziomu cieczy /rys.18,19/.

Rozpatrzymy tu 2 wypadki, zależnie od tego, czy wierzchołek trójkąta jest skierowany w stronę osi ζ /rys.18/, czy nie /rys.19/.



rys.18.



rys.19.

W pierwszym wypadku

$$\zeta_s = \frac{3h_1 + h}{3}; \quad k_0^2 = \frac{h^2}{18};$$

więc

$$c\,\frac{3h_1 + h}{3} = \left(\frac{3h_1 + h}{3}\right)^2 + \frac{h^2}{18};$$

skąd

$$c = h_1 + h/2 \cdot \frac{2h_1 + h}{3h_1 + h};$$

Widać stąd, że dla $h_1 = 0$ będzie $c = h/2$;

W drugim wypadku

$$\zeta_s = \frac{3h_1 + 2h}{3} \qquad k_0 = \frac{h^2}{18}$$

więc

$$c\,\frac{3h_1 + 2h}{3} = \left(\frac{3h_1 + 2h}{3}\right)^2 + \frac{h^2}{18};$$

skąd

$$c = h_1 + \frac{h}{2}\,\frac{4h_1 + 3h}{3h_1 + 2h};$$

przyczem dla $h_1 = 0$ jest $c = \frac{3}{4}h$.

Powyższe 2 przykłady pozwalają znaleźć rzędną środka ciśnień dla wszelkiej figury, dającej się rozłożyć na sumę lub różnicę trójkątów.

Ważną jest jeszcze rzeczą znaleźć odcinek X_c, gdzie FE jest wysokością trójkąta, charakteryzującą położenie tego środka A. Prosta uwaga pozwoli nam go znaleźć. Wykazaliśmy mianowicie w jednem z poprzednich zadań, że dla prostokąta środek ciśnień leży na osi pionowej tego prostokąta. Podzielmy przeto trójkąt na nieskończoną ilość pasków prostokątnych prostemi, równoległemi do osi X, to miejscem geometrycznem środków ciśnień tych pasków będzie środkowa FD trójkąta. Przypuśćmy, że środek ciśnień wypadkowej leży na środkowej w jakimś punkcie A /oczywiście poniżej środka masy S /. Wówczas z podobieństwa trójkątów FED i FBA wynika, że

$$\frac{FB}{FE} = \frac{AB}{ED} \text{ t.j. } \frac{FB}{h} = \frac{X_c}{\frac{a_2 - a_1}{2}} \text{ gdyż } ED = \frac{a_2 - a_1}{2}$$

jako odcinek zawarty między spodkiem wysokości E a środkiem boku D. Wobec tego

$$X_c = \frac{a_2 - a_1}{2} \cdot \frac{FB}{h}$$

t.j. w pierwszym przypadku dla $FB = h + h_1 - c$ jest

$$X_c = \frac{a_2 - a_1}{2} \cdot \frac{4h_1 + h}{3h_1 + h};$$

zaś w drugim dla $FB = c - h_1$ mamy