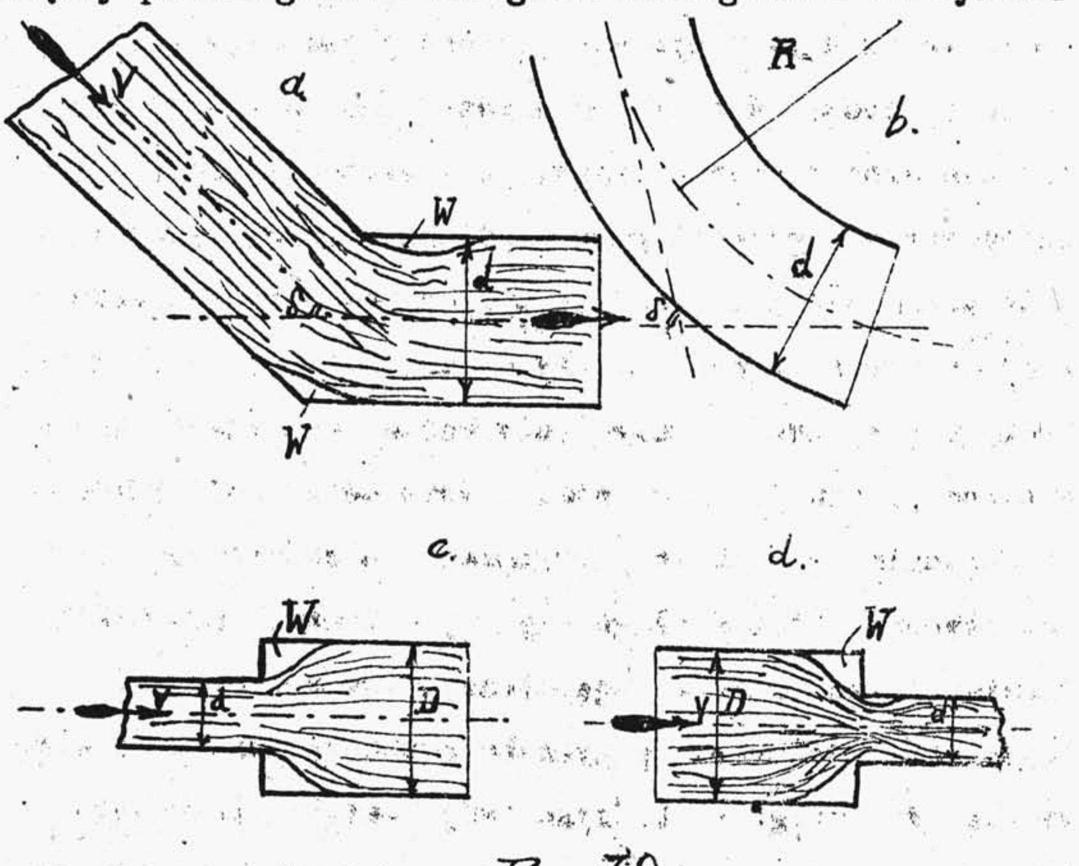
cach po strugach sąsiednich, co dowodzi, jak złożone ruchy muszą one wykonywać.

§ 31. OPORY POSZCZEGÓLNE W PRZEWODACH.

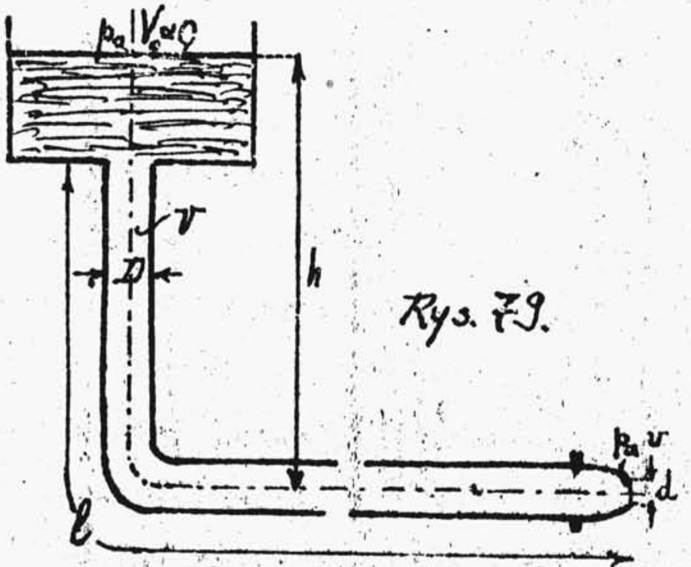
W poprzednim paragrafie wskazaliśmy na powstawanie oporów przy przepływie naskutek lepkości cieczy i związanych z nią oddziaływań stycznych między poszczególnemi strugami. Analogicznie do zjawisk



Rys. 78.

wypływu spotykamy się tu jeszcze z oporami drugorzędnymi, które można położyć na karb dławienia strumienia cieczy. Tak więc, gdy przewód ulega raptownemu zgięciu /rys.78 a/ lub w sposób ciągły /rys.78 b/ zmienia swój kierunek, strugi nie przystają całkowicie do ścianek naczynia, lecz istnieją miejsca W wypełnione wirującemi cząstkami cieczy. Podobnie przy zmianie przekroju, np. w wypadku przegródek, kurków, raptownej zmiany średnic w cylindrycznych przewodach /rys.78 c i d/ obserwujemy to zjawisko dławienia strug. Zresztą poprzedni wypadek zmiany kierunku przewodu okazał się w swych skutkach analogiczny do zmiany przekroju, gdyż możemy nie brać pod uwagę części wirującej strumienia. Dotychczasowa teorja przepływu uzależniała wysokość straconą tylko od długości przewodu. Widzimy jednak, że do otrzymanej w ten sposób wartości h_s należy dołączyć wszystkie te wysokości stracone, które powstają naskutek dławienia. Zastanówmy się przeto, jak te ostatnie wyliczyć. Otóż prawdopodobnie zachodzi tu szereg uderzeń. Gdybyśmy umieli analitycznie przedstawić stan dynamiczny i cynematyczny cieczy w miejscach zmiany kierunku lub przekroju przewodu, możnaby było wówczas zagadnienie rozwiązać na zasadzie prawa Carnot'a. Ponieważ jednak niema jeszcze przejrzystej teorji pod tym względem, więc dla uproszczenia wyliczeń zakładamy, iż w przybliżeniu wysokość stracona jest dla poszczególnych przekrojów proporcjonalna do kwadratu średniej szybkości w cieczy, t.j. $h_s = \zeta \, v^2/2g$, gdzie przez ζ oznaczamy pewien empiryczny współczynnik. Dodawania powyższych wysokości straconych do poprzednio wyliczonej wartości h_s można sobie w ten sposób oszczędzić, że podwyższamy tylko odpowiednio spółczynniki przy tamtych wyliczeniach.

Na szeregu przykładów postaramy się lepiej zobrazować teorję przepływu.



Rys. 79.

ZADANIE. Rozpatrzeć wypływ przez długą rurę zaopatrzoną w przystawkę /rys. 79/

Przypuśćmy, że naczynie z cieczą jest tak wielkie, iż szybkość cieczy w niem można pominąć, t.j. $V_0 \cong 0$. Zastosujmy wówczas równanie Bernoulli'go do krańcowych przekrojów strugi. Wówczas

$$p_a/\gamma + h = v^2/2g + p_a/\gamma + h_s ,$$

gdzie zgodnie z umową uwzględnimy tylko wartość h_s wynikającą z tarcia, zwiększającą przy niej odpowiednio spółczynnik. Oznaczając całkowitą długość przewodu przez L, wiemy, że dla kołowego przekroju

$$h_s = Li = \frac{4\varepsilon}{D} V^2 L;$$

gdzie D wyraża wartość średnicy przewodu. Na zasadzie równania ciągłości strugi możemy założyć ponadto, iż

$$V = v\left(\frac{d}{D}\right)^2$$

gdzie przez d oznaczyliśmy krańcową średnicę przystawki. Wobec tego

$$h_s = \frac{4\varepsilon}{D} v^2 \left(\frac{d}{D}\right)^4 L;$$

zaś równanie Bernouille'go przybierze ostatecznie kształt:

$$h = \frac{v^2}{2g} + \frac{4\varepsilon}{D} v^2 \left(\frac{d}{D}\right)^4 L;$$

Stąd łatwo już obliczyć wartość końcowej szybkości

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{8\varepsilon g L d^4}{D^5}}};$$

oraz szybkości w przewodzie

$$V = v\left(\frac{d}{D}\right)^2 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 + \frac{8\varepsilon g L}{D}}};$$

Ponieważ obliczenia są tu dość złożone, więc jest rzeczą pożyteczną, wyznaczywszy wartości szybkości v i V, obliczyć stąd

$$h_s = \frac{4\varepsilon}{D} V^2 L = h \frac{\frac{8\varepsilon gL}{D}}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 + \frac{8\varepsilon gL}{D}};$$

gdzie liczba

$$100 \frac{\frac{8\varepsilon gL}{D}}{\left(\frac{D}{d}\right)^4 + \frac{8\varepsilon gL}{D}};$$

wskaże ile procent wysokości h ginie dla nas bezużytecznie, i otrzymane wartości wstawić do równania Bernouilli'ego, które powinno się wówczas stać tożsamością. Weźmy przykład liczbowy. Niech

$$L = 1000 \text{ m. } h = 50 \text{ m. } D = 10 \text{ cm. } d = 5 \text{ cm } \varepsilon = 1/2500$$

Wówczas

$$d/D = 1/2; \quad \left(d/D\right)^4 = 1/16;$$

zaś wyrażenie

$$\frac{8\varepsilon gL}{D} = \frac{8 \cdot 9{,}81 \cdot 1000}{2500 \cdot 0{,}1} = 314;$$

czyli

$$h_s = h \frac{314}{16+314} = 0{,}95 h;$$

Widzimy tedy, że straty są bardzo znaczne, gdyż tylko 5 % całkowitej wysokości określa użyteczną energję potencjalną cieczy. A więc wypływ się odbędzie tak, jakby ciecz spadała z wysokości $0{,}05h$ bez przewodu, t.j.

$$v = \sqrt{2g \cdot 0{,}05h} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}05 \cdot 50} = 7 \text{ m/sek}$$

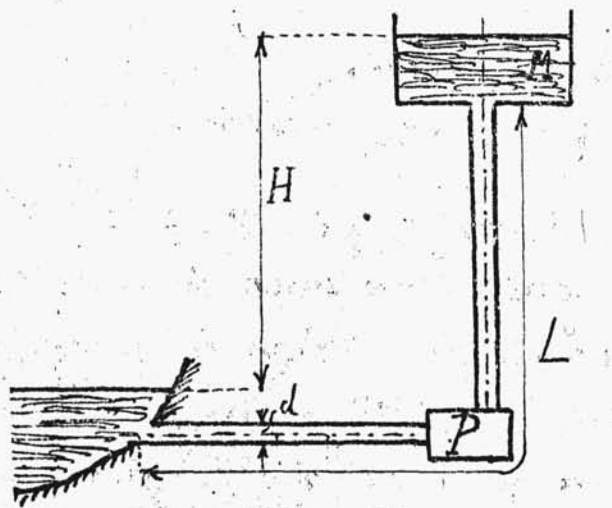
Stąd szybkość

$$V = v\left(d/D\right)^2 = 1{,}75 \text{ m/sek.}$$

Przy projektowaniu długich przewodów wykonywamy zwykle kilka projektów, zakładając różne prędkości przepływu, wybierając później z nich ten, który najlepiej odpowiada warunkom praktycznym.

ZADANIE. Obliczyć moc silników, potrzebnych do napędu pomp obsługujących wodociąg /rys.80/.

Jak wiemy, sieć wodociągowa rozprowadza wodę pod ciśnieniem do poszczególnych pomieszczeń. Ażeby to ciśnienie uzyskać, musimy przenieść za pomocą przewodu wodę ze zbiornika naturalnego do pewnego innego zbiornika /M/, znajdującego się na określonej wysokości H ponad poziomem wody w zbiorniku naturalnym przy długości przewodu L.



Rys. 80.

Jest rzeczą oczywistą, że przy określonym wydatku $Q \ m^3/sek$ moc N silnika, dającego potrzebną pracę, zależy od wartości średnicy przewodu d. Otóż w ciągu 1 sek. praca użyteczna silnika po uwzględnieniu jego skutku użytecznego η

i oporów szkodliwych wyniesie

$$\eta . 75 N = Q\gamma (H + h_s)$$

gdzie γ oznacza ciężar właściwy wody. Ale dla przekroju kołowego znaleźliśmy, iż wysokość stracona

$$h_s = \lambda \frac{Q^2}{d^5} L,$$

zaś skutek użyteczny stosowanych zwykle do tego celu pomp, przy uwzględnieniu różnych strat dodatkowych, wynosi $\eta = 0,50$. Wobec tego

$$0,50 \cdot 75 N = Q\gamma (H + h_s)$$

czyli

$$N = 0,0267 \gamma (H + h_s) Q$$

lub ze względu na $\gamma = 1000\ kg/m^3$ otrzymamy

$$N = 26,7 (H + h_s) Q = 26,7 (H + \lambda \frac{Q^2}{d^5} L) Q$$

Widzimy stąd, że najdrobniejsze zmiany średnicy wpływają znacznie na wartość N. Nie bierzemy jednak tej z nich, dla której moc jest najmniejsza, bo w grę wchodzi tu jeszcze remont i amortyzacja silnika i przewodów, a w danym razie on jest miarodajny przy takich urządzeniach, jak wodociągi. Praktycznie tedy probujemy szereg wartości, obierając tę z nich, dla której koszta okażą się najmniejsze.

Chcąc dać pojęcie o zależnościach liczbowych rozpatrzmy przykład, w którym zapomocą przewodu o długości $L = 1500$ mamy ilość $Q = 50 \frac{litr}{sek}$ wody przenieść na wysokość 15 mtr. z szybkością $v = 1\ m/sek$. Otóż przy szybkości $1\ m/sek$ przez każdy cm^2 przekroju przepływa ilość $q = 0{,}1\ \frac{litr}{sek} = 6\ \frac{litr}{min} = 360\ \frac{litr}{godz}$ cieczy. Przy wydatku $Q = 50\ \frac{litr}{sek}$ musi dla $v = 1\ m/sek$ wartość przekroju wynosić $F = 500\ cm^2$, zaś wysokość stracona

$$h_s = \lambda L\ Q^2/d^5 = 1/400 \cdot 1500\ \frac{0{,}05^2}{0{,}25^5} = 9{,}6$$

Gdybyśmy natomiast przy tych samych innych wartościach założyli $v = 2\ m/sek$, wówczas okaże się, iż $d \cong 17{,}5\ cm.$ $h_s = 57\ m$. Odpowiednie moce pompy wyniosą ze wzoru $N = 26{,}7(H + h_s)Q$ w pierwszym przypadku 33, zaś w drugim 96 HP. Widać tedy, jak wielki wpływ wywiera pozornie nieznaczna zmiana średnicy na moc silnika.

ZADANIE. Obliczyć przewód zastępczy.

Przy zwiększaniu produkcji fabryki częstokroć okazuje się, że istniejący przewód dopływowy jest za mały. Mamy wówczas dwie drogi działania. Można bowiem powiększyć liczbę przewodów, albo też zastąpić je przez jeden przewód o odpowiednio większej średnicy. Postępujemy tak, aby ta zmiana wypadła jaknajtaniej, o ile niema specjalnych okoliczności, które przemawiają za którymś ze sposobów. Zachodzi pytanie, jak rozstrzygnąć, co wypadnie drożej. Otóż cena metru bieżącego przewodu jest w przybliżeniu proporcjonalna do średnicy. Obliczmy przeto, w jakim stosunku do siebie znajdują się poszczególne przewody i przewód zastępczy. Długość wszystkich tych przewodów i ciśnienia krańcowe, a więc i wysokość stracona h_s, są dla wszystkich te same. Oznaczając tedy wspólną długość przez L, średnicę przewodów zastępowanych przez $d_1, d_2, \ldots d_n$, zaś ich wydatki przez $Q_1, Q_2 \ldots\ldots Q_n$, możemy napisać, iż

$$h_s = \lambda \frac{Q_1^2}{d_1^5} L = \lambda \frac{Q_2^2}{d_2^5} L = \ldots\ldots = \lambda \frac{Q_n^2}{d_n^5} L;$$

skąd

$$Q_1 = \sqrt{\frac{h_s d_1^5}{\lambda L}}; \quad Q_2 = \sqrt{\frac{h d_2^5}{\lambda L}}; \ldots\ldots \quad Q_n = \sqrt{\frac{h d_n^5}{\lambda L}};$$

Ponieważ przewód zastępczy o średnicy D posiada wydatek Q, równy sumie wydatków poszczególnych przewodów, więc

$$Q = \sqrt{\frac{h_s D^5}{\lambda L}} = \sum_1^n Q_i = \sum_1^n \sqrt{\frac{h_s d_i^5}{\lambda L}};$$

czyli

$$\sqrt{D^5} = \sum_1^n \sqrt{d_i^5};$$

Wobec tego przewód zastępczy wypada zawsze taniej, niż poszczególne przewody mniejszej średnicy.

ZADANIE. Obliczyć przewód z bocznicami.

Doprowadzając wodę do instalacyj, często budujemy jeden główny przewód, od którego się następnie rozgałęzia szereg bocznic /np. przy wodociągach/. Chcąc znaleźć dokładnie wydatek każdej takiej bocznicy, należałoby znać dokładnie ich rozmieszczenie, kształt, ilość. Możliwe jest to tedy dopiero wówczas, gdy urządzenie zostało już wykonane. Przy projektowaniu większa część tych danych jest nieznana. Chcąc mimo to zagadnienie zgruba rozwiązać, zakładamy istnienie nieskończenie wielu bocznic, dających ciągły odpływ cieczy. Załóżmy tedy, że całkowity wydatek przewodu składa się z 2-ch części, z których pierwsza Q odpływa przez bocznicę, zaś druga q dochodzi do końca przewodu. Jeśli długość całkowitego przewodu wynosi L, to na odległości X od początku na zasadzie ciągłego rozkładu bocznic wydatek przewodu głównego wyniesie

$$Q_x = q + Q\frac{L-x}{L}$$

Stąd elementarna wysokość stracona

$$dh_s = i\,dx = \frac{\lambda\left(q+Q\frac{L-x}{L}\right)^2}{D^5}dx = \frac{-L\lambda\left(q+Q\frac{L-x}{L}\right)^2}{QD^5}d\left(Q\frac{L-x}{L}\right),$$

czyli całkowita wysokość

$$h_s = \int_0^L dh_s = -\left/\frac{L\lambda\left(q+Q\frac{L-x}{L}\right)^3}{3QD^5}\right/_0^L = \frac{\lambda L}{3QD^5}\left(3q^2Q+3qQ^2+Q^3\right) = \frac{\lambda L}{D^5}Q_z^2;$$

gdzie wprowadziliśmy zastępczy wydatek

$$Q_z = \sqrt{q^2+Qq+Q^2/3};$$

Zauważymy, że w wyrażeniu

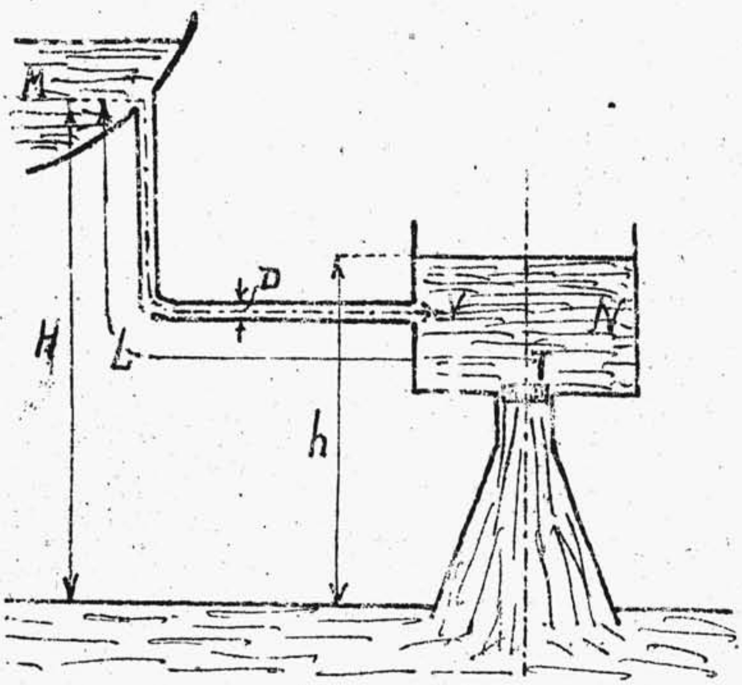
$$Q_z = \sqrt{\left(q+Q/2\right)^2+Q^2/12}$$

możemy rozwinąć dwumian pod pierwiastkiem tak, iż w przybliżeniu

$$Q_2 = q + 0{,}55\,Q\,;$$

Reasumując tedy to wszystko, możemy powiedzieć, iż przewód z bocznicami liczymy, jak zwykły przewód, dobierając tylko odpowiednio wydatek zastępczy Q_2. Ze względu na istnienie rozgałęzień bocznych byłoby wskazane budować przekrój główny schodkowy, zmniejszając średnicę przewodu w miarę zmniejszania wydatku.

ZADANIE. Przewód określonego przekroju F i długości L prowadzi wodę ze źródła M, położonego na wysokości H nad poziomem odpływu do zbiornika N, z którego zasilane są turbiny /rys.81/.



Rys. 81.

Przypuśćmy, iż źródło M dostarcza wody z nadmiarem. Jaka ma być wysokość h poziomu w zbiorniku N, aby moc turbin była największa?

Mamy tu przepływ o otworach

zatopionych, więc w myśl równania Bernouille'go, zastosowanego do przekrojów krańcowych przewodu jest

$$H - h = v^2/2g + h;$$

gdzie V oznacza szybkość wypływu. Jeśli wydatek przez przewód wynosi Q, to $v = Q/F$, zaś

$$H - h = Q^2/2F^2g + \lambda Q^2/D^5 \cdot L$$

tak iż

$$Q = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1/F^2 + \frac{2g\lambda L}{D^5}}};$$

Stąd energja potencjalna cieczy:

$$E = Q\gamma h = \sqrt{\frac{2g\gamma^2}{1/F^2 + \frac{2g\lambda L}{D^5}}}\sqrt{(H-h)h^2};$$

Uważając w tym wzorze h za zmienne, widzimy, że maximum E ma miejsce dla $\frac{dE}{dh} = 0$, t.j. gdy

$$2Hh - 3h^2 = 0;$$

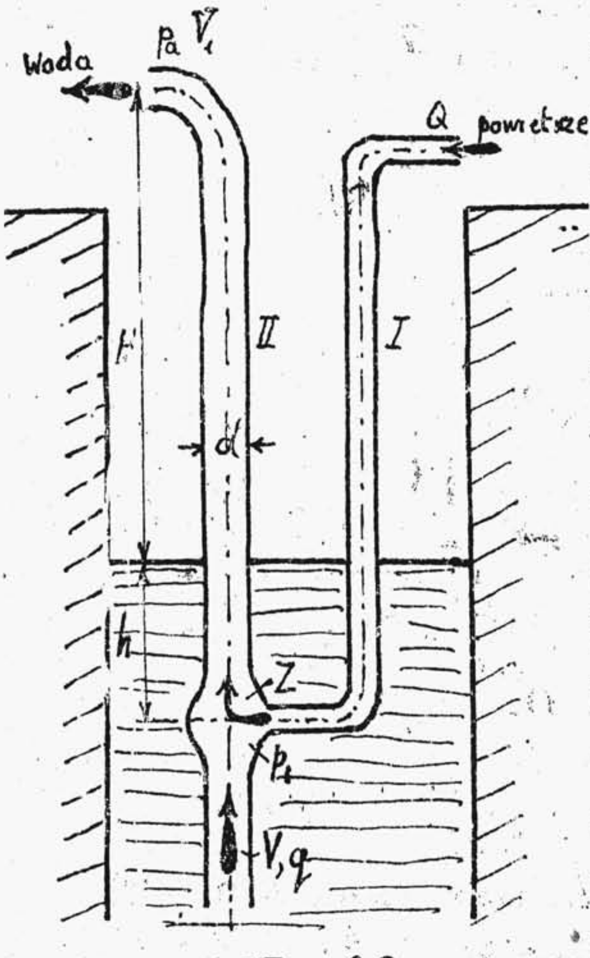
czyli

$$h = 2/3 H;$$

Chcąc tedy mieć jaknajwiększy zapas energji, należy w powyższy sposób ustosunkować h i H.

ZADANIE. Zbadać proces podnoszenia cieczy, zapomocą sprężonego powietrza /rys.82/.

W studniach artezyjskich niezbyt głębokich stosujemy do podnoszenia wody zwykłe pompy. Często jednak woda znajduje się tak głęboko, że użycie podobnego urządzenia okazuje się, jeśli nie niemożliwem, to w każdym razie bardzo trudnem. Przy tak wielkich wymiarach należałoby już bowiem poważnie się liczyć z wagą konstrukcji; oprócz tego umieszczenie pompy w studni małej średnicy jest zagadnieniem skomplikowanem. Używamy tedy w tym celu sprężonego powietrza, które, rozprężając się, podnosi się wraz z wodą. Tak więc, wtłoczywszy powietrze przez przewód I, sprowadzamy w zgrubieniu Z zmieszanie się powietrza z wodą, która to mieszanina wydobywa się następnie przez przewód II nazewnątrz. Ponieważ zaś powietrze podczas podnoszenia mieszaniny w przewodzie II ulegać będzie rozprężaniu, więc otrzymamy istotnie przepływ przy zmianie gęstości. Załóżmy, że przy ciśnieniu atmosferycznem p_a wydatek objętościowy powietrza wynosiłby Q m^3/sek /w rzeczywistości powietrze



Rys. 82.

jest sprężone/, niech ponadto wydatek objętościowy wody w przewodzie II będzie q. Zastosujmy zasadę zachowania energji do przepływu całkowitego obu czynników. Załóżmy przeto, że powietrze rozpręża się izotermicznie od ciśnienia p_1 do p_a, co o tyle odpowiada rzeczywistości, że woda gra tu rolę źródła o stałej temperaturze. Wówczas praca wykonana podczas rozprężania wyrazi się wzorem

$$Q p_a \lg p_1/p_a$$

Uwzględnijmy teraz pracę pożyteczną i opory. Otóż równocześnie podnosi się $q\ m^3$ wody na wysokość H, do której należy dołączyć jeszcze wysokość straconą h_s w przewodzie, tak iż praca pochłonięta wyniesie $q\gamma(H+h_s)$. Pomijając pozatem szybkość wejściową cieczy, możemy powiedzieć, że w czasie przepływu energja kinetyczna wody wzrosła o $\frac{v_1^2}{2g} q\gamma$, zaś zmianę energji kinetycznej powietrza można śmiało pominąć ze względu na nieznaczną masę. Wobec tego ostatecznie możemy napisać, iż

$$Q p_a \lg p_1/p_a - q\gamma H - q\gamma h_s - v_1^2/2g\, q\gamma = 0 \quad (1)$$

Wprowadzamy dodatkowe oznaczenie:

$$Q/q = n; \quad p_a = \gamma h_a$$

wówczas, pomijając spadek ciśnienia wywołany przez szybkość wejściową V możemy napisać, jak w hydrostatyce, iż

$$p_1 \simeq \gamma(h + h_a)$$

Nazywając jeszcze całkowitą długość przewodu II przez

$$L \simeq h + H$$

widzimy, iż

$$h_s = \frac{4\varepsilon L}{d} V_1^2;$$

Pochodzi to stąd, że wprawdzie szybkość przepływu jest wzdłuż całego przewodu II zmienna, to jednak, nadając jej maksymalną wartość V_1, możemy założyć, że spółczynnik ε został tak zmieniony, aby równość była mimo to słuszna. Zauważywszy jeszcze z warunków zadania, iż

$$V_1 = V(n+1)$$

możemy przekształcić równanie /1/ w następujący sposób:

$$n h_a \lg\left(1 + h/h_a\right) - H - \frac{4\varepsilon}{d}(h+H)(n+1)^2 V^2 -$$

$$- \frac{1}{2g}(n+1)^2 V^2 = 0;$$

skąd

$$V = \sqrt{\frac{n h_a \lg\left(1+\frac{h}{h_a}\right) - H}{(n+1)^2\left[\frac{4\varepsilon(h+H)}{d} + \frac{1}{2g}\right]}} \; ; \quad /2/$$

Należy pamiętać, iż V jest prędkością wejściową wody do przewodu II, t.j. tą prędkością, którą posiadałaby woda, gdyby poruszała się w przewodzie II bez powietrza przy zachowaniu wydatku q. Innemi słowy V jest wydatkiem wody na jednostkę przekroju przewodu II.

Jeśli przy danej instalacji chcemy uzyskać jaknajwiększy wydatek q, a zatem jaknajwiększe V, wówczas należy tak dobrać stosunek n wydatków objętościowych powietrza i cieczy, aby

$$\frac{dV}{dn} = 0 \; ;$$

t.j.

$$(n+1)^2 h_a \lg\left(1+\frac{h}{h_a}\right) - 2\left[n h_a \lg\left(1+\frac{h}{h_a}\right) - H\right] \cdot (n+1) = 0 \; ;$$

skąd

$$n_o = \frac{h_a \lg\left(1+\frac{h}{h_a}\right) + 2H}{h_a \lg\left(1+\frac{h}{h_a}\right)} = 1 + \frac{2H}{h_a \lg\left(1+\frac{h}{h_a}\right)}$$

Jakkolwiek więc pozornie mogłoby się zdawać, że zwiększając ilość powietrza powiększamy równocześnie ilość zassanej wody, teorja wskazuje, że tak bynajmniej nie jest, gdyż po przekroczeniu pewnej wartości n_o stosunku obu wydatków ilość ta będzie spadać przy dalszem zwiększaniu n. Tak np. dla

$$h = H = h_a = 10 \, mtr.$$

jest $n_o \cong 4$, zaś przy większych wartościach n wydatek q spada. Zwykle bierzemy n cokolwiek mniejsze od n_o, gdyż wartość q przechodzi w tym punkcie przez maximum. Niższą granicą dla n będzie wartość

$$n_1 = \frac{H}{h_a \lg(1 + h/h_a)}$$

Przy tej wartości, jak to widać ze wzoru /2/, będzie $V = 0$; zauważmy dalej, że zwiększenie q ma i swoje złe strony, uwarunkowane zwiększaniem się oporów przy szybszym przepływie. Najlepiej się to okaże z rozpatrzenia wartości skutku użytecznego η. Biorąc bowiem stosunek pracy pożytecznej do całkowitej pracy włożonej, otrzymamy

$$\eta = \frac{q \gamma H}{Q p_a \lg(1 + h/h_a)} = \frac{H}{h_a n \lg(1 + h/h_a)}$$

Widać stąd, że przy wartościach n bliskich do najmniejszej granicznej wartości n_1, skutek użyteczny jest bliski do jedności. Przy zwiększaniu n

skutek użyteczny stale się zmniejsza. Ponieważ przy małem n całe urządzenie chybia celu, ze względu na odpowiadający małemu n mały wydatek q, stosujemy zwykle n bliskie do n_o, aby osiągnąć q możliwie wielkie, jakkolwiek wtedy praca jest nieekonomiczna. Dalej należałoby zbadać wpływ głębokości zanurzenia h na wartość skutku użytecznego η co można przeprowadzić przy pomocy powyżej wprowadzonych wzorów. Wyniki takiego badania wskazują, iż przy małych H najkorzystniejsza głębokość zanurzenia jest $h \cong 1{,}5H$, zaś przy H bardzo dużych głębokość ta wynosi $h \cong 0{,}5H$. Należy tu pamiętać, iż powiększanie h często nie jest możliwe ze względu na głębokość studni.

Zauważmy wreszcie, że rozpatrując wartość wysokości straconej h_s, pomijaliśmy istnienie oporów drugorzędnych. Należy przeto unikać wszelkich zmian kształtu i kierunku przewodów. Nie budując tedy rozgałęzień, lepiej jest ponad studnią umieścić zbiornik wody, stamtąd zaś dopiero rozprowadzać po przewodach.

<u>ZADANIE.</u> Zaprojektować instalację do podnoszenia wody sprężonem powietrzem /rys.82/, jeśli

$H = 50$ mtr. $h = 40$ mtr. $h_a = 10$ mtr. $\varepsilon = 1/2500$; $d = 0{,}1$ mtr.

Obliczmy przedewszystkiem wartość $\lg\left(1 + h/h_a\right)$;