t.j. otrzymaliśmy wyniki takie same jak w pierwszym przykładzie poprzedniego paragrafu.

2/ Podobnie dla

$$f(z + ir\cos\varphi) = Ae^{\frac{z + ir\cos\varphi}{a}};$$

jest

$$\phi = Ae^{z/a}\int_0^{\pi} e^{\frac{ir\cos\varphi}{a}}\,d\varphi = \pi A e^{z/a} J_0$$

gdzie J_0 oznacza znaną już nam funkcję Bessel'a.

§49. Całkowanie równania potencjału w przypadku ogólnym ruchu niewirowego.

Dotychczas mówiliśmy o całkowaniu równań potencjału w przypadku ruchu symetrycznego. Z kolei zastanowimy się, jak znajdować całki szczególne równania różniczkowego potencjału prędkości przy ruchu niewirowym najzupełniej ogólnym. Wyprowadziliśmy mianowicie w układzie biegunowym dla ruchu niewirowego następujące równanie różniczkowe:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0; \qquad /1/$$

Wykażemy jeden ze sposobów rozwiązywania powyższego równania różniczkowego. Załóżmy tedy, że potencjał ma postać:

$$\sin(\lambda\vartheta)\, r^m f(z/r); \quad \text{lub} \quad e^{\lambda\vartheta} r^m f(z/r);$$

gdzie λ i m oznaczają dowolne stałe, co do wartości których nie robimy chwilowo żadnych zastrzeżeń, zaś f przedstawia jakąś funkcję parametru z/r. Wypisując równolegle wartości poszczególnych pochodnych w obu wypadkach znajdziemy, że

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \sin \lambda\vartheta \left(m r^{m-1} f - r^{m-2} z f' \right);$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \sin \lambda\vartheta\, r^{m-2} \left[m(m-1) f - 2(m-1) \tfrac{z}{r} f' + \tfrac{z^2}{r^2} f'' \right];$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \sin \lambda\vartheta \cdot r^{m-2} f'';$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} = -\lambda^2 \sin \lambda\vartheta\, r^m f(z/r);$$

lub

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = e^{\lambda\vartheta} \left(m r^{m-1} f - r^{m-2} z f' \right);$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = e^{\lambda\vartheta} r^{m-2} \left[m(m-1) f - 2(m-1) \tfrac{z}{r} f' + \tfrac{z^2}{r^2} f'' \right];$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = e^{\lambda\vartheta} r^{m-2} f'';$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \vartheta^2} = \lambda^2 e^{\lambda\vartheta} r^m f(z/r);$$

Podstawiając powyższe wartości do równ./1/ znajdziemy dla obu przypadków równanie następujące:

$$\mp \lambda^2 f + m(m-1) f - 2(m-1) \tfrac{z}{r} f' + \tfrac{z^2}{r^2} f'' + m f - \tfrac{z}{r} f' + f'' = 0;$$

gdzie znak $-$ tyczy się wypadku pierwszego, zaś $+$ drugiego. Wprowadzając nową zmienną x, określoną równaniem $x = z/r$, możemy ostatnie równanie przekształcić:

$$(\mp\lambda^2+m^2)f-(2m-1)xf'+(1+x^2)f''=0; \quad /2/$$

Całkę tego ostatniego równania znajdziemy, kładąc $f(x)=\sum A_k x^k$, gdzie k oznacza liczbę całkowitą. Podstawiając tę wartość do równania /2/ znajdziemy, iż

$$(\mp\lambda^2+m^2)\sum A_k x^k-(2\cdot m-1)x\sum A_k x^{k-1}+(1+x^2)\sum k(k-1)A_k x^{k-2}=0;$$

Aby ta ostatnia równość miała stale miejsce wystarcza, aby spółczynniki przy wszystkich potęgach x były zerami, t.j. aby

$$\left[\mp\lambda^2+m^2-(2m-1)k+k(k-1)\right]A_k+(k+1)(k+2)A_{k+2}=0$$

czyli

$$A_{k+2}=-A_k\frac{(m-k)^2\mp\lambda^2}{(k+1)(k+2)}; \qquad /3/$$

Znalazłszy w ten sposób prawo tworzenia parzystych i nieparzystych spółczynników, możemy obierając odpowiednio 2 z nich: A i B za podstawowe, znaleźć rozwinięcie:

$$f(x)=A\left\{1-\frac{m^2\mp\lambda^2}{2!}x^2+\frac{(m^2\mp\lambda^2)[(m-2)^2\mp\lambda^2]}{4!}x^4-\frac{(m^2\mp\lambda^2)[(m-2)^2\mp\lambda^2]\cdot}{6!}\right.$$
$$\left.\frac{\cdot[(m-4)^2\mp\lambda^2]}{}x^6+\ldots\ldots\right\}+B\left\{x-\frac{(m-1)^2\mp\lambda^2}{3!}x^3+\frac{[(m-1)^2\mp\lambda^2][(m-3)^2\mp\lambda^2]}{5!}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot x^5-\ldots\ldots\right\};$$

w którem prócz 2 stałych λ i m mamy jeszcze dwie stałe dowolne A i B. Ze wzorów powyższych widać, że szeregi powyższe mogą być skończone tylko w przypadku górnych znaków i to wtedy, kiedy λ i m są liczbami całkowitemi.

Zauważmy, iż w szeregach tych wyrazy mogą zawierać tylko dodatnie potęgi x, bo z zależności pomiędzy następującemi po sobie spółczynnikami A_k otrzymujemy: $A_{-1}=A_{-2}=\ldots=0$. Wreszcie dla $r=0$ jest $x=\frac{z}{r}=\infty$ t.j. oś z jest linją nieciągłości ruchu. W praktycznych zastosowaniach nie gra to jednak roli, gdyż osią wszelkich urządzeń hydraulicznych jest zwykle wałek o wymiarach skończonych, który przeto jakby odgradza punkty osobliwe. Kombinacja całek powyższych przy rozmaitych wartościach λ i m pozwala badać ruchy cieczy, spełniające z góry obrane warunki.

§50. Ruch względny.

W hydrodynamice technicznej spotykamy się często z ruchem względnym cieczy względem wirujących ze stałą szybkością naczyń otwartych, zwanych wirnikami. Tak więc w turbinach ciecz przepływa wzdłuż poruszających się razem z wirnikiem łopatek, na które wywiera ciśnienie wytwarzające moment, działający na wał turbiny. W pompach odśrodkowych przebieg zjawiska jest odwrotny. Można tu rozpatrywać ruch bezwzględny cieczy, stosując równania ogólno hydrodynamiki do rozważanego przepływu. Jednakże naskutek ciągłej zmiany miejsca przez łopatki, których ilość jest skończoną, ruch ten należy do kategorji nietrwałych tak, że potencjał szybkości, o ile istnieje, musi być funkcją czasu. Ponieważ trwamy ciągle przy fikcji cieczy doskonałej, więc jedyną siłą zewnętrzną będzie potencjalna siła ciężkości. Okazuje się tu dogodniej wprowadzić zamiast szybkości bezwzględnych szybkości względne cieczy względem wirników, gdyż ruch względny posiada już cechę trwałości. Załóżmy tedy, że wirnik porusza się ze stałą szybkością kątową ω . Wówczas w ruchu względnym cieczy w wirniku posiada ona szybkość kątową ω , równą co do wartości, lecz przeciwnie skierowaną, niż szybkość wirnika. Oznaczając składowe szybkości względnej w układzie biegunowym przez $w_\lambda\ w_r\ w_z$, możemy wyznaczyć wartości szybkości kątowych względnych ω_λ $\omega_r\ \omega_z$, pamiętając, iż $\omega_r = \omega_\lambda = 0$ zaś $\omega_z = -\omega$;

Zwróćmy się do równań Euler'a, które, jak wiemy, stosuję się do szybkości bezwzględnych $u_\lambda\ u_r\ u_z$:

$$\frac{d(ru_\lambda)}{dt} = rP_\lambda - \frac{1}{6}\frac{\partial p}{\partial \lambda};\quad \frac{du_r}{dt} - \frac{u_\lambda^2}{r} = P_r - \frac{1}{6}\frac{\partial p}{\partial r};\quad \frac{du_z}{dt} = P_z - \frac{1}{6}\frac{\partial p}{\partial z};$$

Zauważmy, iż między szybkościami bezwzględnemi i względnemi zachodzą następujące związki:

$$u_\vartheta = w_\vartheta + \omega r; \qquad u_r = w_r; \qquad u_z = w_z; \qquad /2/$$

Podstawiając wartości /2/ do równań /1/ znajdziemy:

$$\frac{d[r(w_\vartheta + \omega r)]}{dt} = r P_\vartheta - 1/\rho \frac{\partial p}{\partial \vartheta};$$

$$\frac{dw_r}{dt} - \frac{(w_\vartheta + \omega r)^2}{r} = P_r - 1/\rho \frac{\partial p}{\partial r};$$

$$\frac{dw_z}{dt} = P_z - 1/\rho \frac{\partial p}{\partial z};$$

Ponieważ ruch względny jest trwały, zaś

$$2\omega_\vartheta = \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r}; \; 2\omega_r = 1/r\left[-\frac{\partial(r w_\vartheta)}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial \vartheta}\right]; \; 2\omega_z = 1/r\left[\frac{\partial(r w_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \vartheta}\right] \quad /3/$$

więc rozwijając pierwsze równanie znajdziemy:

$$\frac{\partial(r w_\vartheta)}{\partial \vartheta} \cdot \frac{w_\vartheta}{r} + \frac{\partial(r w_\vartheta)}{\partial r} w_r + \frac{\partial(r w_\vartheta)}{\partial z} w_z + 2\omega r w_r = r P_\vartheta - 1/\rho \frac{\partial p}{\partial \vartheta};$$

czyli po dodaniu i odjęciu $\frac{\partial w_r}{\partial \vartheta} w_r + \frac{\partial w_z}{\partial \vartheta} w_z$;

$$\left(\frac{\partial w_\vartheta}{\partial \vartheta} w_\vartheta + \frac{\partial w_r}{\partial \vartheta} w_r + \frac{\partial w_z}{\partial \vartheta} w_z\right) + w_r\left[\frac{\partial(r w_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial w_r}{\partial \vartheta}\right] + w_z\left[\frac{\partial(r w_\vartheta)}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial w_z}{\partial \vartheta}\right] + 2 r \omega w_r = r P_\vartheta - 1/\rho \frac{\partial p}{\partial \vartheta};$$

Wprowadzając prędkość względną całkowitą $w = \sqrt{w_\vartheta^2 + w_r^2 + w_z^2}$ oraz uwzględniając równość /2/ i /3/ otrzymamy stąd, że

$$1/2 \frac{\partial}{\partial \vartheta}(w^2) = r P_\vartheta - 1/\rho \frac{\partial p}{\partial \vartheta};$$

Zakładając istnienie potencjału sił U, możemy ostatecznie napisać, że

$$1/2 \frac{\partial}{\partial \vartheta}(w^2) = \frac{\partial U}{\partial \vartheta} - 1/\rho \frac{\partial p}{\partial \vartheta};$$

Analogicznie przekształcimy dwa dalsze równania Euler'a tak, iż znajdziemy

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(w^2) - \omega^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial r}; \qquad /5/$$

oraz

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}(w^2) = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z}; \qquad /6/$$

Równania /4/, /5/, /6/ dają rozwiązanie zagadnienia. Zauważmy, iż stanowią one tylko pochodne cząstkowe całki ogólnej

$$\frac{w^2}{2} - \frac{\omega^2 r^2}{2} = U - \frac{p}{\sigma} + C; \qquad /7/$$

Zwracając uwagę na analogję powyższych wyników do wyprowadzonego w swoim czasie równania Bernouille'go, przekształcimy to równanie /7/ kładąc dla sił ciężkości $U=-gz$. Wówczas można je i tak przepisać:

$$\frac{w^2}{2g} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = C; \qquad /8/$$

gdzie stała C tyczy się jednak wszystkich punktów cieczy, nie zaś tylko poszczególnych strug. Ostatnia postać równania pozwala twierdzić również w przypadku ruchu względnego, iż suma algebraiczna pewnych wysokości jest stała. Od równania Bernouille'go różni się ona jednak tem, że zawiera wysokość prędkości unoszenia $\frac{\omega^2 r^2}{2g}$. Wreszcie równanie to w technice piszą co kolwiek inaczej, stosując je do dwuch różnych punktów w cieczy, których różnica wysokości $z_0 - z_1 = h$, mianowicie:

$$\frac{p_1 - p_0}{\gamma} = h + \frac{v_1^2 - v_0^2}{2g} - \frac{w_1^2 - w_0^2}{2g}; \qquad /9/$$

Pomiędzy składowemi prędkości względnej i składowemi prędkości bezwzględnej, jak wskazano poprzednio, zachodzą związki

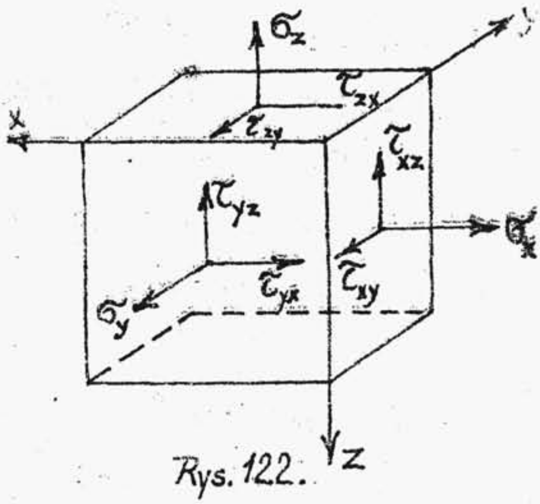
$$u_\varphi = w_\varphi + \omega r;$$
$$u_r = w_r;$$
$$u_z = w_z;$$

$u_\varphi\ u_r\ u_z$ zależą od potencjału prędkości Φ, ponieważ ruch bezwzględny jest niewirowy. Z tego wynika, iż w_φ $w_r\ w_z$ możemy uzależnić od potencjału Φ w sposób następujący:

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \omega r; \quad w_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}; \quad w_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z};$$

§51. Równania ruchu cieczy lepkiej

Wszystkie dotychczasowe nasze rozważania dotyczyły cieczy doskonałej, pozbawionej według założenia wytrzymałości na rozciąganie i ścinanie. Pojęcie to tylko w przybliżeniu odpowiada istotnym zjawiskom z czynnikami ciekłymi, gdyż już najprostsze obserwacje pouczają nas o istnieniu naprężeń stycznych w cieczach. Jeśli mimo to równania ruchu cieczy lepkiej nie są stosowane tak szeroko, jak to ma miejsce z cieczą doskonałą, to okoliczność ta tłomaczy się względami natury matematycznej. Mianowicie, uwzględniając wszystkie możliwe naprężenia w cieczy, dojdziemy koniec końców do równań wyższych rzędów o pochodnych cząstkowych, których rozwiązanie daje się uzyskać tylko w szczególnych przypadkach. Zagadnienie powyższe ruchu cieczy lepkiej ma daleko idące podobieństwo do ogólnego rozważania teorji sprężystości.



Rys. 122.

Wyobraźmy sobie tedy element objętości cieczy **w układzie osi prostokątnych** /rys. 122/. Oznaczając przez $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ naprężenia normalne do ścian yz, zx, xy, wprowadzamy ponadto układ naprężeń stycznych τ. Te ostatnie naprężenia charakteryzujemy za pomocą 2 wskaźników, z których pierwszy podaje kierunek osi prostopadłej do płaszczyzny, w której działa rozważane naprężenie styczne, zaś drugi - osi równoległej do rozważanego naprężenia. Łatwo okazać, że i w przypadku hydrodynamiki może zwienia porządek tych wskaźników, nie zmieniając jednak przytem wartości naprężenia. Istotnie wystarcza wyprowadzić równanie dynamiki, dotyczące ruchu obrotowego elementu koło osi spółrzędnych. Tak np. dla osi z będzie po odrzuceniu nieskończonostek rzędu wyższego ponad trzeci:

$$(\tau_{zy}\,dx\,dy)\,dz - (\tau_{yz}\,dx\,dz)\,dy = \sigma\,dx\,dy\,dz\cdot k^2\,\frac{d\omega_z}{dt};$$

gdzie przez k^2 oznaczyliśmy kwadrat ramienia bezwładności elementu względem osi z, zaś szybkość kątową koło tej osi nazwaliśmy ω_z. Ponieważ prawa strona powyższej równości jest nieskończonostką rzędu piątego, więc przyrównując ją do zera znajdziemy, iż $\tau_{zy} = \tau_{yz}$. Analogicznie będzie

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}; \qquad \text{oraz} \qquad \tau_{yx} = \tau_{xy}; \qquad /1/$$

Zwróćmy się z kolei do rozważań §38, gdzieśmy ustalili ogólną wartość wydłużenia jednostkowego cieczy w dowolnym kierunku

$$\lambda = \lambda_x a^2 + \lambda_y b^2 + \lambda_z c^2 + \varphi_x bc + \varphi_y ca + \varphi_z ab;$$

funkcji pewnych wartości stałych i cosinusów kierunkowych rozważanego punktu. Przyjmijmy jako założenie, iż prawo analogiczne do prawa Hooke'a stosuje się również i w cieczach. Ponieważ wydłużenie λ jest, jak to wynika ze wzoru /2/ funkcją linjową pochodnych cząstkowych prędkości, więc tąż samą własność muszą na zasadzie ... posiadać i naprężenia jednostkowe. Twierdzenie Newton'a orzekające, iż opór w cieczy jest proporcjonalny do pierwszej potęgi szybkości względnej sąsiednich warstew, stosowaliśmy już przy ruchu Poiseuille'a. Znaleźliśmy tam potwierdzenie powyższej hipotezy, ale tylko przy małych szybkościach. My natomiast będziemy nadal zakładali, iż prawo Hooke'a jest słuszne najzupełniej ogólnie, przyjmując przytem istnienie odkształceń poprzecznych w wypadku ściskania i rozciągania. Ponadto przyjmiemy, że te odkształcenia poprzeczne są proporcjonalne do naprężeń podłużnych, przyczem spółczynnik proporcjonalności wynosi $1/m$;

Zastosujmy to wszystko do wyznaczenia naprężeń w kierunkach osi spółrzędnych. Otóż, oznaczając spółczynnik sprężystości dla cieczy przez k, łatwo znajdziemy 3 analogicznie zbudowane równania:

$$k\lambda_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y+\sigma_z}{m}; \quad k\lambda_y = \sigma_y - \frac{\sigma_z+\sigma_x}{m}; \quad k\lambda_z = \sigma_z + \frac{\sigma_x+\sigma_y}{m}; \quad /3/$$

Sumując te równania, otrzymamy symetryczne wyrażenie

$$k(\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z) = (1-2/m)(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z),$$

które w połączeniu z każdem poprzedniem da odpowiednio:

$$\sigma_x = k\frac{m}{m+1}\left(\frac{\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z}{m-2}+\lambda_x\right)$$

$$\sigma_y = k\frac{m}{m+1}\left(\frac{\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z}{m-2}+\lambda_y\right)$$

$$\sigma_z = k\frac{m}{m+1}\left(\frac{\lambda_x+\lambda_y+\lambda_z}{m-2}+\lambda_z\right);$$

Załóżmy, iż ciecz jest nieściśliwa, to

$$\operatorname{div}(u\,v\,w) = \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} = \lambda_x+\lambda_y+\lambda_z = 0;$$

Ponadto niech między spółczynnikami sprężystości k i μ panuje w cieczach analogicznie do teorji sprężystości związek

$$k = 2\,\frac{m+1}{m}\,\mu;$$

Wówczas wartości naprężeń normalnych uproszczą się ostatecznie

$$\sigma_x = 2\mu\lambda_x; \qquad \sigma_y = 2\mu\lambda_y; \qquad \sigma_z = 2\mu\lambda_z; \qquad /4'/$$

czyli po podstawieniu wartości $\lambda_x\,\lambda_y\,\lambda_z$ otrzymamy

$$\sigma_x = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \sigma_y = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \sigma_z = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}; \qquad /4/$$

Analogicznie wyprowadzimy wartości naprężeń stycznych w funkcji pochodnych cząstkowych szybkości. W tym celu wystarcza znaleźć wartości przesunięć jednostkowych i, pomnożywszy je przez spółczynnik sprężystości obliczyć szukane wielkości. Biorąc pod uwagę rys.113, łatwo zauważyć, iż

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \mu\varphi_z;$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) = \mu\varphi_x;$$

oraz

$$\tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \mu\varphi_y;$$

Wyprowadziwszy powyższe zależności, możemy już teraz wyznaczyć równania ruchu elementu cieczy o masie $\sigma dx\,dy\,dz$. Należy tu zaznaczyć, że powyżej określone naprężenia zależą wyłącznie od lepkości cieczy. Oprócz tych naprężeń działa w cieczy lepkiej, tak samo jak w cieczy doskonałej, ciśnienie p, które na mocy prawa Pascal'a w danym punkcie cieczy nie zależy od kierunku. Wprowadzając dalej siły objętościowe o składowych XYZ znajdziemy dla osi x układu:

$$\frac{du}{dt}\sigma dx\,dy\,dz = X\sigma\,dx\,dy\,dz + p\,dy\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\,dz -$$

$$-\sigma_x\,dy\,dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz - \tau_{zx}\,dx\,dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)\cdot$$

$$\cdot dx\,dy - \tau_{yx}\,dx\,dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx\,dz;$$

czyli po skróceniu i uwzględnieniu równań /4/ i /5/

$$\frac{du}{dt}\sigma = X\sigma - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} =$$

$$= X\sigma - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right];$$

A że z równania ciągłości $\operatorname{div}(u\,v\,w) = 0$ jest

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x},$$

więc ostatecznie

$$\frac{du}{dt}\sigma = X\sigma - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu\,\Delta_2 u;$$

czyli

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g\mu}{\sigma}\Delta_2 u;$$

Analogicznie znajdziemy dwa dalsze równania

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g\mu}{\sigma}\Delta_2 v;$$

oraz

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g\mu}{\sigma}\Delta_2 w; \quad /6/$$

Gdyby rozważany ruch należał do kategorji trwałych, wówczas równania /6/ dadzą się inaczej rozwinąć:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{g\mu}{\sigma}\Delta_2 u;$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{g\mu}{\sigma}\Delta_2 v;$$

oraz

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{g\mu}{\sigma}\Delta_2 w; \quad /6'/;$$

W ten sposób otrzymaliśmy trudne do rozwiązania równanie różniczkowe drugiego rzędu. Ograniczymy się przeto tylko do jednego przykładu dla zilustrowania zastosowań powyższej teorji. Zajmiemy się mianowicie ruchem trwałym cieczy lepkiej w prostej poziomej walcowej rurze o niewielkiej średnicy. Obierając oś z wzdłuż osi rury i kładąc, iż strugi cieczy są do niej równoległe, możemy napisać, że $u = v = 0$, skąd na podstawie równania ciągłości $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$, czyli szybkość w nie zależy od spółrzędnej z. Wówczas równanie /6'/ się upraszcza w następują-

-cy sposób:

$$0 = X - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial x}; \qquad 0 = Y - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial y};$$

oraz

$$0 = Z - \frac{1}{\sigma}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\sigma}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]; \qquad /7/$$

Jeśli ciecz podlega tylko sile ciężkości, to $Z = 0$; Załóżmy dalej, iż średnica rury jest dostatecznie mała, aby móc pominąć zmienność ciśnienia wraz ze zmianą x i y. Wówczas

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0;$$

skąd trzecie równanie grupy /7/ przy $Z = 0$ da

$$\frac{\partial p}{\partial z} = constans;$$

gdyż wyraz

$$\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$

od z nie zależy. Wobec tego, oznaczając ciśnienia na końcach odcinka rury długości L przez p_0 na początku i p_1 na końcu, znajdziemy, iż

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p_0 - p_1}{L};$$

czyli

$$\frac{1}{\sigma}\frac{p_0 - p_1}{L} + \frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0;$$

Ze względu na symetrję ruchu względem osi rury dogodniej będzie wprowadzić promień wodzący r zamiast spółrzędnych y i x. Ponieważ $r^2 = x^2 + y^2$ zaś

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = x/r \cdot \frac{\partial w}{\partial r};$$

oraz

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = y/r \cdot \frac{\partial w}{\partial r};$$

więc

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\cdot x^2/r^2 + 1/r\,\frac{\partial w}{\partial r} - x^2/r^3\,\frac{\partial w}{\partial r} +$$

$$+ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\cdot y^2/r^2 + 1/r\,\frac{\partial w}{\partial r} - y^2/r^3\cdot\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 1/r\,\frac{\partial w}{\partial r};$$

Opierając się na powyższym wzorze widzimy, że

$$\frac{p_0 - p_1}{L} + \varsigma\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + 1/r\,\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0;$$

skąd

$$\frac{p_0 - p_1}{\varsigma\mu L} = -1/r\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial w}{\partial r}\right);$$

czyli

$$r\,\frac{\partial w}{\partial r} = A - \frac{p_0 - p_1}{\varsigma\mu L}\cdot r^2/2;$$

t.j.

$$W = A\ln r - \frac{p_0 - p_1}{4\varsigma\mu L}r^2 + B;$$

Ponieważ zaś prędkość W nie może być nieskończenie wielką na osi rury, t.j. przy $r = 0$, więc stała całkowania $A = 0$. Chcąc wyrugować drugą stałą B, weźmiemy na uwagę stan cynematyczny cząstek cieczy u powierzchni wewnętrznej rury. Dla wartości $r = r_0$ musi być

$$W = -\frac{p_0 - p_1}{\mu L}\frac{r^2}{2} + B = 0;$$

gdyż w razie istnienia prędkości różnej od zera przy ściankach rury otrzymalibyśmy nieskończenie wielki opór tarcia. Wobec tego ogólna wartość szybkości jest

$$W = \frac{p_0 - p_1}{4\mu L}\left(r_0^2 - r_1^2\right) = \frac{\gamma i}{4\mu}\left(r_0^2 - r_1^2\right);$$

gdzie wprowadziliśmy wielkość

$$i = \frac{p_0 - p_1}{L\gamma};$$

W ten sposób otrzymaliśmy rezultat identyczny z otrzymanym w § 38 przy rozważaniu ruchu Poiseuille'a. Łatwo ponadto okazać, że otrzymany ruch jest wirowym o szybkości kątowej

$$\omega_\theta = \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} = -\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\gamma i r}{2\mu};$$

A więc mamy tu do czynienia z wirami kołowymi zamkniętymi, których szybkość wirowania rośnie proporcjonalnie do wartości promienia.

ZAGADNIENIA ZE STATYKI CIECZY.

1. Mamy układ sił symetryczny względem osi

$$P_r = -kr;$$

Znaleźć i zbadać kształt powierzchni ekwipotencjalnych oraz kształt linji sił.