

ność $(1) 0 < x - a < \delta$ pociąga za sobą nierówność

$$2) |f(x) - l| < \varepsilon$$

Dla odróżnienia granicy lewo - lub prawostronnej od granicy we właściwym tego słowa znaczeniu, używamy pewnych symbolów. Aby mianowicie zaznaczyć, że l jest granicą lewostronną funkcji $f(x)$ piszemy

$$f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a-0} l$$

Nieraz ta granica oznacza się przez $f(a-0)$. Gdy l jest granicą prawostronną, oznaczamy symbolicznie:

$$f(x) \rightarrow_{x \rightarrow a+0} l,$$

samą zaś granicę oznaczamy przez

$$f(a+0).$$

Funkcja może posiadać jednocześnie granicę lewostronną i prawostronną. Gdy są one sobie równe, istnieje granica w zwykłym znaczeniu /tak, jakśmy ją określili poprzednio/.

Weźmy np. już wykreślaną funkcję $y = E(x)$ /rys. 35/. Gdy $0 \leq x < 1$ to $y = 0$, a gdy $-1 \leq x < 0$, to $y = -1$

Z łatwością zauważymy, że istnieje tu granica lewostronna i prawostronna.

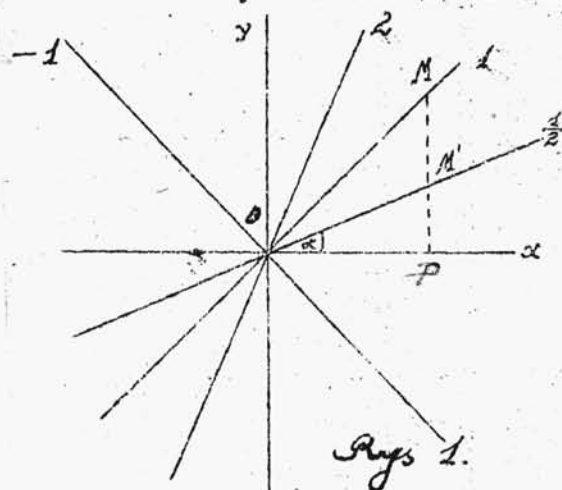
Mianowicie:

$$E(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0-0} -1 \quad i \quad E(x) \rightarrow_{x \rightarrow 0+0} 0$$

W punkcie 0 wartość funkcji jest też równa zero.

$y = \frac{3}{4}x$. Możemy przyjąć również $k > 1$. Jeżeli $k = 2$,
 $y = 2x$; $k = 4$, $y = 4x$. Widoczną jest rzecz, że istnieje
 zależność pomiędzy współczynnikiem proporcjonalności
 a nachyleniem prostej. Łatwo jest podać związek pomię-
 dzy k i kątem α , jaki tworzy prosta z osią x .

Z równania $y = kx$ wynika, że $\frac{y}{x} = k = \frac{MP}{OP} \operatorname{tg} \alpha$; czyli
 $k = \operatorname{tg} \alpha$. Gdy więc współczynnik kierunkowy się zwiększa,
 to i kąt rośnie, i odwrotnie. Jeżeli $k > 0$, to i $\operatorname{tg} \alpha > 0$,
 a sam kąt α zawiera się pomiędzy 0° a 90° ; prosta prze-



Rys. 1.

biega przez I i III ćwiartkę.

Jeżeli zaś $k < 0$, to $180^\circ > \alpha > 90^\circ$

i prosta przechodzi

przez ćwiartki II i IV. W wypad-

ku, gdy $k = -1$, $y = -x$, prosta
 jest dwusieczną kąta II i IV

ćwiartki. Ponieważ od współczyn-

nika proporcjonalności k zależy

kierunek prostej, nazywa się on

też współczynnikiem kierunkowym

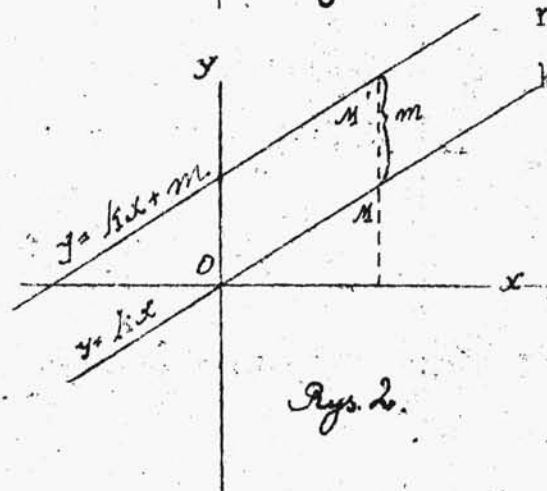
Wszystkie proste, mające ten

sam współczynnik kierunkowy, są

równoległe, np. 1/1 $y = kx$ i

2/2 $y = kx + m$. Wynika to wprost

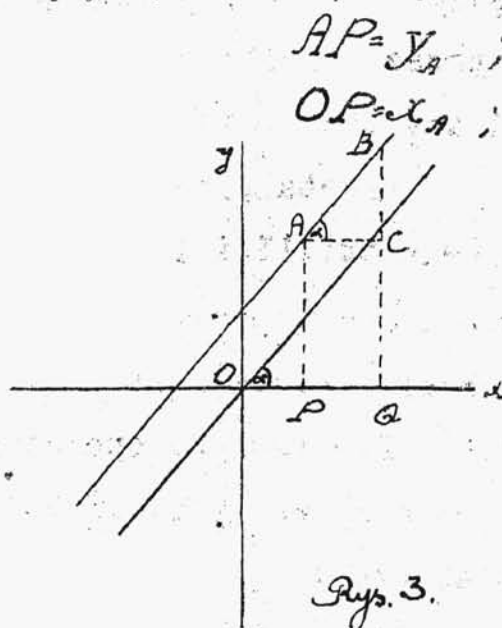
z określenia: mając prosta 1/1



Rys. 2.

możemy wykreślić prostą /2/, powiększając każdą rzędną prostej /1/ o m jednostek /w praktyce wystarcza powiększenie 2-ech rzędnych/. Z równoległoboku, utworzonego przez te 2 rzędne i proste dane, wynika równoległość tych prostych.

Spółczynnik kierunkowy prostej można określić również jako stosunek różnicy dwu wartości rzędnych do różnicy dwu wartości odciętych, czyli przyrostu rzędnych do przyrostu odciętych. Oznaczmy /rys.3/



$$AP = y_A ; BQ = y_B$$

$$OP = x_A ; OQ = x_B$$

Poprowadźmy z A równoległą do x i utwórzmy różnicę wartości rzędnych i odciętych punktów A i B .

$$AC = PQ = OQ - OP ; AC = x_B - x_A$$

$$BC = BQ - CQ = BQ - AP ;$$

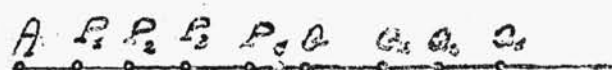
$$BC = y_B - y_A$$

Rys. 3.

Stosunek różnicy rzędnych do różnicy odpowiadających wartości odciętych

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Często przyrosty oznaczamy przez Δ .



Rys. 16.

I klasy będą leżały po jednej stronie prostej a punkty, które odpowiadają liczbom II

lasy - po drugiej. Na zasadzie pewnika Dedekinda musi istnieć jakiś punkt ϵ , odgraniczający obie części prostej ten punkt jest właśnie końcem odcinka AC , odpowiadającego liczbie ϵ .

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych stanowi t. zw. continuum arytmetyczne, a zbiór wszystkich odpowiadających mu punktów - continuum geometryczne. Wyżej ustanowiliśmy zależność między continuum arytmetycznym i geometrycznym i przekonaliśmy się, że jedno z nich można uważać za funkcję drugiego i odwrotnie. Gdy więc liczba ϵ zmienia się w obszarze continuum arytmetycznego, odpowiadający jej punkt ϵ ulega zmianie w obszarze continuum geometrycznego.

TEORIA CANTORA. Do pojęcia liczby niewymiernej dojść można, jak już na początku mówiliśmy, dwiema drogami. Jedną z nich, wskazaną przez Dedekinda już poznaliśmy. Teraz zapoznamy się w ogólnych zarysach z inną teorią, podaną przez Cantora, a opartą na pojęciu ciągów.

Ciągiem nazywamy szereg liczb, następujących w pewnym porządku po sobie, przy czem każda liczba, zwana wyrazem

Inny przykład ciągu: 2 pierwsze wyrazy są równe 1, następnie zaś $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Jest to tak zwany ciąg Fibonacciego:

$$1, 1, 2, 3, 5, \dots, 13, 21, \dots$$

Jeżeli każdy następujący wyraz ciągu jest większy od poprzedniego, ciąg nazywa się rosnącym. Ciąg taki może rosnąć nieograniczenie, albo wyrazy jego mogą nie przekraczać pewnej granicy, jak np. $u_n = \frac{n-1}{n}$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

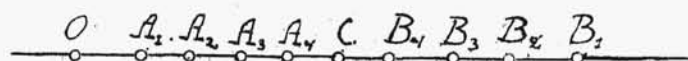
Liczby tego ciągu stale rosną, jednak nie mogą stać się większe, ani nawet równe jedności, bowiem $u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$, gdzie n jest zawsze liczbą całkowitą dodatnią; a więc $u_n < 1$. Ciąg, którego wszystkie wyrazy są mniejsze od pewnej liczby M , nazywa się ciągami ograniczonym od góry. Ciągi rosnące, lub przynajmniej nie malejące, złożone z liczb wymiernych, noszą nazwę ciągów podstawowych rosnących.

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n$$

Odpowiednie ciągi, w których każdy wyraz jest mniejszy od poprzedniego, nazywamy ciągami malejącymi. Jeżeli wyrazy ciągu malejącego pozostają większe od pewnej liczby, mówimy, że ciąg jest ograniczony od dołu.

- (1) $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$
 (2) $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n$

Określimy przekrój w sposób następujący: do niższej klasy zaliczamy wszystkie liczby wymierne równe liczbom



Rys. 17.

ciągu $1/1$, lub od nich mniejsze; do klasy wyższej zaś wszystkie pozosta-

łe liczby wymierne. Przekrój ten określa liczbę większą od liczb klasy niższej i mniejszą od liczb klasy wyższej. Tą liczbą jest właśnie liczba niewymierna α .

Przypuśćmy, że liczba niewymierna α jest określona przez przekrój a, A . Niech $a < \alpha < A$. Pomiędzy liczbą a i A można wstawić szereg liczb kolejnych:

$$a, a+1, a+2, a+3, \dots, A$$

W tym szeregu istnieć muszą 2 liczby kolejne, należące do różnych klas. Różnice pomiędzy temi liczbami c i $c+1$ dzielimy na n równych części i tworzymy nowy szereg:

$$c, c + \frac{1}{n}, c + \frac{2}{n}, c + \frac{3}{n}, \dots, c + \frac{n-1}{n}, c + \frac{n}{n}$$

I w tym szeregu istnieją 2 kolejne liczby $c + \frac{c_1}{n}$ i $c + \frac{c_1+1}{n}$, z których jedna należy do klasy niższej, druga zaś do wyższej. Pomiędzy te liczby znowu wstawiamy szereg liczb:

otoczeniu funkcja $f(x)$ zbliża się do g , tyle, ile tego wymaga miara przybliżenia, innymi słowy, że można znaleźć taką liczbę $M(\varepsilon)$, zależną od ε , że warunek

$$(1) \quad x > M(\varepsilon)$$

pociąga za sobą nierówność

$$(2) \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

Dla określenia symbolu

$$f(x) \rightarrow g$$

należy w powyższym określeniu znak nierówności (1) zmienić na przeciwny.

Symbol

$$f(x) \rightarrow g$$

wyraża że jakkolwiek wielką będzie liczba $M > 0$ to $f(x) > M$ skoro tylko x należy do otoczenia punktu c , t.j. że można zawsze wyznaczyć taką liczbę $\eta(M)$ zależną od M że dla x spełniającego warunek $(x - c) < \eta(M)$ zachodzi nierówność

$$f(x) > M$$

W podobny sposób można określić, co znaczy

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow c} -\infty \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\infty \quad \text{i.t.p.}$$

UWAGA. Należy odróżniać granicę funkcji, gdy zmienna dąży do pewnej wartości, od wartości funkcji przy danej wartości zmiennej: co innego jest $f(a)$, a co

innego $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?

Różnica jest zresztą widoczna z samego określenia;
/punkt ϵ może do otoczenia nie należeć/;

Często potrzeba rozróżniać otoczenia prawostronne i lewostronne. O funkcji $f(x)$ mówimy, że posiada pewną własność w otoczeniu prawostronnym /lewostronnym/ punktu A , jeżeli dla wszystkich punktów tego otoczenia dana własność zachodzi, to znaczy: jeżeli istnieje taki punkt B położony na prawo /na lewo/ od A , że dana własność zachodzi dla wszystkich punktów zawartych wewnątrz odcinka AB t.j. dla wszystkich wartości x , takich, że $a < x < b$ w pierwszym przypadku, $a > x > b$ w drugim /gdy chodzi o otoczenie lewostronne/. W związku z tem określamy granicę prawo i lewostronną:

Liczba ℓ jest granicą lewostronną funkcji $f(x)$ gdy istnieje taka liczba $\delta > 0$ odpowiadająca liczbie ϵ , że nierówność

$$(1) \quad 0 < a - x < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$(2) \quad |f(x) - \ell| < \epsilon$$

Gdy chodzi o granicę prawostronną, należy różnicę $a - x$ zastąpić przez różnicę $x - a$. A więc liczba ℓ jest granicą prawostronną $f(x)$ gdy każdej liczbie $\epsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\delta > 0$, zależna od ϵ , że nierów-

wyrazić jeszcze inaczej:

Funkcja $f(x)$ jest ciągła dla wartości $x=a$, jeżeli wartość funkcji w otoczeniu punktu A zbliża się do wartości funkcji w samym punkcie A o tyle, ile tego wymaga dowolnie obrana miara przybliżenia $\varepsilon > 0$. Funkcja jest ciągła, gdy liczbie dowolnej $\varepsilon > 0$ odpowiada taka liczba $\delta > 0$, że nierówność

$$|x - a| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Widzimy więc, że otrzymamy kryterjum ciągłości, zastępując w kryterjum granicy liczbę ε przez $f(a)$.

TWIERDZENIE. Warunkiem koniecznym i wystarczającym ciągłości prawostronnej funkcji $f(x)$ w punkcie $x=a$ jest, by dla dowolnego $\varepsilon > 0$ (można było znaleźć), istniała odpowiadająca liczba $h > 0$ taka, iż warunek

$$a \leq x' \leq x'' \leq a+h$$

pociągał za sobą nierówność

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$