

nalne w zakresie tych tylko liczb. Wystarczają one również w zupełności do rozwiązywania wszelkich równań algebraicznych i przestępnych. Będziemy mogli przekonać się o tem, rozwiązując równania różnych stopni, do czego teraz przejdziemy.

### ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ.

Niech będzie dane równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

w którym współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$  są liczbami rzeczywistymi. Jeżeli

$$b^2 - 4ac > 0$$

to równanie posiada 2 pierwiastki rzeczywiste:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jeżeli

$$b^2 - 4ac < 0$$

równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych. Napiшем dane równanie w postaci:

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{ac - b^2}{a^2}\right) = 0$$

Przenosząc drugi składnik na prawą stronę i wy-  
ciągając z obu stron równania pierwiastki kwadratowe,  
otrzymamy:

$$x + \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a} i.$$

A zatem dane równanie posiadać będzie w tym przy-  
padku dwa rozwiązania, które można będzie przedstawić  
w postaci par liczbowych:

$$x_1 = \left(-\frac{b}{a}, \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}\right)$$

$$x_2 = \left(-\frac{b}{a}, -\frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}\right)$$

Jeżeli pozatem umówimy się, że w trzecim przypadku  
gdy

$$b^2 - ac = 0,$$

czyli gdy równaniu czyni sadość jedna tylko liczba  $-\frac{b}{a}$   
mówić będziemy, że równanie posiada dwa pierwiastki  
sobie równe, to będziemy mogli wypowiedzieć twierdze-  
nie ogólne:

Każde równanie kwadratowe o współczynnikach rze-  
czywistych posiada zawsze dwa pierwiastki, które albo

są oba rzeczywiste i różne, albo zespolone, sprzężone, albo wreszcie, rzeczywiste i równe.

Przejdźmy z kolei rzeczy, do równań stopnia trzeciego. Niech będzie dane równanie sześciennne w postaci ogólnej:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Równanie to posiada cztery współczynniki rzeczywiste, z których napewno  $a \neq 0$ . Będziemy mogli równanie uprościć, zakładając

$$x = x' + h.$$

Wówczas przyjmie ono kształt

$$a(x' + h)^3 + b(x' + h)^2 + c(x' + h) + d = 0$$

Rozwińmy lewą stronę równania, a następnie uporządkujmy je według potęg malejących :

$$ax'^3 + 3ax'^2h + 3ax'h^2 + ah^3 + bx'^2 + 2bx'h + bh^2 + cx' + ch + d = 0.$$

$$ax'^3 + (3ah + b)x'^2 + (3ah^2 + 2bh + c)x' + ah^3 + bh^2 + ch + d = 0.$$

Liczba  $h$  jest dowolną; możemy wybrać ją tak, aby w powyższym równaniu współczynnik przy kwadracie niewiadomej był równy zeru. Rzecz jasna, że zajdzie to wówczas, gdy

$$h = -\frac{b}{3a}.$$

$h$  posiada w każdym poszczególnym przypadku wartość w zupełności określoną, gdyż  $a$  nie może być równe zero.

Oprócz tego uproszczenia, można zrobić jeszcze jedno: zawsze można równanie przekształcić w ten sposób, aby współczynnik przy  $x^3$  t.j.  $a=1$ .

Widzimy więc, że zamiast rozwiązywać równanie stopnia trzeciego w postaci ogólnej, będziemy mogli rozwiązać znacznie prostsze równanie:

$$1/1 \quad x^3 + px + q = 0$$

Podstawmy w powyższe równanie

$$x = u + v$$

Otrzymamy:

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0;$$

$$u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + p(u+v) + q = 0;$$

a stąd

$$12/ \quad u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q = 0.$$

Liczby  $u$  i  $v$  są dowolne: wybierzmy je tak, aby

$$3uv + p = 0$$

czyli

$$/3/ \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Wówczas z równania /2/ wynika, że

$$/4/ \quad u^3 + v^3 = -q$$

Warunki /3/ i /4/ wyznaczają w zupełności liczby  $u$  i  $v$ . Podnieśmy mianowicie równanie /3/ do sześciądu:

$$/5/ \quad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

i oznaczmy

$$u^3 = \xi \quad ; \quad v^3 = \eta$$

Rozwiązując układ dwóch równań

$$\xi + \eta = -q$$

$$\xi \cdot \eta = -\frac{p^3}{27}$$

znajdziemy /uważamy  $\xi$  i  $\eta$  za pierwiastki równania kwadratowego/:

$$\xi, \eta = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

A więc

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Wyciągając z powyższych wzorów pierwiastki sześciennie i dodając je stronami, otrzymamy:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Ten wzór nosi nazwę matematyka włoskiego Cardana. Jest on, jak widzimy, sumą dwóch pierwiastków sześciennych. Ponieważ każdy z tych pierwiastków ma po trzy wartości, przeto łącząc je ze sobą za pomocą dodawania, otrzymamy 9 wartości  $x$ . Wiemy zaś, że równaniu /1/ czynić mogą zadość tylko 3 liczby. Aby się dowiedzieć, które z tych 9 wartości  $x$  są pierwiastkami równania, przeprowadzimy dyskusję. Rozważmy 3 zasadnicze przypadki, zależnie od tego, czy wyróżnik

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \in \mathbb{R}$$

jest dodatni, ujemny, czy też równy zero.

I.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0$$

W tym wypadku  $u^3$  i  $v^3$  są liczbami rzeczywistymi. Nazwijmy jedną z trzech wartości pierwiastka sześciennego z  $u^3$ , tę właśnie, która jest liczbą rzeczywistą przez  $u$ , i analogicznie liczbę rzeczywistą, która jest jedną z wartości  $\sqrt[3]{v^3}$  przez  $v$ . Oznaczmy

następnie wartości  $\sqrt[3]{1}$  przez:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \varepsilon$$

$$x_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \varepsilon^2$$

W takim razie pierwiastek sześcienny z  $\varepsilon$  dać będzie obrót  $u_1$  jeszcze wartości

$$u_2 = u_1 \cdot \varepsilon$$

$$u_3 = u_1 \cdot \varepsilon^2$$

Podobnie, pierwiastek sześcienny z  $\varepsilon^3$  składać wartości:

$$v_2 = v_1 \cdot \varepsilon$$

$$v_3 = v_1 \cdot \varepsilon^2$$

A zatem otrzymamy 9 wartości :

$$u_1 + v_1 ; \quad u_2 + v_1 ; \quad u_3 + v_1 ;$$

$$u_1 + v_2 ; \quad u_2 + v_2 ; \quad u_3 + v_2 ;$$

$$u_1 + v_3 ; \quad u_2 + v_3 ; \quad u_3 + v_3 ;$$

Powstało to stąd, że równanie /5/ nie było z równaniem /3/; przez podniesienie

/3/ do sześciannu wprowadziliśmy pierwiastki obce, nie czyniące zadość równaniu pierwotnemu. Wskutek tego należy z otrzymanych 9 wartości  $x$  wybrać tylko te, które spełniają warunek:

$$/3/ \quad u \cdot v = -\sqrt[3]{3}$$

Łatwo dostrzedz, że wartości takich jest tylko 3:

$$x_1 = u_1 + v_1$$

$$x_2 = u_2 + v_3 = u_1 \cdot \varepsilon + v_1 \cdot \varepsilon^2$$

$$x_3 = u_3 + v_2 = u_1 \cdot \varepsilon^2 + v_1 \cdot \varepsilon$$

Istotnie, iloczyn składników prawej strony każdego z powyższych równań jest równy  $-\sqrt[3]{3}$ . Ponieważ  $= u_1 v_1 \varepsilon^3$ , a  $u_1 v_1 = -\sqrt[3]{3}$ ;  $\varepsilon^3 = 1$ . Pierwiastek  $x_1$  jest liczbą rzeczywistą, zaś  $x_2$  i  $x_3$  są zespolone sprzężone. Można to udowodnić, podstawiając zamiast  $\varepsilon$  i  $\varepsilon^2$  wartości pierwiastka sześciennego z jedności:

$$x_2 = u_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) + v_1 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

$$x_3 = u_1 \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) + v_1 \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)$$

A zatem

$$x_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2}(u_1 - v_1)i$$



Stąd zależność pomiędzy  $x_2$  i  $x_3$  jest widoczna.

II.

$$q^2/4 + p^3/27 = 0$$

W tym przypadku, podobnie jak w poprzednim, oznaczmy rzeczywiste wartości pierwiastków sześciennych przez

$$u_1 = \sqrt[3]{-q/2}$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-q/2}$$

Pozostałe wartości pierwiastków dadzą się wyrazić w sposób następujący:

$$u_2 = u_1 \cdot \varepsilon ; \quad v_2 = v_1 \cdot \varepsilon ;$$

$$u_3 = u_1 \cdot \varepsilon^2 ; \quad v_3 = v_1 \cdot \varepsilon^2 ;$$

Łatwo sprawdzić, że  $u_1$  i  $v_1$  czynią zadość warunkowi /3/:

$$u_1 \cdot v_1 = \sqrt[3]{q^2/4} = \sqrt[3]{-p^3/27} = -p/3$$

Stąd wniosek, że jednym z pierwiastków równania jest:

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt[3]{-q/2}$$

Następnymi wartościami  $x$  są:

$$x_2 = u_1 \cdot \varepsilon + v_1 \cdot \varepsilon^2 = \sqrt[3]{-q/2} (\varepsilon + \varepsilon^2) = -\sqrt[3]{-q/2}$$

$$x_3 = u_1 \varepsilon^2 + v_1 \varepsilon = \sqrt[3]{-q/2} (\varepsilon + \varepsilon^2) = -\sqrt[3]{-q/2}$$

A więc w tym wypadku mamy trzy pierwiastki rzeczywiste, z których dwa są sobie równe.

III.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

W tym wypadku, jak zobaczymy, równanie ma 3 pierwiastki rzeczywiste, lecz wzór

$$x = \sqrt{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

nie daje możliwości otrzymania ich bezpośrednio przez pierwiastkowanie. /Należy wyciągnąć pierwiastek kwadratowy z liczby ujemnej/.

Matematycy włoscy w epoce Odrodzenia jeszcze nie znali teorii liczb zespolonych i nie umieli przy pomocy tego wzoru otrzymać pierwiastków. Dlatego też przypadek ten został nazwany przez nich przypadkiem nieprzywiedlnym /casus irreducibilis/.

Zauważamy, że ten przypadek zajść może tylko wówczas, gdy  $p < 0$ . Mamy wtedy:

$$u_3 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$$

przyczem pod pierwiastkiem jest już liczba dodatnia.

Możemy liczbę zespoloną  $u^3$  przedstawić w postaci:

$$u^3 = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

W tym celu obliczymy jej moduł:

$$r = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

Ponieważ  $p < 0$ , więc i  $p^3 < 0$ , a całe wyrażenie podpierwiastkowe jest dodatnie: zatem moduł  $r$  jest liczbą rzeczywistą. Obliczenie kąta  $\alpha$  również nie przedstawia trudności, wiemy bowiem, że

$$\cos \alpha = \frac{a}{r} = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{-\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

A zatem możemy napisać, że

$$u = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} \right)$$

Zauważymy dalej, że

$$\sqrt[3]{r} = \sqrt{-P/3}$$

A więc dla  $u$  mieć będziemy wartości następujące:

$$u_1 = \sqrt{-P/3} \left( \cos \frac{\alpha}{3} + i \sin \frac{\alpha}{3} \right);$$

$$u_2 = \sqrt{-P/3} \left( \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha+2\pi}{3} \right);$$

$$u_3 = \sqrt{-P/3} \left( \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} + i \sin \frac{\alpha+4\pi}{3} \right).$$

Zajmijmy się teraz wartościami  $v$ , Jak wiemy

$$v^3 = -\frac{Q}{2} - i \sqrt{\left(\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}\right)}$$

Podobnie jak  $u^3$ , będziemy mogli napisać  $v^3$  w postaci:

$$v^3 = r (\cos \alpha - i \sin \alpha),$$

a stąd

$$v = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha}{3} - i \sin \frac{\alpha}{3} \right).$$

A zatem

$$v_1 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha}{3} - i \sin \frac{\alpha}{3} \right);$$

$$v_2 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha+2\pi}{3} - i \sin \frac{\alpha+2\pi}{3} \right);$$

$$v_3 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\alpha+4\pi}{3} - i \sin \frac{\alpha+4\pi}{3} \right).$$