

skąd

$$\frac{1}{a_n} > n^\alpha$$

$$a_n < \frac{1}{n^\alpha}$$

Szereg

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

jest tutaj zbieżny, a zatem na zasadzie twierdzenia o porównywaniu dwóch szeregów i szereg /1/ jest zbieżny.

KRYTERJUM DUHAMEL-RAABE. jest analogiczne do kryterjum d'Alembert'a, jest przytem w takim do niego stosunku, jak drugie kryterjum Cauchy'ego do kryterjum pierwszego. Głosi ono, że jeżeli

$$\frac{\lg \frac{a_{n+1}}{a_n}}{\lg \frac{n}{n+1}} > \alpha > 1$$

to szereg /1/ jest zbieżny. Istotnie, wówczas mnożąc nierówność przez mianownik $\lg \frac{n}{n+1}$ ujemny, co pociąga za sobą zmianę znaku $>$ na $<$, otrzymamy:

$$\lg \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha \cdot \lg \frac{n}{n+1}$$

więc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$$

Zakładając następnie $n = 1, 2, \dots, n$ otrzymamy nierówności:

$$\frac{a_2}{a_1} < \frac{1}{2^\alpha}$$

$$\frac{a_3}{a_2} < \frac{2^\alpha}{3^\alpha};$$

$$\frac{a_4}{a_3} < \frac{3^\alpha}{4^\alpha};$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}$$

które po przemnożeniu stronami dają nierówność:

$$a_{n+1} < a_1 \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

Szereg, którego wyrazem ogólnym jest $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ jest zbieżny przy $\alpha > 1$, musi więc być zbieżnym i dany szereg /1/.

ROZWIĄZANIE FUNKCJI W SZEREG NIESKONCZONY. Udowodniliśmy w swoim czasie /twierdzenie Taylor'a/, że

$$f(x+h) = f(h) + \frac{x}{1!} f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(h) + R_n,$$

gdzie

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(h + \theta x)$$

przyczem

$$0 < \theta < 1$$

Jeżeli oznaczymy

$$f(h) + \frac{x}{1!} f'(h) + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(h) = S_n,$$

to wówczas $f(x+h) = S_n + R_n$

Przypuścimy teraz, że $R_n \rightarrow 0$, gdy $h \rightarrow \infty$

W takim razie przy założeniu, iż a_n rośnie nieograniczenie

czenie

$$f(x+h) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

czyli

$$f(x+h) = f(h) + \frac{x}{1} f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \frac{x^3}{3!} f'''(h) + \dots$$

To rozwinięcie funkcji $f(x+h)$ na szereg nieskończony nazywa się szeregiem Taylora. Funkcja R_n nosi nazwę reszty szeregu. Powyżej przedstawiliśmy tę resztę w postaci Lagrange'a, nieraz bywa dogodniej przedstawić ją w innej postaci, którą wyprowadzimy.

Weźmy pod uwagę funkcję:

$$F(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1} f'(x) - \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Jej pochodną jest:

$$F'(x) = - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x)$$

Całkując tę pochodną w granicach od a do b , otrzymamy:

$$\int_a^b F'(x) dx = - \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx,$$

czyli

$$F(b) - F(a) = - \int_a^b \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) dx.$$

Stąd

$$F(a) = F(b) + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b (b-x)^{n-1} f^{(n)}(x) dx.$$

Zakładając $b = a + h$ oraz $x = a + th$ mamy

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n.$$

[albowiem $F(b) = 0$,

$$f(b) - f(a) - \frac{b-a}{1} f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) - \dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)]$$

gdzie

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+th) dt$$

Na mocy uogólnionego twierdzenia o wartości pośredniej w zastosowaniu do całek

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^{n-1} f^{(n)}(a+th) dt &= \int_0^1 (1-t)^{n-p} (1-t)^{p-1} f^{(n)}(a+th) dt = \\ &= (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta h) \cdot \int_0^1 (1-t)^{p-1} dt, \end{aligned}$$

gdzie $0 < \theta < 1$. A zatem

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-p} f^{(n)}(a+\theta h) \cdot \frac{1}{p}.$$

Zakładając $p = n$, otrzymamy wzór Lagrange'a na resztę szeregu, jeżeli zaś założymy $p = 1$, otrzymamy resztę szeregu Taylor'a w postaci Cauchy'ego

$$R_n = \frac{h^n}{(n-1)!} (1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(a+\theta h)$$

Jeżeli w rozwinięciu funkcji $f(x+h)$ na szereg Taylora:

$$f(x+h) = f(h) + \frac{x}{1} f'(h) + \frac{x^2}{2!} f''(h) + \dots$$

założymy $h = 0$, otrzymamy t.zw. szereg Maclaurin'a:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Należy pamiętać, że warunkiem koniecznym i dostatecznym prawidłowości rozwinięcia funkcji $f(x)$ na szereg nieskończony jest dążenie reszty R_n do zera, gdy $n \rightarrow \infty$, oraz istnienie wszystkich pochodnych funkcji $f(x)$ przy wszelkich wartościach zmiennej w danym przedziale.

Przykład 1. Rozwińmy w szereg Maclaurin'a funkcję

$$f(x) = e^x$$

Mamy

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x$$

wiec wogóle

$$f^{(n)}(0) = 1$$

Reszta w postaci Lagrange'a: $R_n = \frac{x^n}{n!} e^{\alpha x}$

Ponieważ

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n} \cdot \frac{x}{n-1} \cdot \frac{x}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{x}{1}$$

dąży do zera, gdy n rośnie nieograniczenie, zaś

$e^{\alpha x} < e^x$ więc $R_n \rightarrow 0$, a zatem rozwinięcie funkcji może być uskutecznione. Otrzymamy t.zw. s z e - r o g w y k ł a d n i c z y.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Przykład 2. Rozwinąć w szereg Maclaurin'a funkcję:

$$f(x) = \sin x$$

Mamy

$$f'(x) = \cos x; f''(x) = -\sin x; f'''(x) = -\cos x; f^{(4)}(x) = \sin x$$

Pochodne te dla $x=0$ są odpowiednio równe $1, 0, -1, 0$.

A więc

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Dla wykazania, że rozwinięcie jest prawidłowe, zbadamy resztę:

$$R_n = \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(x).$$

Zawsze jest $f^{(n)}(x) \leq 1$ więc, $R_n \leq \frac{x^n}{n!}$ a ponieważ $\frac{x^n}{n!} \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$, przeto $R_n \rightarrow 0$.

W taki sam sposób możemy dowieść, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

P r z y k ł a d 3. Nie powtarzając dowodu, że

$R_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$, możemy napisać rozwinięcie funkcji

$$f(x+h) = \sin(x+h)$$

w szereg Taylora:

$$\sin(x+h) = \sin x + \frac{h}{1} \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \frac{h^4}{4!} \sin x + \dots$$

Analogicznie

$$\cos(x+h) = \cos x - \frac{h}{1} \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x + \frac{h^3}{3!} \sin x + \frac{h^4}{4!} \cos x - \dots$$

P r z y k ł a d 4. Opierając się na rozwinięciu funkcji w szereg, możemy sprawdzić znany już nam wzór Eulera. Rozwińmy mianowicie funkcję w szereg Maclaurin'a:

$$e^{ix} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

Stąd zaś

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Zajmiemy się teraz rozwinięciem w szereg dwumianu

Niech będzie:

$$f(x) = (1+x)^m$$

gdzie m jest dowolną liczbą wymierną. Mamy:

$$f^{(n)}(x) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

$$f^{(n)}(0) = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)$$

Rozwińmy daną funkcję na szereg Maclaurin'a:

$$f(x) = 1 + \frac{m \cdot x}{1} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^n}{n!} + \dots$$

Gdy m jest liczbą całkowitą, dodatnią, szereg ten jest wielomianem, znanym z algebry elementarnej pod nazwą rozwinięcia dwumianu Newtona. W przypadku ogólnym, gdy m jest jakąkolwiek liczbą wymierną, mamy resztę /w postaci Cauchy'ego/:

$$R_n = \frac{x^n}{(n-1)!} [1-\theta]^{m-1} \cdot m \cdot (m-1) \dots (m-n+1) \cdot (1+\theta x)^{m-n}$$

Oznaczmy dla skrócenia:

$$\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{(n-1)!} = \binom{m-1}{n-1}$$

W takim razie

$$R_n = m \cdot \binom{m-1}{n-1} x^n \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(1+\theta x)^{n-1}} \cdot (1+\theta x)^{m-n}$$

Aby dowieść, że powyżej napisany szereg istotnie

wyraża funkcję $(1+x)^m$, należy udowodnić, że $R_n \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$. W tym celu uważajmy

$$m(m-1)\dots(m-n+1) \cdot x^n = a_n$$

za wyraz ogólny pewnego szeregu. Jeżeli okaże się, że ten szereg jest zbieżny, to jego wyraz ogólny a_n będzie dążył do zera. Zastosujmy więc do tego kryterjum d'Alembert'a:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m(m-1)\dots(m-n)(m-n+1) \cdot x^{n+1}}{(n+1)! \cdot m(m-1)\dots(m-n+1) \cdot x^n}$$

skąd

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{m-n}{n+1} \cdot x$$

Zauważmy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m-n}{n+1} \right) \cdot x = -x$$

O ile zatem $|x| < 1$, to stosunek $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ będzie mniejszy od jedności, skąd wniosek, że $a_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$. Dalej zaś mamy dla $|x| < 1$:

$$\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} < 1$$

oraz

$$(1+\theta x)^{m-1} < k$$

$1/k$ - liczba stała, gdyż

$$(1+\theta x)^{m-1} < 2^{m-1} < k$$

/albowiem $0 < \theta < 1$ /. W takim razie

$$R_n = a_n \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-1} (1+\theta x)^{m-1}$$

dąży do zera, gdy n rośnie nieograniczenie. A zatem powyższe rozwinięcie dwumianu jest słuszne dla każdej wartości x , zawartej pomiędzy -1 , a $+1$. Szereg ten nosi nazwę szeregu dwumianowego.

Przykład. Dana jest funkcja:

$$f(x) = \sqrt{1+x}$$

Rozwija się ona w szereg następujący:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Dla zapoznania się z innym sposobem otrzymania rozwinięcia użyjemy metody całkowania, by z jednego szeregu otrzymać drugi. Zrobimy to dla funkcji logarytmicznej, przyczem otrzymamy t.zw. szereg logarytmiczny. Mamy:

$$\lg(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

oraz

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{m-1} t^{m-1} + \frac{(-1)^m t^m}{1+t}.$$

Suma powyższa posiada skończoną liczbę składników więc jej całka jest równa sumie całek składników:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x dt - \int_0^x t \cdot dt + \int_0^x t^2 dt - \dots + \int_0^x \frac{(-1)^{m-1} t^{m-1}}{1+t} dt.$$

A zatem

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} + R_m,$$

gdzie

$$R_m = (-1)^m \int_0^x \frac{t^m dt}{1+t}$$

Jeżeli okaże się, że $R_m \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$, to $\lg(1+x)$ równa się sumie szeregu nieskończonego:

$$x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{m-1} x^m}{m} + \dots$$

Udowodnimy, że jest tak istotnie, gdy $-1 < x \leq 1$. Jest to niemal oczywiste, gdy $0 < x \leq 1$

$$|R_m| = \int_0^x \frac{t^m dt}{1+t} < \int_0^x t^m dt;$$

$$|R_m| < \frac{x^{m+1}}{1+m} \leq \frac{1}{1+m}$$

Stąd $|R_m| \rightarrow 0$, gdy $m \rightarrow \infty$. Jeśli teraz $-1 < x \leq 0$, to oznaczmy $-x = X$, gdzie $1 > X > 0$ oraz $t = -z$:

$$|R_m| = \int_0^x \frac{z^m dz}{1-z};$$

$$|R_m| = \int_0^x \frac{z^m dz}{1-z} < \frac{1}{1-X} \int_0^x z^m dz.$$

A więc

$$|R_m| < \frac{1}{1-X} \cdot \frac{x^m}{1+m}$$

Tembardziej

$$|R_m| < \frac{1}{(1-X)(1+m)}$$

Gdy więc $m \rightarrow \infty$, to $|R_m| \rightarrow 0$. Zatem i w tym przypadku twierdzenie zostało udowodnione. Mamy więc:

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

• ile $-1 < x < 1$, przy innych wartościach zmiennej x szereg ten jest rozbieżny /nie może więc określać pewnej funkcji/. Gdy $x=1$, otrzymujemy:

$$\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

W taki sam sposób rozwijamy na szereg funkcję $\arctg x$.

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Łatwo udowodnić, że jest to prawidłowe, gdy $|x| \leq 1$.

Jeżeli $x=1$, mamy:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

CAŁKOWANIE.

Określiliśmy w swoim czasie pojęcie oraz poznaliśmy niektóre sposoby całkowania. Teraz będziemy w dalszym ciągu badać jego technikę. Rozpocznijmy od całek najprostszych, mianowicie od całek funkcji wymiernych.

Niech będzie dana funkcja wymierna:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Możemy uważać, że stopień wielomianu $P(x)$ nie