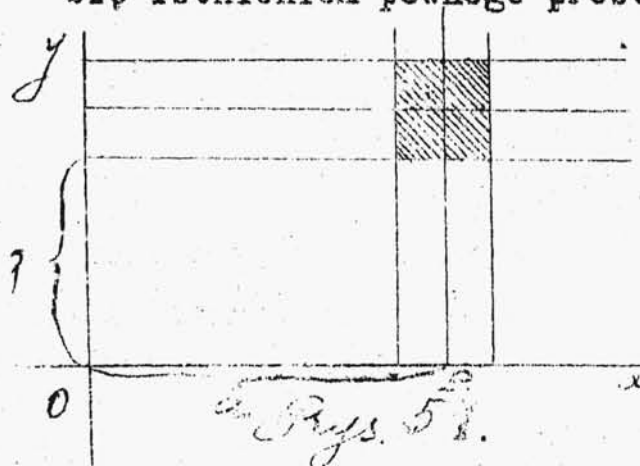


co dowodzi, iż  $l$  jest granicą prawostronną t.j.

$l = f(a+0)$ . Tak więc istnienie granicy prawostronnej zostało udowodnione.

Ć w i c z e n i e. Wypowiedzieć i udowodnić analogiczne twierdzenie dla granicy lewostronnej.

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI. Gdy te trzy wielkości  $f(a-0)$ ,  $f(a+0)$  i  $f(a)$  są sobie równe, powiadamy, że funkcja jest ciągła w punkcie  $x=a$ . W badanym przez nas przykładzie funkcja  $E(x)$  w punkcie  $0$  nie jest ciągła. Z określenia ciągłości funkcji wynika, że o ile funkcja jest ciągła w punkcie  $M$  to musi posiadać granicę, przy czem wartość funkcji w punkcie  $M$  równa się tej granicy. W interpretacji geometrycznej ciągłość wyraża się istnieniem pewnego prostokąta o wysokości dowol-



nie małej, wewnątrz którego znajdują się wszystkie punkty krzywej w danym przedziale. Prostokąt otaczający punkt  $M$  nazywa się otoczeniem punktu

na płaszczyźnie. Widoczne jest, że poprzednio podane określenie ciągłości funkcji można

wyrazić jeszcze inaczej:

Funkcja  $f(x)$  jest ciągła dla wartości  $x=a$ , jeżeli wartość funkcji w otoczeniu punktu  $A$  zbliża się do wartości funkcji w samym punkcie  $A$  o tyle, ile tego wymaga dowolnie obrana miara przybliżenia  $\varepsilon > 0$ . Funkcja jest ciągła, gdy liczbie dowolnej  $\varepsilon > 0$  odpowiada taka liczba  $\delta > 0$ , że nierówność

$$11/ |x - a| < \delta$$

pociąga za sobą nierówność

$$12/ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Widzimy więc, że otrzymamy kryterjum ciągłości, zastępując w kryterjum granicy liczbę  $L$  przez  $f(a)$ .

TWIERDZENIE. Warunkiem koniecznym i wystarczającym ciągłości prawostronnej funkcji  $f(x)$  w punkcie  $x=a$  jest, by dla dowolnego  $\varepsilon > 0$  /można było znaleźć/, istniała odpowiadająca liczba  $h > 0$  taka, iż warunek

$$11/ a \leq x' \leq x'' \leq a+h$$

pociągał za sobą nierówność

$$12/ |f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

Warunek pierwszy wyraża oczywiście, iż punkty  $x'$  i  $x''$  leżą w przedziale, należą do przedziału  $(a, a+h)$

W rzeczy samej, niech  $x' \leq a$ , a  $x'' = x$  t.j. dowolnemu punktowi przedziału  $(a, a+h)$ . Wtedy, na mocy założenia, ponieważ warunek /1/ jest spełniony, mamy /2/ który przyjmie postać

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

czyli  $f(a+h) - f(a)$  co jest właśnie wyrazem ciągłości prawostronnej. Dowodzi to, iż warunek, wyrażony przez nasze twierdzenie jest dostateczny. Warunek jest także i konieczny, albowiem, jeśli  $f(a+0)$  istnieje i równa się  $f(a)$  t.j. jeśli funkcja w punkcie  $x=a$  jest prawostronnie ciągła, to każdemu  $\varepsilon > 0$  odpowiada liczba  $h' > 0$  taka, iż  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

o ile tylko

$$a \leq x' \leq x'' \leq a+h'$$

a to na mocy istnienia  $f(a+0)$  (patrz twierdzenie). Z drugiej strony temu samemu  $\varepsilon > 0$  odpowiada liczba

$$h'' > 0 \text{ taka, iż } |f(x') - f(a)| < \varepsilon,$$

o ile tylko  $x'$  należy do przedziału  $(a, a+h'')$  t.j. dla wszystkich wartości  $x'$ , spełniających nierówność:

$$a \leq x' \leq a+h''$$

a to na mocy określenia granicy, którą to granicą jest tu  $f(a)$ . Niech teraz  $h$  oznacza mniejszą z 2-ch liczb

$$h' \text{ i } h'' \text{ Widzimy, iż } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

dla wszystkich wartości  $x'$  i  $x''$  należących do przedziału  $(a, a+h)$  z włączeniem końców  $a$  i  $a+h$ .

Ć w i c z e n i e. Wypowiedzieć i udowodnić odpowiednie twierdzenie dla ciągłości lewostronnej.

Jeśli teraz weźmiemy pod uwagę jednocześnie prawo i lewostronne otoczenie punktu  $x=a$ , to otrzymamy twierdzenie następujące:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym ciągłości funkcji w punkcie  $a$  jest, by dla każdego  $\varepsilon > 0$  istniała odpowiadająca liczba  $\delta > 0$  <sup>zależy</sup> taka, dla dowolnych 2-ech wartości  $x'$  i  $x''$  zmiennej  $x$  w przedziale  $(a, a+h)$  zachodziła zawsze nierówność

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Ć w i c z e n i e. Wyprowadzić ciągłość funkcji  $\sqrt{x}$  z nierówności

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} = \frac{x-a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{a}} < \frac{x-a}{\sqrt{a}} \quad \text{gdy } a > 0 \ (a \neq 0)$$

Jak zmienić dowód, gdy  $a=0$ .

Funkcja nazywa się ciągłą w przedziale  $(a, b)$  jeżeli jest ciągłą we wszystkich punktach tego przedziału.

Suma dwóch funkcji ciągłych w punkcie  $a$  jest ciągłą w tym punkcie, czyli gdy

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a), \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a)$$

to

$$|f(x) + g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) + g(a)$$

Dowodzi się tego w ten sam sposób, jak dowodziliśmy twierdzenia o sumie granic dwóch funkcji. Podobnie odtwarzając dowód twierdzenia, że granica iloczynu funkcji równa się iloczynowi granic tych funkcji, wykazemy, że

$$f(x) \cdot g(x) \rightarrow f(a) \cdot g(a).$$

Odpowiednio z łatwością można dowieść, że o iloczyn  $f(a) \neq 0$  to

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{f(a)}{g(a)}$$

Jasną jest rzeczą, że funkcja  $f(x)$  ciągła spełnia równość następującą

$$\lim f(x) = f(\lim x)$$

Oczywiście zakładamy, że ciągłość zachodzi dla tej wartości  $x$ , która się równa  $\lim x$  i, że oba wyrazy w równości poprzedniej istnieją.

Odwrotnie, jeśli zachodzi równość

$$\lim f(x) = f(\lim x)$$

gdzie oba wyrazy równości i obie granice, jak zakładamy, istnieją, to funkcja  $f(x)$  jest ciągłą dla tej wartości  $x$ , która się równa  $\lim x$ .

Jeśli funkcja jest ciągła w przedziale  $(a, b)$  to zachodzi równość:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  dla wszystkich wartości  $x$  takich, że  $a \leq \lim x \leq b$ . Oczywiście jest rzeczą, iż dla  $\lim x = a$  lub  $\lim x = b$ , mamy na myśli tylko ciągłość i granicę odpowiednio tylko prawostronną lub lewostronną.

Można wszystko poprzednie ująć krótko w wysłowieniu następującem:

Dla funkcji, i tylko dla funkcji ciągłej, można przedstawić symbole funkcji i symbol granicy, t.j. granica funkcji równa się tejże funkcji granicy.

Z tej uwagi można łatwo otrzymać jako wniosek, że suma lub iloczyn funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą gdyż, jeśli  $f(x) = f'(x) + f(x)$  to  $\lim f(x) = \lim f'(x) + \lim f(x) = f'(\lim x) + f(\lim x) = f(\lim x)$

Tak samo jeśli  $f(x) = f(x) \cdot f'(x)$  to  $\lim f(x) = \lim f(x) \cdot \lim f'(x) = f(\lim x) \cdot f'(\lim x) = f(\lim x)$

Ogólnie łatwo się przekonać, że funkcja ciągła funkcji ciągłej, t.j. funkcja złożona z dwóch funkcji ciągłych jest także funkcją ciągłą t.j. jeśli  $f(x) = \varphi[f(x)]$  czyli  $f(x) = \varphi(z)$  gdzie  $z = f(x)$  jeśli  $f(x)$  jest funkcją ciągłą względem  $x$  w przedziale  $(a, b)$ , a funkcja  $\varphi(z)$  jest ciągłą względem zmiennej  $z$ , dla wszystkich wartości  $z$ , które przyjmuje funkcja  $f(x)$

gdy  $x$  zmienia się w przedziale  $(a, b)$ , to  $f(x)$  jest także funkcją ciągłą zmiennej  $x$  w  $(a, b)$ .

$$\begin{aligned} \text{W rzeczy samej: } \lim f(x) &= \lim f(z) = f(\lim z) = \\ &= f[\lim L(x)] = f[L(\lim x)] = f(\lim x) \end{aligned}$$

Udowodnimy później, że zbiór wartości, które przyjmuje funkcja ciągła  $f(x)$ , gdy  $x$  zmienia się w  $(a, b)$  tworzy także przedział.

Funkcja wymierna

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

jest ciągła przy wszelkich wartościach  $x$ , które nie są pierwiastkami mianownika, t.j. gdy  $Q(x) \neq 0$

Dowodniemy dla przykładu ciągłość funkcji

$$f(x) = \sin x$$

dla wartości  $x = x_1$ . Utwórzmy więc różnicę

$$|f(x) - f(x_1)| = |\sin x - \sin x_1| = 2 \left| \sin \frac{x-x_1}{2} \right| \left| \cos \frac{x+x_1}{2} \right|$$

Ponieważ

$$\left| \sin \frac{x-x_1}{2} \right| < \frac{|x-x_1|}{2} \text{ oraz } \left| \cos \frac{x+x_1}{2} \right| \leq 1$$

więc

$$|\sin x - \sin x_1| < 2 \cdot \frac{|x-x_1|}{2}$$

czyli

$$|\sin x - \sin x_1| < |x-x_1|$$

Z tej nierówności wynika ciągłość funkcji. Wystarczy bowiem wybrać takie otoczenie punktu  $x_1$ , aby

$$|x-x_1| < \varepsilon$$



a wówczas będzie

$$|\sin x_1 - \sin x_2| < \varepsilon$$

Punkt  $x$  obraliśmy zupełnie dowolnie, zatem funkcja  $\sin x$  jest ciągła dla każdego  $x$  w przedziale skończonym.

Ciągłość funkcji  $\cos x$  wynika bezpośrednio ze związku:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Ponieważ  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  więc i ta funkcja będzie ciągła we wszystkich punktach, z wyjątkiem tych wartości, dla których  $\cos x = 0$  t. j. dla

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

oraz

$$x = -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \dots$$

Dla  $x$  dążącego do powyższych wartości, funkcja  $\operatorname{tg} x$  wzrasta nieograniczenie co do wartości bezwzględnej, a mianowicie:

$$\operatorname{tg} x \rightarrow \infty \quad \text{dla} \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0, \quad \text{zaś} \quad \operatorname{tg} x \rightarrow -\infty \quad \text{dla} \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$$

Podobnie funkcja

$$f(x) = \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}$$

t. j. iloraz wielomianów względem  $\sin x$  i  $\cos x$  jest ciągły w każdym punkcie, z wyjątkiem tych warto-



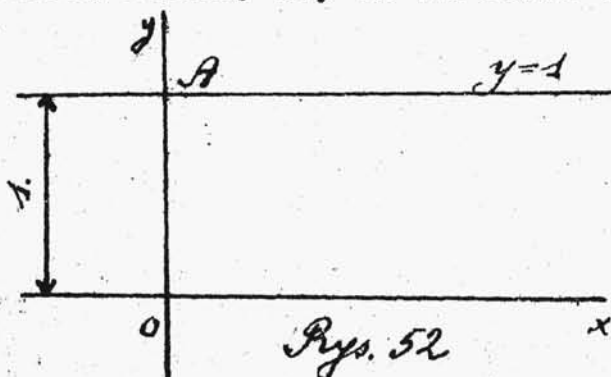
ści  $x$  dla których mianownik ułamka staje się zerem.

Przystąpmy teraz do krótkiego przeglądu kilku nieciągłości, częściej spotykanych przy badaniu funkcji. Jak wiemy, funkcja jest nieciągła, zależnie od tego czy trzy liczby

$$f(a-0), f(a+0) \text{ oraz } f(a)$$

istnieją i czy są równe, czy też różne od siebie.

A/ Najprostszy wypadek nieciągłości zachodzi wtedy, gdy obie granice istnieją i są nawet sobie równe, lecz różnią się od wartości funkcji w punkcie danym.



Rys. 52

Weźmy więc funkcję określoną w sposób następujący: gdy  $x \neq 0$ , to  $y=1$  gdy zaś  $x=0$  wtedy  $y=0$ . Wykres nie uwidacznia nieciągłości tej funkcji,

gdyż stanowi prostą, równoległą do osi  $x$  i oddaloną od niej o  $1$ ; przyczem punkt przecięcia się tej prostej z osią  $y$ , t.j. punkt  $A$  należy zastąpić przez punkt

$O$ . Funkcja ta jest nieciągłą, gdyż

$$\begin{aligned} f(0-0) &= 1 \\ f(0+0) &= 1 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

ale

Zmieniając w określeniu tej funkcji jedną jej wartość, można funkcję uczynić ciągłą.

Jako inny przykład można wziąć funkcję

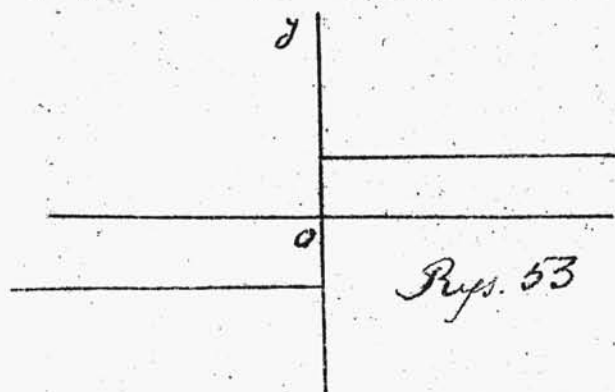
$$y = \frac{x}{x}$$

Dla wszystkich wartości  $x \neq 0$ ,  $y = 1$ . Wyjątek stanowi  $x = 0$ , dla której ta wartość  $y$  jest nieokreślona. A więc w punkcie początkowym funkcja jest nieciągła. Gdy jednak zrobimy zastrzeżenie, że dla  $x = 0$ ,  $y = 1$ , funkcja stanie się ciągłą.

B/. Zbadajmy teraz funkcję, dla której granica prawostronna jest różna od granicy lewostronnej, czyli

$$f(a+0) \neq f(a-0)$$

Niech np. dana będzie funkcja  $y = \frac{|x|}{x}$  jest ona określona przez następujące warunki: gdy  $x < 0$  to  $y = -1$ ; gdy zaś  $x > 0$ ,  $y = 1$ ; dodatkowo musimy określić funkcję w punkcie początkowym, np.  $x = 0$ ,



$y = a$ . Ta funkcja różni się od funkcji poprzednio rozpatrywanej tem, że zmieniając jej wartości tylko w jednym punkcie, nie uczynimy jej ciągłą.

C/. Nieciągłość funkcji może być spowodowana również nieistnieniem jednej lub obu granic np.

$$f(x) \rightarrow \infty \text{ as } x \rightarrow a+0$$

albo

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow a-0$$

Przykładem funkcji nieciągłej jest funkcja

$$y = \operatorname{tg} x$$

Dla  $x = \frac{\pi}{2}$  zachodzi przerwa w ciągłości. Albo-

wiem

$$f(x) \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0$$

oraz

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$$

Podobnie nieciągłą jest funkcja

$$y = \frac{1}{x}$$

w punkcie początkowym:

$$f(x) \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow 0-0, \quad f(x) \rightarrow +\infty \quad x \rightarrow 0+0$$

Do nieciągłych należą również t.zw. funkcje oscylujące /wahające się/, np. funkcja:

$$y = \sin \frac{1}{x}$$

W dowolnie małym otoczeniu punktu 0 przyjmuje ona nieskończenie wiele razy wartości od  $+1$  do  $-1$  /rys. 27/; nie posiada więc ani granicy lewostronnej, ani granicy prawostronnej, co wskazuje na nieciągłość funkcji. —

Zapoznajmy się teraz z kilkoma własnościami funkcji, wynikającymi z ich ciągłości.

Przypuśćmy, że dana funkcja  $f(x)$  ciągła w przedziale  $(M, N)$  w jednym z punktów tego przedziału,

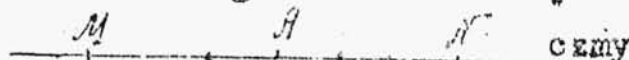
np. w  $A$ , jest dodatnią, czyli

$$f(a) > 0$$

W takim razie istnieje taki przedział  $(B, C)$ , otaczający punkt  $A$ , że dla wszystkich punktów tego przedziału słuszną jest nierówność

$$f(x) > 0$$

Inaczej można to twierdzenie wypowiedzieć w sposób następujący: jeśli funkcja ciągła jest w punkcie  $A$  dodatnia, to musi być dodatnią i w otoczeniu tego punktu. Dowód tego twierdzenia jest zupełnie prosty. Oznaczymy



Rys. 54

$$f(a) = K > 0$$

i niech  $\varepsilon$  będzie jedną z liczb zawartych pomiędzy 0 i  $K$ :

$$0 < \varepsilon < K$$

Z ciągłości funkcji wynika, że każdej liczbie  $\varepsilon$  czyniącej zadość powyższemu warunkowi, odpowiada taka liczba  $\eta$ , że gdy

$$|x - a| < \eta$$

to w takim razie

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Nierówność (2) można zastąpić przez dwie nierówności:

$$\begin{aligned} f(x) &< f(a) + \varepsilon \\ f(x) &> f(a) - \varepsilon \end{aligned}$$

Podstawiając do ostatniej nierówności  $K$  za-

miast  $f(a)$  otrzymujemy nierówność

$$(2') f(a) > k - \varepsilon > 0$$

która dowodzi słuszności tezy.

W analogiczny sposób można udowodnić twierdzenia, że jeżeli funkcja ciągła jest w danym punkcie ujemna, to jest ujemna i w otoczeniu tego punktu.

Określenie funkcji ciągłej, oparte na nierównościach, ma charakter abstrakcyjny i mało bezpośredni. Gdybyśmy chcieli określić ciągłość intuicyjnie, to moglibyśmy powiedzieć w ten sposób: jeśli krzywa, będąca wykresem funkcji ciągłej, ma punkty po obu stronach danej prostej, to musi przeciąć tę prostą przynajmniej w jednym punkcie. Jest to wniosek z pierwszego określenia ciągłości. Niech dana prosta będzie równoległa do osi  $X$ , czyli niech posiada równanie:

$$y = b$$

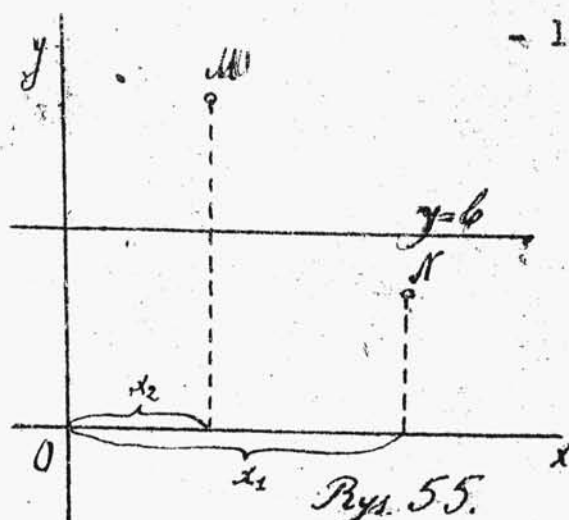
i niech

$$y = f(x)$$

będzie równaniem danej krzywej. Krzywa ta posiada punkty takie jak  $M$ , których rzędne są większe od  $b$  i także jak  $N$ , których rzędne są od  $b$  mniejsze.

$$\begin{aligned} f(x_2) &< b \\ f(x_2) &> b \end{aligned}$$

Należy udowodnić, że istnieje na krzywej punkt  $K$ .



spółrzędnych  $\xi$  i  $b$ , czyli

$$f(\xi) = b$$

przyczem  $x_1 < \xi < x_2$

Można to wyrazić jeszcze

inaczej, mianowicie: f u n - k -

c j a c i ą g ł a p o -

między  $x_1$  i  $x_2$  przybiera wszystkie wartości pośrednie

od  $f(x_1)$  do  $f(x_2)$ .

Dowodziemy twierdzenia w wypadku szczególnym, gdy  $b=0$  t.j. gdy prosta jest osią  $X$ . /Zawsze można zagadnienie do tego sprowadzić, zmieniając układ współrzędnych/. W takim razie zakładamy, że

$$\begin{aligned} f(x_1) &< 0 \\ f(x_2) &> 0 \end{aligned}$$

i przypuszczamy ponad to, w celu ustalenia uwagi, że np.  $x_1 < x_2$

Podzielmy wszystkie liczby przedziału  $(x_1, x_2)$  na dwie klasy. Do klasy I zaliczymy każdą liczbę rzeczywistą  $\ell$ , spełniającą ten warunek, że dla wszelkiej liczby  $x$ , zawartej w przedziale  $(x_1, \ell)$  t.j. spełniającej nierówność

$$x_1 \leq x \leq \ell$$

mamy

$$f(x) < 0 \quad *$$

do klasy II zaś wszystkie pozostałe liczby przedziału  $(x_1, x_2)$ . W ten sposób otrzymaliśmy przekrój. Określą on pewną liczbę, którą oznaczymy przez  $\xi$ . Zapomocą sprowadzenia do niedorzeczności wykażemy, że

$$f(\xi) = 0$$

Przypuścimy bowiem, że

$$f(\xi) = k > 0$$

Na zasadzie poprzedniego twierdzenia musi istnieć taki przedział  $(A, B)$ , otaczający punkt  $\xi$ , wewnątrz którego byłoby  $f(x) > 0$ .



*Rys. 56*

Jest to jednak niemożliwe, gdyż dla wartości  $x = a$  odpowiadającej punktowi

$$A, f(a) < 0, \text{ należy}$$

do klasy I/. Podobnie niedorzeczne jest przypuszczenie, że

$$f(\xi) < 0$$

A zatem musi być słuszną równość

$$f(\xi) = 0$$

\*

Mozemy jeszcze dopełnić klasę niższą, dołączając do niej wszystkie liczby mniejsze od  $x$ , klasę wyższą zaś zapomocą dołączenia liczb



W interpretacji geometrycznej odpowiada liczbie  
 $\mathcal{E}$  punkt przecięcia krzywej z osią  $X$ -ów.

Przypuśćmy, że dana jest funkcja  $f(x)$  i rozpa-  
 trzamy jej wartości, gdy  $x$  zmienia się w przedziale  
 $(a, b)$ . Może się zdarzyć, że pozostaje stale słuszną  
 nierówność:

$$f(x) \leq M$$

Mówimy wówczas, że funkcja jest o g r a n i -  
 c z o n a o d g ó r y. Gdy zachodzi nierówność  
 przeciwna t.j.

$$f(x) \geq m$$

funkcja nazywa się o g r a n i c z o n ą o d  
 d o ł u. W wypadku, gdy zachodzą obie nierówności  
 jednocześnie, powiadamy wprost, że funkcja jest ogra-  
 niczona w przedziale  $(a, b)$

Mogliby się здаwać, że funkcja określona dla  
 wszystkich wartości  $x$  w danym przedziale musi być o-  
 graniczona. Jednak prosty przykład wykazuje, że tak nie  
 jest. Niech  $f(x) = \frac{1}{x}$ , gdy  $x \neq 0$  i niech

$f(x) = 0$  gdy  $x = 0$ . Nie istnieje taka liczba  $M$ ,  
 aby  $f(x) \leq M$ , ani też niema takiej liczby  $m$  aby  
 $f(x) \geq m$ .

Niech teraz  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5}$ . Ta funkcja jest  
 ograniczona. Istotnie zawsze jest  $x^2 \geq 0$ , a więc

$x^2 + 5 \geq 5$ . Stąd  $\frac{1}{x^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$ . Ponadto  $\frac{1}{x^2 + 5} > 0$ .  
Ostatecznie możemy napisać to w postaci:

$$0 < \frac{1}{x^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$$

Łatwo dać przykłady funkcji, ograniczonych tylko od góry lub tylko od dołu.

Kresom górnym /wyższym/ danej funkcji nazywa się najmniejszą z liczb której wartości funkcja nigdy nie może przewyższyć, t.zn. spełniająca nierówność

$$(1) f(x) \leq K$$

i ponad to ten warunek, że gdy wybierzemy dowolnie małą liczbę  $\varepsilon$ , to istnieć będą zawsze takie wartości  $x$ , że spełnioną zostanie nierówność

$$(2) f(x) > K - \varepsilon$$

**TWIERDZENIE.** Jeżeli funkcja określona w przedziale  $(a, b)$  jest ograniczona od góry, to posiada kres górny. Niech będzie

$$f(x) \leq M$$

Wyobraźmy sobie przekrój następujący: do I. ej