

może się spełniać tylko dla skończonej liczby wyrazów;  
natomiast "prawie zawsze" zachodzi nierówność przeciwna.  
Utwórzmy nierówność

$$|u_n - g| > \alpha.$$

Ponieważ liczby  $u_n$  stanowią część liczb  $u_n$ ,  
więc nierówność ta może być spełniona tylko dla niektó-  
rych wartości wskaźnika  $n$ . "Prawie zawsze" więc musi  
się spełniać nierówność przeciwna

$$|u_n - g| < \alpha.$$

A zatem

$$u_n \rightarrow g.$$

Podobnie, jeżeli zmienimy w ciągu porządek wyra-  
zów, granica ciągu pozostanie bez zmiany.

CIĄGI ROSNĄCE I MALEJĄCE. Monotonicznym nazywa się  
ciąg, w którym każdy następny wyraz nie jest mniejszy  
od poprzedniego, albo ciąg, w którym każdy następny  
wyraz nie jest większy od poprzedniego, t.j. albo

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$$

albo

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n \leq \dots$$

Gdybyśmy w tych ciągach usunęli pomiędzy wyrazami  
znak równości, otrzymalibyśmy ciąg /stale/ r o s n ą -  
c y lub /stale/ m a l e j ą c y, t.j. albo

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots \dots u_n > u_{n+1} > \dots$$

albo

$$u_1 < u_2 < u_3 < \dots \dots u_n < u_{n+1} < \dots$$

Ciąg jest ograniczony od góry gdy istnieje liczba większa od wszystkich wyrazów ciągu, czyli gdy dla każdego  $n$

$$u_n < M$$

Jeżeli zaś dla każdego  $n$  zachodzi nierówność przeciwna:

$$u_n > m$$

ciąg jest ograniczony od dołu.

Gdy zachodzą obie nierówności jednocześnie:

$$m < u_n < M$$

to, rzecz jasna, ciąg jest ograniczony od góry i od dołu.

Ciąg rosnący jest zawsze ograniczony od dołu; od góry może być lub nie być ograniczony. Istotnie, wystarczy wziąć liczbę  $m$  mniejszą od 1, a będzie ona mniejsza od wszystkich wyrazów ciągu.

TWIERDZENIE: ciąg monotoniczny ograniczony od góry jeśli jest niemalejący, a od dołu, jeśli jest nierosnący, posiada granicę.

Jeżeli ciąg niemalejący jest ograniczony od góry, w takim razie posiada granicę. Niech liczba  $M$  będzie większa od wszystkich wyrazów ciągu:

$$u_n < M$$

Mamy udowodnić, że  $u_n \rightarrow g$ . Utwórzmy przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych. Jak wiemy, albo klasa niższa posiadać musi liczbę największą, albo klasa wyższa posiadać liczbę najmniejszą. Określimy więc przekrój w sposób następujący: do klasy niższej zaliczymy każdą liczbę  $x$ , która jest równa lub mniejsza przynajmniej od jednego wyrazu ciągu:

$$x \leq u_n$$

Do klasy wyższej zaliczymy każdą liczbę  $x$ , nie czyniącą zadość temu warunkowi, czyli większą od wszystkich wyrazów ciągu

$$x > u_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

W ten sposób przekrój jest w zupełności określony: każda liczba należeć musi do jednej z dwóch klas; wszystkie liczby klasy  $I$  są mniejsze od wszystkich liczb klasy  $II$ ; żadna klasa nie jest pusta.  $u_n$  należy do klasy  $I$ , zaś  $M$  do klasy  $II$ . Przekrój ten wyznacza pewną liczbę  $g$ , która będzie największą liczbą w klasie niższej tylko wtedy, gdy wszystkie wyrazy, począwszy od pewnego, są sobie równe; w przeciwnym razie  $g$  będzie z pewnością najmniejszą liczbą w klasie wyższej, co zresztą zawsze będzie miało miejsce, o ile ciąg jest "stałe rosnący". Ta liczba  $g$  właśnie jest

granicą ciągu. Dowód: Usuwamy na razie przypadek, gdy wszystkie wyrazy ciągu od pewnego miejsca są sobie równe. Ponieważ  $g = x_E$ , więc  $g > u_n$  dla każdego  $n$ . Dalej  $g - \varepsilon$ , gdzie  $\varepsilon > 0$  jest liczbą dowolnie małą, należy do klasy pierwszej, a więc  $g - \varepsilon$  jest mniejsze od jednego przynajmniej wyrazu ciągu, np. od  $u_{n_0}$ ; czyli zawsze można znaleźć taki wyraz  $u_{n_0}$  aby:

$$g - u_{n_0} < \varepsilon$$

Jeśli teraz weźmiemy  $n > n_0$ , będzie zachodziła nierówność:

$$u_n > u_{n_0}$$

W takim razie

$$0 < g - u_n < g - u_{n_0}$$

lecz

$$g - u_{n_0} < \varepsilon$$

a więc

$$g - u_n < \varepsilon$$

czyli

$$|g - u_n| < \varepsilon$$

$$g - u_n = |g - u_n| \text{ gdyż } g > u_n \text{ stąd wynika, że } u_n \rightarrow g \text{ c. b. d. d.}$$

Wróćmy jeszcze do wyjątkowego przypadku, gdy wszystkie wyrazy ciągu są od pewnego miejsca /np. dla  $n > n_0$ / równe. Wtedy:

$$U_{n_0} = U_{n_0+1} = U_{n_0+2} = \dots = U_{n_0+p}$$

i wspólna wartość tych wyrazów będzie właśnie granicą  $g$ .  
Tak więc i w tym wypadku granica istnieje.

Jeżeli ciąg rosnący nie jest ograniczony od góry, to wyrazy jego rosną nieograniczenie. Istotnie niema takiej liczby  $N_0$ , któraby była większą od wszystkich wyrazów ciągu; zawsze więc można znaleźć taki wskaźnik  $N_0$ , iżby

$$M < U_{N_0}$$

Gdy weźmiemy  $n > N_0$ , to

$$U_n > U_{N_0} > M$$

A więc jakkolwiek wielką wybierzemy liczbę  $M$  "wszystkie prawie" wyrazy ciągu będą od niej większe. Dowodzi to, że ciąg dąży do nieskończoności.

Całą teorię, dotyczących ciągów rosnących, możemy zastosować również do ciągów malejących. Dowody pozostają w zasadzie bez zmiany; należy jednak występujące w dowodzie nierówności zmienić na przeciwne.

Każdy ciąg malejący jest ograniczony od góry. Gdy bowiem weźmiemy liczbę

$$M > U_1$$

będzie ona większa od wszystkich wyrazów ciągu. Jeżeli przytem ciąg jest ograniczony od dołu, to posiada granicę. Jeżeli ciąg malejący nie jest ograniczony od do-

ku, w takim razie dąży do  $-\infty$ .

Twierdzenia te pozwalają nam nieraz powiedzieć, czy ciąg posiada granicę, nie znajdując tej granicy. Weźmy np. następujący ciąg:

$$2, \frac{9}{2}, \frac{64}{27}, \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ażeby udowodnić, że ciąg ten jest rosnący, rozwinemy jego wyraz ogólny na szereg Newtona /  $n$  - liczba całkowita /:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \\ &+ \frac{n(n-1) \dots (n-p+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p} \cdot \frac{1}{n^p} + \dots + \frac{n(n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \\ &\dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \\ &\dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy sumę  $n+1$  składników dodatnich. Przypuśćmy teraz, że rozwinęliśmy w ten sam sposób następny wyraz ciągu. Możemy to rozwinięcie otrzymać, zastępując w ostatnim wzorze  $n$  przez  $n+1$ . Nowa suma składać się będzie z  $n+2$  dodatnich składników. Poza tem zwróćmy uwagę na to, że dwa pierwsze składniki pozostaną bez zmiany, wszystkie następne natomiast się powiększą; ponadto przybędzie jeden nowy składnik. A więc suma, wyrażająca,  $(n+1)$ -szy wyraz

ciagu, jest większa od sumy, która wyraża  $n$ -ty wyraz. A zatem

$$u_{n+1} > u_n$$

Udowodniliśmy, że ciąg jest rosnący. Mogą zajść więc dwie ewentualności: albo rośnie on nieograniczenie, albo jest ograniczony od góry i posiada granicę. Przekonamy się, że zachodzi tutaj druga ewentualność. Liczba 3 jest większa od wszystkich wyrazów ciągu. Jak wyżej dowiedliśmy:

$$u_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

każdy z czynników:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right), \left(1 - \frac{2}{n}\right), \dots, \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

jest mniejszy od jednośc, gdy więc je zastąpimy przez liczbę 1, suma się powiększy:

$$u_n > 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

A więc

$$u_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ta suma, począwszy od drugiego wyrazu, jest postępem geometrycznym. Jego suma jest mniejsza od 2 ;

gdybyśmy go bowiem zamienili na szereg nieskończony, wtedy otrzymalibyśmy:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

A więc przy jakimkolwiek  $n$ , zawsze

$$u_n < 3$$

Ciąg jest zatem rosnący i ograniczony od góry; musi więc posiadać granicę, którą w danym wypadku oznaczymy przez  $e$ .

Granica ta jest zresztą znana jako zasada logarytmów naturalnych:

$$e = 2,718281828459045$$

#### TWIERDZENIA OGÓLNE, DOTYCZĄCE GRANIC.

1. Przypuśćmy, że mamy ciąg, dążący do zera:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

$$(1) \quad u_n \rightarrow 0$$

Pomnóżmy wszystkie jego wyrazy przez liczbę stałą  $k$  :

$$k u_1, k u_2, k u_3, \dots, k u_n, \dots$$

Jeżeli pierwszy ciąg dąży do zera, to dowolnie małej liczbie dodatniej  $\varepsilon$  musi odpowiadać taki wskaźnik  $n_0$ , że gdy tylko  $n > n_0$

$$(2) \quad u_n < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Ta nierówność pociąga za sobą nierówność:

$$(3) \quad |k u_n| < \varepsilon$$