

Należy tylko mieć na względzie, że w pierwszym przypadku

$$y' = \frac{P_1(t)}{P_2(t)}$$

zaś w drugim

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Wzory te pozwalają więc nam obliczyć długość łuku krzywej bez względu na to w jakiej postaci jest dane jej równanie

Musimy się teraz zastanowić nad tym, jakim warunkom powinna czynić zadość dana funkcja, ażeby można było mówić o długości łuku, czyli na to, aby krzywa była wyprostowalna. Wyżej wspomnieliśmy, że dana funkcja musi spełnić pewne trzy warunki. Otóż te wszystkie warunki będą z kolei spełnione, gdy pochodna danej funkcji jest ciągła. A zatem krzywa:

$$y = f(x)$$

jest wyprostowalna, gdy

$$y' = f'(x)$$

jest funkcją ciągłą. Istotnie, wówczas będą spełnione trzy warunki, o których była mowa wyżej. 1/ funkcja

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2} dx$$

musi być ciągłą, gdyż funkcja pod znakiem całki jest ciągła.

$f(x)$ jest funkcja ciągła, jako całka funkcji ciągłej

$$3/ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{Int. MN.}}{\text{cięciwa MN.}} = 1, \text{ ponieważ /na mocy}$$

Włosa, wyznaczającego wartość średnią całki/, jeżeli oznaczymy $a-x=A$ to

$$\text{Int. MN.} = \int_x^{x+h} \sqrt{1+[f'(x)]^2} dx = \sqrt{1+[f'(x+\theta h)]^2} \cdot h,$$

zaś

$$\text{cięciwa MN.} = \sqrt{h^2+k^2}$$

gdzie

$$k = f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(x+\theta h);$$

czyli

$$\text{cięciwa MN.} = h \cdot \sqrt{1+[f'(x+\theta h)]^2},$$

przyczem

$$0 < \theta < 1; \quad 0 < \theta < 1$$

A zatem stosunek

$$\frac{\text{Int. MN.}}{\text{cięciwa MN.}} = \frac{\sqrt{1+[f'(x+\theta h)]^2}}{\sqrt{1+[f'(x+\theta h)]^2}}$$

tenicem

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{Int. MN.}}{\text{cięciwa MN.}} &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1+[f'(x+\theta h)]^2}}{\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{1+[f'(x+\theta h)]^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} = 1 \end{aligned}$$

A więc i trzeci warunek jest spełniony. W ten sposób udowodniliśmy, że gdy pochodna danej funkcji jest ciągła, to krzywa, przedstawiająca tę funkcję, jest wyprostowalna.

Po tych rozważaniach damy ścisłejsze określenie "długości łuku krzywej". Niech będzie dana krzywa $y = f(x)$ i na niej punkty M i N . Podzielmy łuk MN na n części i łącząc ze sobą kolejne punkty podziału, wpiszemy w niego linie łamana. Granica długości tej łamanej, gdy liczba punktów podziału rośnie nieograniczenie, jest właśnie długością łuku MN . Oznaczmy odcinki punktów podziału przez $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ zaś ich rzędne odpowiednie przez $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Długość pierwszego odcinka łamanej wyrazi się przez

$$l_1 = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = (x_1 - x_0) \sqrt{1 + \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)^2}$$

Lecz stosunek $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ jest to

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi_1)$$

na zasadzie wzoru na wartość średnią, gdzie ξ_1 zawiera się pomiędzy x_0 i x_1 . W takim razie długość pierwszego odcinka łamanej będzie:

$$l_1 = (x_1 - x_0) \sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2}$$

W ten sam sposób można każdy odcinek łamanej

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$$

sprowadzić do postaci

$$l_k = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}$$

gdzie $x_{k-1} < \xi_k < x_k$

Utwórzmy teraz sumę wszystkich odcinków łamanej;
otrzymamy długość całej linii łamanej:

$$\sum_{k=1}^n l_k = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}.$$

Granice tej właśnie sumy, gdy liczba n nieograniczenie rośnie i gdy różnice $x_k - x_{k-1}$ wszystkie dążą do zera, nazywamy długością łuku krzywej. Lecz ta granica jest, jak wiemy całką, czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n l_k = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Teraz powrócimy znowu do teorii styczności krzywych, w celu bardziej szczegółowego zbadania pojęcia krzywizny. Pamiętamy, co nazywa się rzędem styczności. Wiemy, że przez dowolny punkt krzywej można poprowadzić prostą, która posiadałaby z nią styczność co najwyżej rzędu pierwszego. W wyjątkowych jedynie punktach, mianowicie w t. zw. punktach przegięcia, może zajść styczność rzędu drugiego.

Gdy dana jest krzywa

$$y = f(x)$$

to przez dowolny jej punkt można wykreślić k:żo, zwa-
re k:żo stycznym lub kołem krzywizny, posiadające z
krzywą styczność drugiego rzędu.

Niech środkiem koła krzywizny, czyli wprost środkiem krzywizny, będzie punkt $C(a, b)$, promieniem krzywizny r , zaś punktem styczności $M(x_0, y_0)$. Ponieważ punkt M leży na krzywej, więc jego współrzędne muszą czyść zadość jej równaniu:

$$1) \quad y_0 = f(x_0)$$

a ponieważ leży on i na kole, więc współrzędne jego muszą spełniać również równanie koła:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$$

Wstawiając ostatnie równanie za wzór dający funkcję uwikłaną y zmiennej niezależnej x , znajdziemy pierwszą pochodną:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x-a}{y-b},$$

oraz pochodną drugą:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{(y-b) - (x-a) \cdot \frac{dy}{dx}}{(y-b)^2}$$

Mnożąc licznik i mianownik przez różnicę $(y-b)$ otrzymamy:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{(y-b)^2 + (x-a)^2}{(y-b)^3} = - \frac{r^2}{(y-b)^3}$$

Wobec tego, że punkt M jest punktem styczności 2-go rzędu, pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ w punkcie M muszą być równe odpowiednio pierwszej i

drugiej pochodnej y -ka z równania koła $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
w tymże punkcie, t.j.

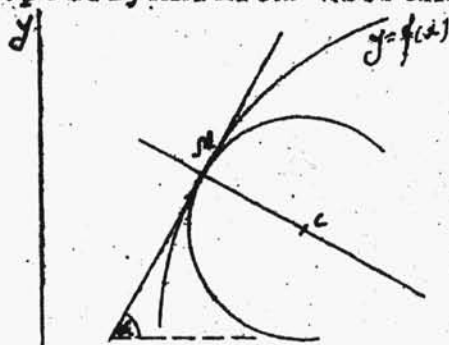
$$12/ \quad f'(x_0) = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b};$$

$$13/ \quad f''(x_0) = -\frac{r^2}{(y_0 - b)^2}$$

Z równania 12/ można wyciągnąć pewien wniosek.
Zauważmy mianowicie, że współczynnikiem kierunkowym
prostej MC jest:

$$m_1 = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$$

a współczynnikiem kierunkowym stycznej w punkcie M



$$m = f'(x_0)$$

Z równania 12/ wynika

że $m = -\frac{1}{m_1}$ czyli

że prosta MC jest
normalną, a zatem

środek krzy-
wej leży
na normal-

nej do krzywej w danym punkcie M .

Podnieśmy równanie 12/ do kwadratu i dodajmy do
obu jego stron po jedności:

$$1 + [f'(x_0)]^2 = \frac{(y_0 - b)^2 + (x_0 - a)^2}{(y_0 - b)^2} = \frac{r^2}{(y_0 - b)^2}$$

Dzieląc tę równość przez równanie (3), otrzymamy:

$$\frac{1 + f'^2(x_0)}{f''(x_0)} = -(y_0 - b) \dots$$

Z łatwością znajdziemy teraz promień krzywizny:

$$r = \frac{[1 + f'^2(x_0)]^{3/2}}{f''(x_0)}$$

Przykład 1. Obliczyć promień krzywizny łańcuchowej:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

Różniczkując dwa razy powyższą funkcję, otrzymamy

$$y' = \operatorname{sh} \frac{x}{a} ; y'' = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

A zatem promień krzywizny:

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{(1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a})^{3/2}}{\frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$$

Wiemy zaś, że długość normalnej $MN = y \sqrt{1 + y'^2} = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}$,

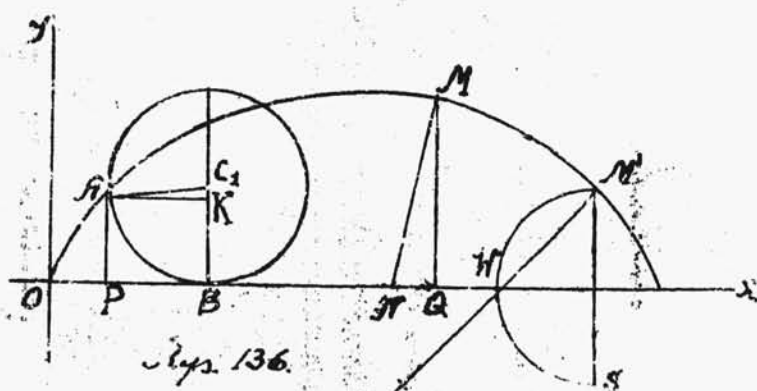
czyli promień krzywizny łańcuchowej jest równy, co do długości, normalnej MN , przyczem, jak łatwo wprost z rysunku 133 wywnioskować, znajduje się po przeciwnej stronie krzywej, niż punkt N .

Przykład 2. Znaleźć promień krzywizny cykloidy, t.j. krzywej, którą zakresła punkt stały na okręgu koła przy toczeniu się tego ostatniego wzdł. i prostej.

Niech promieniem koła tworzącego będzie R a prosta, po której się ono toczy oś X , punkt stały okręgu oznaczmy przez A i bierzmy za początek układu punkt w którym A styka się z osią X . Niech dalej C_1 będzie środkiem koła, zaś B zmiennym punktem styczności toczącego się koła. Wzajajem za parametry kąta $AC_1B = t$

$$x = OB - PB = R \cdot t - R \sin t = R(t - \sin t);$$

$$y = BC_1 + C_1A = R - R \cos t = R(1 - \cos t).$$



A zatem cykloida wyraża się przez układ równań parametrycznych:

$$x = R(t - \sin t)$$

$$y = R(1 - \cos t).$$

Pochodną funkcji y względem zmiennej x jest:

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{R \sin t}{R(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}},$$

$$y' = \cot g \frac{t}{2}$$

Obliczmy wartość normalnej w punkcie M

$$MN = y \sqrt{1 + y'^2} = 2R \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} = 2R \sin \frac{t}{2}.$$

Podnieśmy otrzymaną równość do kwadratu:

$$MN^2 = 2R \cdot 2R \cdot \sin^2 \frac{t}{2}.$$

Ponieważ zaś rzędna:

$$MO = y = 2R \sin^2 \frac{t}{2},$$

więc

$$MN^2 = 2R \cdot MO,$$

czyli normalna do cykloidy w danym punkcie jest średnią proporcjonalną pomiędzy rzędną tego punktu i średnicą koła tworzącego. Na zasadzie tego możemy łatwo wykreślić normalną w dowolnym punkcie M' cykloidy: odkładamy na rzędnej tego punktu odcinek $M'S = 2R$, zakreślamy na nim, jako na średnicy, półkoło, a następnie łączymy M' z punktem N przecięcia się półkoła z osią x . Właśnie $M'N$ jest szukaną normalną, na której leży środek krzywizny cykloidy, odpowiadającego punktowi M' . Obliczenie promienia krzywizny też nie nasuwa trudności. Przedewszystkiem znajdziemy:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = - \frac{\frac{1}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}}{2R \sin^2 \frac{t}{2}} = - \frac{1}{4R \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

A zatem promień krzywizny

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = - \frac{4R \sin^4 \frac{t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}},$$

czy

$$r = -4R \sin \frac{t}{2}.$$

Porównaj zaś, jak to już obliczyliśmy, normalną $MR = 2R \sin \frac{t}{2}$, więc promień krzywizny, co do wartości bezwzględnej, jest równy podwojonej normalnej:

$$|r| = 4R \sin \frac{t}{2} = 2MR$$

A zatem otrzymany promień krzywizny w punkcie M' , odkładając na normalnej odcinek $WC = M'W$.

Gdy mamy daną normalną i promień krzywizny w danym punkcie, to położenie środka krzywizny nie jest jeszcze w zupełności wyznaczone: nie wiemy mianowicie, po której stronie danego punktu środek krzywizny jest położony. Uzasadnijmy więc teraz pewne kryteria analityczne, pozwalające nam na to pytanie odpowiedzieć.

Dowodliśmy już, że jeżeli środkiem krzywizny w punkcie $M(x, y)$ będzie punkt $C(a, b)$, to w takim razie

$$\frac{1+y'^2}{y''} = -(y-b).$$

skąd

$$b = y + \frac{1+y'^2}{y''}$$

Znak ułamka $\frac{1+y'^2}{y''}$ zależy wyłącznie od znaku mianownika $y'' = \frac{dy'}{dx}$. Wiemy zaś, że $y'' > 0$, gdy y' rośnie oraz $y'' < 0$, gdy y' maleje. Pierwszym

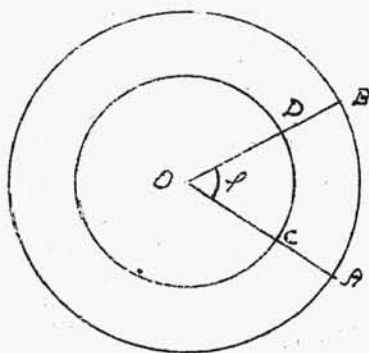
wiec przypadku $b > y$, zaś w drugim $b < y$. W ten sposób sprawa została rozstrzygnięta: gdy pierwszy po pochodna rośnie, że rzędna środka krzywizny jest większa od rzędnej danego punktu, gdy zaś pierwsza po pochodna maleje, to rzędna środka krzywizny jest mniejsza od rzędnej danego punktu. Zwykle zresztą jest widoczne wprost z wykresu krzywej, po której stronie normalnej leży środek krzywizny.

Podamy teraz i n n e o k r e ś l e n i e
p r o m i e n i a k r z y w i z n y, niezależne od pojęcia koła ściśle stycznego. Niech będą dane dwa koła współśrodkowe; jedno o promieniu równym jedności, drugie o promieniu r . Poprowadźmy dwa promienie, nachylone do siebie pod kątem γ ; przetną one okręgi koł w punktach A i B oraz C i D . Długość łuku CD wyrazi się, oczywiście, przez γ , a długość łuku AB przez $r\gamma = L_{AB}$. Krzywizną nazwiemy stosunek wielkości kąta, zawartego pomiędzy promieniami, do długości odpowiedniego łuku.

$$\frac{1}{L_{AB}} = \frac{1}{r}$$

W kole powyższy stosunek nie zależy od położenia pary punktów A i B ani od długości łuku AB , dla dowolnego łuku S będziemy mieli:

$$\frac{l}{r} = \frac{l}{r}$$



Rys. 137.

Gdy promień koła $r = 1$,
to i krzywizna równa jest
jedności.

Podobne określenie
krzywizny da się zastosować
do każdej krzywej. Niech
np. będzie dana krzywa

$$y = f(x) \quad \text{i na niej punk}$$

ty A i B . Przez φ oznaczmy kąt, jaki tworzą ze
sobą styczne /lub normalne/ do krzywej w punktach A
i B . Tutaj stosunek $\frac{l}{r_{AB}}$ zmienia się w zależności
od położenia danych punktów; nazwiemy go krzywizną
średnią łuku. Przez krzywiznę łuku punkcie A rozu-
mieć będziemy granicę, do jakiej dąży ten stosunek,
gdy punkt B dąży do punktu A

$$\frac{1}{r} = \lim_{B \rightarrow A} \frac{l}{r_{AB}}$$

Granice tę będziemy mogli łatwo obliczyć:

$$\frac{1}{r} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta s} = \frac{dl}{ds}.$$

Oznaczmy kąt, jaki tworzy styczna w punkcie A
osią x przez α . Wówczas, rzecz jasna, kątem nachy-
lenia drugiej stycznej będzie $\alpha - \varphi$. Gdy punkt A
zmieni swe położenie, to zmienia się kąty α i φ

przez ich przyrosty będą sobie równe:

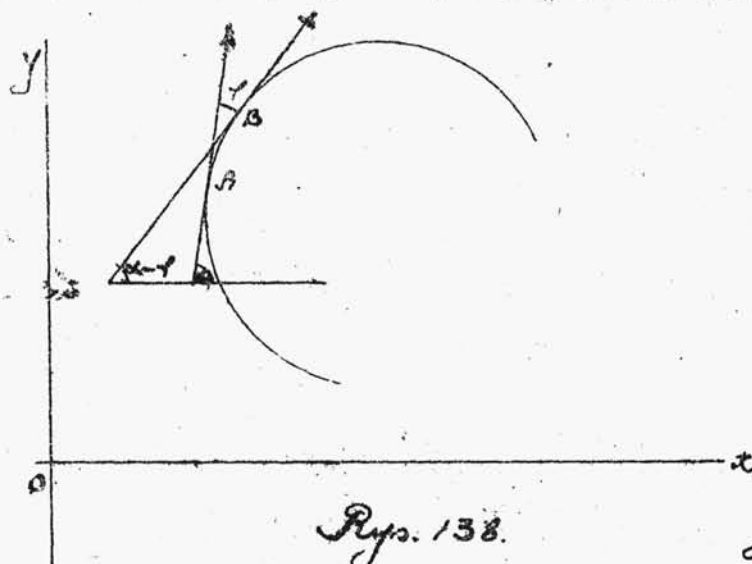
$$d\ell = d\alpha$$

A więc krzywizna łuku w punkcie A wyrazi się przez:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Zauważmy tutaj

że $\tan \alpha = y'$ skąd
 $\alpha = \arctan y'$



gdzie

$$y' = f'(x)$$

Stosując wzór, wyznaczający pochodną funkcje złożonej, znajdziemy:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''}{1+y'^2}$$

Wiemy również, że pochodną funkcji, wyrażającej długość łuku krzywej

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

A zatem krzywizna

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d\alpha}{ds}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{y''}{(1+y'^2)\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Stąd promień krzywizny, określony jako odwrotność krzywizny:

$$r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Widzimy, że otrzymaliśmy ten sam wzór, do którego doszliśmy przedtem inną drogą. Określenie więc promienia krzywizny, jako odwrotności granicy pewnego stosunku, zwanej krzywizną, prowadzi do tego samego, co i określenie jego jako promienia koła ściśle statycznego.

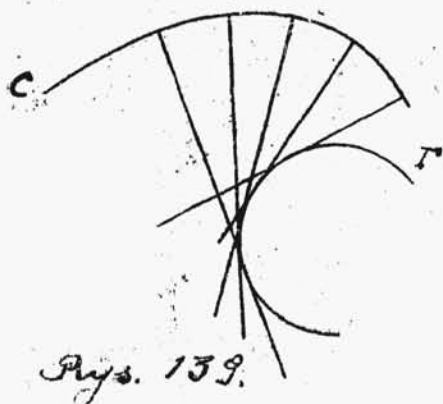
OBWIEDNIE Przypuśćmy, że dane jest równanie:

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

gdzie α jest pewną wielkością stałą, zwaną parametrem. Każdej wartości parametru α odpowiada pewna krzywa, mówimy że zbiór wszystkich krzywych, odpowiadających różnym wartościom parametru, stanowi rodzinę krzywych.

Może istnieć pewna krzywa, styczna do każdej krzywej rodziny $f(x, y, \alpha) = 0$. Tę krzywą właśnie nazwiemy *o b w i e d n i ą* krzywych danej rodziny.

Niech np. będzie dana jakaś krzywa. Poprowadzmy



Rys. 139.

każdy punkt tej krzywej normalną. Istnieje taka krzywa r , która jest styczna do wszystkich normalnych, czyli jest odpowiednią tych normalnych. Później się prze-