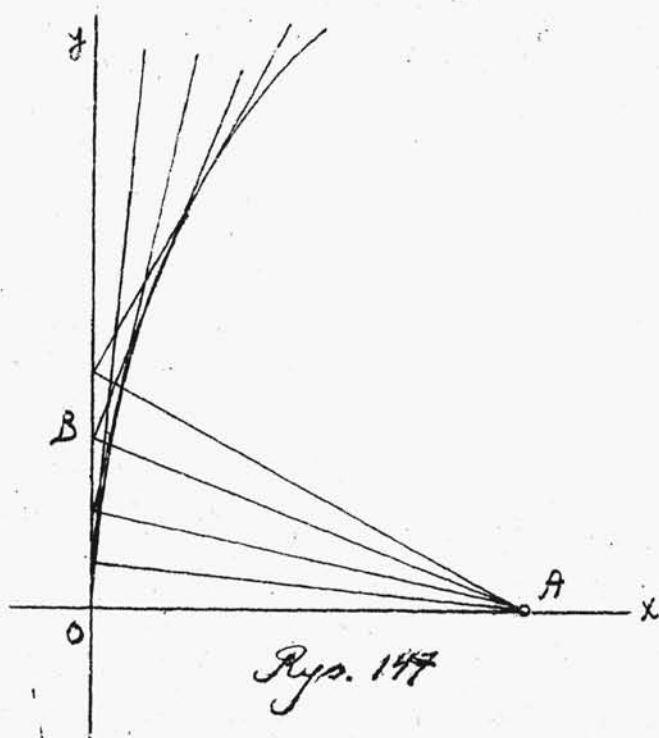


$$a \cdot \alpha - y = \frac{x}{\alpha};$$

$$\alpha = -\frac{x}{\alpha^2};$$



który będzie moż-  
na łatwo rozwiązać

$$\alpha = \sqrt{-\frac{x}{a}};$$

więc

$$y = a\sqrt{-\frac{x}{a}} - \frac{x}{\sqrt{-\frac{x}{a}}} = 2\sqrt{-ax},$$

skąd

$$y^2 = -4ax.$$

Otrzymaliśmy

więc znowu jako ob-  
wiednię parabolę.

### PUNKTY OSOBLIWE.

Niech będzie dana krzywa:

11/  $f(X, Y) = 0$

Przypuścimy, że istnieje na niej taki punkt  $M(x_0, y_0)$ ,

w którym

12/  $f'_x(X, Y) = 0$

13/  $f'_y(X, Y) = 0$

Dla dokładniejszego zbadania tego punktu przenieś-  
my do niego początek układu współrzędnych: Podstawiając:

$$X = x_0 + x$$

$$Y = y_0 + y$$

otrzymamy równanie danej krzywej w odniesieniu do nowego układu

$$f(x_0 + x, y_0 + y) = 0$$

Rozwijając następnie tę funkcję w szereg według wzoru Taylora, przedstawimy ją w postaci:

$$\begin{aligned} /4/ \quad & f(x_0, y_0) + x \cdot f'_x(x_0, y_0) + y \cdot f'_y(x_0, y_0) + \frac{x^2}{2} f''_{xx}(x_0, y_0) + \\ & + x \cdot y \cdot f''_{xy}(x_0, y_0) + \frac{y^2}{2} f''_{yy}(x_0, y_0) + R(x, y) \end{aligned}$$

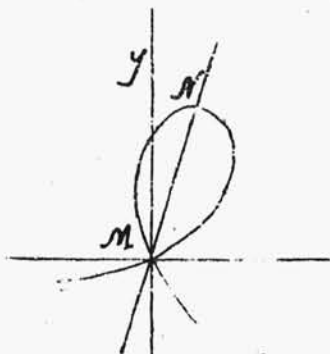
Ponieważ punkt  $M(x_0, y_0)$  leży na krzywej /1/, więc pierwszy wyraz powyższej sumy znika. Znajdźmy współrzędne punktów przecięcia się danej krzywej z prostą o równaniu:

$$/5/ \quad y = tx$$

gdzie  $t$  jest współczynnikiem kątowym. W tym celu rozwiążemy metodą podstawienia układ równań /4/ i /5/:

$$\begin{aligned} /6/ \quad & x \left[ f'_x(M) + t f'_y(M) \right] + \frac{x^2}{2} \left[ f''_{xx}(M) + 2t f''_{xy}(M) + \right. \\ & \left. + t^2 f''_{yy}(M) \right] + x^3 R_1(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Jeżeli punkt przecięcia ma być punktem podwójnym /odpowiadający mu pierwiastek układu równań dwukrotny/ to, jak wiemy, musi być spełniony warunek:



Rys 148.

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x(M)}{f'_y(M)} = t,$$

czyli

$$f'_x(M) + t f'_y(M) = 0.$$

Wynika jednak z

założenia, mianowicie

z równań /2/ i /3/, że ten warunek jest spełniony dla każdej prostej, wyrażonej przez równanie /5/, niezależnie od jej współczynnika kąowego  $t$ . Każda prosta  $y = tx$ , niezależnie od wartości parametru  $t$  ma w punkcie  $M$  punkt trójkrotny, wspólny z krzywą. A zatem w równaniu /6/ pierwszy składnik zniknie; z pozostałych składników wyłączymy przed nawias czynnik  $x^2$ , który będzie można przyrównać do zera. Równanie /6/ sprowadzi się więc do równania:

$$17/ \quad \frac{1}{2} [f''_{xx}(M) + 2t f''_{xy}(M) + t^2 f''_{yy}(M)] + x R_2(x, t) = 0$$

Współczynnik kąowy  $t$  nie ma dotychczas wartości oznaczonej. Można więc zażądać, aby punkt przecięcia prostej  $y = tx$  z daną krzywą był trzykrotny. Taką prostą nazwiemy styczną w ścisłym znaczeniu do krzywej danej w p.  $M$ . Równanie /7/ będzie posiadało wówczas pierwiastek  $x = 0$ , a więc:

$$18/ \quad f''_{xx}(M) + 2t f''_{xy}(M) + t^2 f''_{yy}(M) = 0$$

To równanie jest stopnia drugiego względem  $t$ , można zatem znaleźć dwie wartości tej zmiennej:  $t_1$  i  $t_2$ . Oznaczmy:

$$f''_{xx}(M)=c; f''_{xy}(M)=b; f''_{yy}(M)=a$$

Wówczas warunek, aby punkt przecięcia był trzykrotny, przybierze postać:

$$at^2+2bt+c \equiv \frac{(at+b)^2-(ac-b^2)}{a} = 0$$

Stąd widzimy odrazu, że jeżeli  $ac-b^2 > 0$ , to licznik powyższego ułamka jest dodatni i dany trójmian nie może stać się zerem, czyli nie może posiadać pierwiastków rzeczywistych, gdy  $ac-b^2 < 0$ , to trójmian posiada dwa pierwiastki rzeczywiste, różne:  $t_1$  i  $t_2$ , gdy zaś  $ac-b^2 = 0$ , trójmian posiada dwa pierwiastki rzeczywiste, równe sobie:  $t_1 = t_2$

Uwzględniając, że  $t = \frac{y}{x}$ , będzie można przedstawić równanie /7/ w postaci:

$$19/ \quad cx^2+2bxy+ay^2+2x^3R(x,y)=0.$$

Stąd zaś jest widoczne, że punkt początkowy  $M(0,0)$  jest pierwiastkiem równania. W przypadku gdy  $ac-b^2 > 0$  jest to t.zw. punkt osobliwy: można zatoczyć z niego, jako ze środka, koło tak małe, aby nie było wewnątrz tego koła innych punktów krzywej. Łatwo się przekonać, że  $M$  jest punktem podwójnym krzy-

wej, nie istnieje jednak dla niego pojęcie stycznej.



Rys. 149.



Rys. 150.

Jeżeli  $b^2 - ac = 0$  obie styczne w punkcie  $M$  się zlewają, gdy krzywa leży całkowicie po jednej tylko stronie tej podwójnej stycznej, to tworzy ona t. zw. d z i ó b /rys. 149/, gdy zaś po obu stronach mamy t. zw. p u n k t z w r o t u /rys. 150/. Jeżeli wreszcie  $ac - b^2 < 0$  to dwie styczne w początku układu mają różne kierunki i otrzymujemy

p u n k t p o d w ó j n y k r z y w e j.

Powyższą teorię punktów wielokrotnych można rozwijać w dalszym ciągu i szukać warunków, aby dany punkt  $M$  był punktem trzykrotnym, czterokrotnym i t. d.

Jeżeli np. przecięcie z d o w o l n ą sieczną jest punktem trzykrotnym, to:

$$at^2 + 2bt + c \equiv 0 \quad \text{/tożsamościowo/}$$

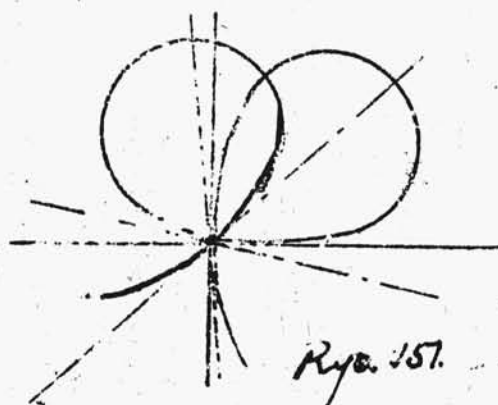
skąd

$$a = 0; \quad b = 0; \quad c = 0$$

Ostatecznie, jeżeli  $M$  ma być punktem potrójnym, to muszą być spełnione warunki:

$$\begin{aligned} f(M) &= 0; \quad f'_x(M) = 0; \quad f'_y(M) = 0 \\ f''_{xx}(M) &= 0; \quad f''_{xy}(M) = 0; \quad f''_{yy}(M) = 0 \end{aligned}$$

Tu można znowu szukać takich wyjątkowych siecznych /stycznych/, dla których punkty przecięcia z krzywą byłyby czterokrotne, tego rodzaju siecznych znaleźć można trzy /rys. 151/.



Rys. 151.

W ten sam sposób można badać punkty, których wielokrotność wy-

razi się liczbą 4, 5 i t.d.

Przykład 1. Niech będzie dana krzywa

$$f(x, y) = y^2 - x^3 = 0$$

Punkt począwszy  $M(0, 0)$  jest punktem wielokrotnym, gdyż:

$$f(M) = 0; \quad f'_x(M) = (-3x^2)_{x=0} = 0; \quad f'_y(M) = (2y)_{y=0} = 0$$

Zbadajmy, jaką liczbą wyrazi się jego wielokrotność. Znajdziemy w tym celu pochodne rzędu drugiego:

$$f''_{xx}(M) = -6x; \quad f''_{xy}(M) = 0; \quad f''_{yy}(M) = 2$$

Dla punktu  $M$  będą one odpowiednio równe 0, 0, 2 ponieważ ostatnia pochodna jest różna od zera, punkt

jest dwukrotny. Rozważmy trójmian:

$$at^2 + 2bt + c = 2t^2 = 0$$

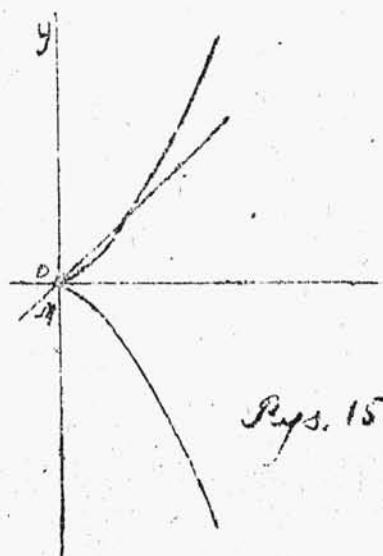
Posiada on dwa pierwiastki rzeczywiste równe:

$t_1 = t_2 = 0$  /tu  $ac - b^2 = 0$ /. Można więc poprowadzić w nim tylko jedną styczną do krzywej, tą styczną właśnie jest oś  $x$  /  $t = 0$  /, będąca zarazem osią symetrii krzywej, jak to wynika z jej równania:

$$y = \pm x^{3/2}$$

Łatwo jest tę krzywą wykreślić, znajdując jej punkty przecięcia z prostą:

$$y = tx$$



Rys. 152.

Podstawiając mianowicie  $t^2 x^2$  zamiast  $y^2$  do równania krzywej znajdziemy

$$x^2(t^2 - 1) = 0$$

skąd równania:

$$x^2 = 0$$

oraz

$$x = t^2 \quad /wtedy y = t^3/$$

dają wartości  $x$  w punktach przecięcia z prostą  $y = tx$

Kreśląc więc sieczne o różnych współczynnikach kątowych  $t$ , otrzymamy na przecięciu się ich z odpowiednimi rzędnymi punkty krzywej, np.



$$t = \frac{1}{2} ; \quad x = \frac{1}{4} ; \quad y = \frac{1}{8} ;$$

$$t = 1 ; \quad x = 1 ; \quad y = 1 ;$$

$$t = 2 ; \quad x = 4 ; \quad y = 8 ;$$

$$t = 3 ; \quad x = 9 ; \quad y = 27 ;$$

.....

Wykres tej krzywej jest przedstawiony na rys. 152.

P r z y k ł a d 2. Jest dana krzywa:

$$f(x, y) \equiv y^2 - x^2 + x^3 = 0.$$

Znaleźć wielokrotność punktu początkowego  $M(0, 0)$ .

W tym celu obliczymy pochodne:

$$f'_x = -2x + 3x^2 ; \quad f'_y = 2y$$

$$f''_{xx} = -2 + 6x ; \quad f''_{xy} = 0 ; \quad f''_{yy} = 2$$

Podstawiając dla punktu  $M$ ,  $x=0$ ,  $y=0$ , otrzymamy

$$f(M) = 0 ; \quad f'_x(M) = 0 ; \quad f'_y(M) = 0$$

$$f''_{xx}(M) = -2 ; \quad f''_{xy}(M) = 0 ; \quad f''_{yy}(M) = 2$$

Drugie pochodne nie są już wszystkie zerami, punkt  $M$  jest więc dwukrotny. Ponieważ  $\Delta c - b^2 = -4 < 0$ , można poprowadzić z niego dwie rzeczywiste różne styczne do krzywej. Dla wykreślenia jej znajdziemy przecięcie z prostą  $y = tx$ :

$$t^2 x^2 - x^2 + x^3 = 0$$

czyli

$$x^2(t^2 - 1 + x) = 0$$

skąd

$$x = 1 - t^2$$



A zatem

$$y = t(1 - t^2).$$

Podstawiając dla  $t$  różne wartości, otrzymamy spójne odpowiednich punktów krzywej. Proste o współczynnikach kątowych  $t = \pm 1$  /dwusieczne kątów pomiędzy  $Ox$

$Ox$  i  $Oy$  / są styczne do krzywej.

Przykład 3. Znaleźć wielokrotność punktu początkowego krzywej:

$$x^4 - x^2 + y^2 = 0$$

W tym celu obliczymy pochodne pierwsze:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

oraz pochodne drugie:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2.$$

Ponieważ dla punktu  $M$   $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \neq 0$ , punkt ten jest dwukrotny. Znajdźmy przecięcie danej krzywej z prostą

$$y = tx:$$

$$x^4 - x^2 + t^2 x^2 = 0;$$

czyli

$$x^2(x^2 - 1 + t^2) = 0.$$

A zatem

$$x^2 - 1 + t^2 = 0,$$

skąd

$$x = \sqrt{1 - t^2},$$

zaś

$$y = t\sqrt{1-t^2}$$

Podstawiając  $t = \pm 1$ , otrzymamy styczne do krzywej

### ROZWINIĘTA I ROZWIJAJĄCA.

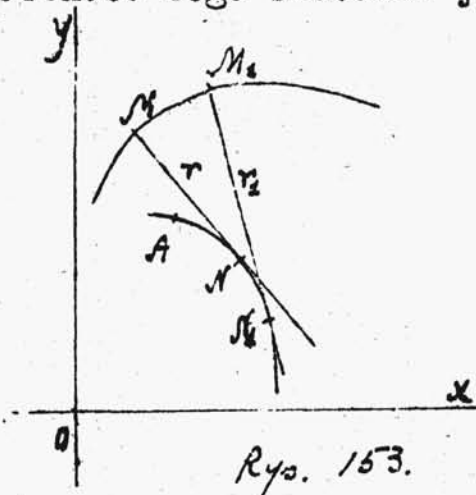
Niech będzie dana krzywa:

$$y = f(x)$$

i na niej punkt  $M(x_0, y_0)$ . Krzywizną łuku krzywej w tym punkcie nazwaliśmy stosunek

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{r}$$

Odwrotność tego stosunku jest promieniem krzywizny:



Rys. 153.

$$r = \frac{ds}{d\alpha}$$

Wiemy, że

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

oraz

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

skąd

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}} = \cos \alpha$$

więc

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha$$

Aby promień krzywizny był zawsze wyrażony przez dodatni znak, wybieramy taki kierunek na łuku jako dodatni, by łuk  $s$  rósł razem z kątem  $\alpha$