

ności szeregu, ale w praktyce nieraz trudny do zastosowania. Stosujemy więc w praktyce cechy prostsze - ale wyrażające warunek dostateczny, lecz niekonieczny zbieżności, jak Cauchy'ego, d' Alembert'a i innych.

CECHA ZBIEŻNOSCI CAUCHY'ego. Jeżeli dla wszystkich wartości wskaźnika $n > n_0$ jest spełniony warunek

$$/1/ \sqrt[n]{a_n} < r < 1$$

/przyczem $r > 0$ /, to szereg o wyrazach dodatnich

$$/2/ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

jest zbieżny.

W istocie, z nierówności /1/ wynika, że gdy $n > n_0$ to

$$a_n < r^n$$

Utwórzmy szereg

$$/3/ r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots$$

Szereg jest zbieżny, jako postęp geometryczny o wykładniku $|r| < 1$. A zatem, na mocy twierdzenia o porównywaniu dwóch szeregów, i szereg /2/ musi być zbieżny.

Ten warunek nie jest ogólny. Jest to tylko warunek dostateczny, lecz niekonieczny, zbieżności szeregów.

CECHA ZBIEŻNOSCI d' ALEMBERT'a. Jeżeli dla wszystkich wartości wskaźnika $n > n_0$ jest spełniony warunek:

$$1/ \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1,$$

przyczem $r > 0$, to szereg

$$2/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

jest zbieżny.

W rzeczy samej, z warunku 1/ wynikają nierówności:

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < r;$$

$$\frac{a_{n_0+3}}{a_{n_0+2}} < r;$$

$$\frac{a_{n_0+(n-n_0)}}{a_{n_0+(n-n_0)-1}} < r;$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r.$$

Pomnóżmy przez siebie stronami $n-n_0$ powyższych nierówności:

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n_0+1}} < r^{n-n_0}$$

stąd

$$a_{n+1} < a_{n_0+1} \cdot \frac{r^n}{r^{n_0}}$$

Oznaczmy następnie $\frac{a_{n_0+1}}{r^{n_0}} = k$. W takim razie

$a_{n+1} < k \cdot r^n$ Iloczyn $k \cdot r^n$ jest wyrazem o-

gólnym postępu geometrycznego:

$$3/ \quad k + k \cdot r + k \cdot r^2 + \dots + k \cdot r^n + \dots$$

Ponieważ $|r| < 1$, więc szereg /3/ jest zbieżny, a zatem, na mocy twierdzenia o porównywaniu dwóch szeregów musi być zbieżny i szereg /2/. I cecha ta stanowi warunek tylko dostateczny, lecz nie konieczny zbieżności szeregów.

P r z y k ł a d 1. Niech będzie dany szereg.

Zastosujmy kryterjum d'Alembert'a:

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + (n+1)x^n + \dots$$

A więc
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)x}{n} < r < 1$$

$$x < \frac{n}{n+1}$$

Stąd widać, że dany szereg jest zbieżny dla każdego $x < 1$.

P r z y k ł a d 2. Niech będzie dany szereg:

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Zastosujmy i tutaj kryterjum d'Alembert'a:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x}{n+1}$$

Przypuśćmy, że x posiada pewną wartość stałą taką- że $n_0 \leq x \leq n_0 + 1$. W takim razie dla każdego wskaźnika $n > n_0$ powyższy stosunek będzie mniejszy od jedności, więc dany szereg jest zbieżny dla każdej wartości x .

Szereg o wyrazach dowolnych /dodatnich i ujemnych/

nazywamy **bezwzględnie lub. bezwarunkowo zbieżnym**, jeżeli szereg utworzony z wartości bezwzględnych wyrazów danego szeregu jest zbieżny. Np. szereg:

$$1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n \cdot x^{n-1} + \dots$$

jest bezwzględnie zbieżny dla $|x| < 1$. Zaś szereg

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

nie jest bezwzględnie zbieżny, choć jest zbieżny, albowiem szereg, utworzony z wartości bezwzględnych jego wyrazów jest to szereg harmoniczny - rozbieżny. Łatwo udowodnimy, że jeśli szereg jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny.

Niech będą dane dwa szeregi o wyrazach dodatnich:

$$1/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$2/ \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

pomiędzy wyrazami których zachodzi tego rodzaju odpowiedniość doskonała, że każdemu wyrazowi szeregu 1/ odpowiada równy mu wyraz szeregu 2/ i nawzajem, krócej mówiąc szeregi 1/ i 2/ mają się różnić tylko porządkiem wyrazów. Udowodnimy, że sumy tych szeregów będą jednakowe.

Oznaczmy sumy częściowe danych szeregów odpowiednio przez S_n i σ_n . Niech sumą szeregu 1/ będzie:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

przyczem $s_n < S$. Możemy zawsze dobrać liczby m i n tak, ażeby wszystkie składniki sumy częściowej s_m wchodziły w skład sumy s_n , w takim razie:

$$s_m < s_n < S$$

$$/3/ \quad s_m < S$$

czyli ciąg /2/ jest ograniczony, posiada on granicę

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m = S$$

Z nierówności /3/ wynika, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} s_m < S$$

A więc

$$/4/ \quad S \leq s$$

W tym dowodzeniu szeregi /1/ i /2/ odgrywają jednakowe role, możemy przeto zmienić je miejscami, rozumując jak wyżej, dojdziemy do nierówności

$$/5/ \quad S \leq s$$

Z porównania nierówności /4/ i /5/ wynika odrazu, że

$$S = s$$

czyli, że suma szeregu zbieżnego o wyrazach dodatnich nie zależy od porządku wyrazów. Jest to tak zwane twierdzenie Dirichleta.

SZYBKOSĆ ZBIEŻNOŚCI SZEREGU.

Niech będzie dany szereg:

$$/1/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

gdzie $a_n > 0$, przypuścmy, iż $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ istnieje i $= l_1$, jako też $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l_2$, powiadam, że granice, o ile istnieją, są sobie równe, czyli $l_1 = l_2$.

W tym celu rozpatrzmy szereg

$$/2/ \quad a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

gdzie x jest zmienne. Kryterjum Cauchy'ego wskazuje, że szereg /2/ jest zbieżny, gdyż $\sqrt[n]{a_n} x^n = x \sqrt[n]{a_n} = r < 1$ czyli, dla wartości x spełniających warunek $-\frac{1}{l_1} < x < \frac{1}{l_1}$ a rozbieżny, gdy $x > \frac{1}{l_1}$ lub $x < -\frac{1}{l_1}$.

Kryterjum d'Alembert'a zaś wskazuje, że szereg /2/ jest zbieżny - gdy $-\frac{1}{l_2} < x < \frac{1}{l_2}$, a rozbieżny, gdy $x > \frac{1}{l_2}$ lub $x < -\frac{1}{l_2}$.

Stąd wniosek, iż $l_1 = l_2$.

Niech będą dane dwa szeregi:

$$/3/ \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$/4/ \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

i niech $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = \lambda$.

Jeśli $\lambda < l$, to o szeregu /4/ powiemy, że jest szybciej zbieżny od szeregu /3/.

Przypuśćmy teraz, że $l=0$ i $\lambda=0$, w takim razie l i λ jako funkcje zmiennej n są funkcjami dążącymi do zera, gdy $\frac{1}{n}$ dąży do zera.

Jeśli l i λ jako funkcje zmiennej $\frac{1}{n}$ są małemi różnego rzędu, to szereg /4/ nazywać będziemy szybciej zbieżnym od szeregu /3/, o ile rząd małej λ jest wyższy od rzędu małej l . Np. niech będą 2 szeregi

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots;$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{1}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{1}{(n!)^2} + \dots;$$

drugi szereg będzie szybciej zbieżny od pierwszego, gdyż dla pierwszego $l = \frac{1}{n}$, a dla drugiego $\lambda = \frac{1}{n^2}$.

Określenia powyższe niezawsze dają się zastosować. Przedewszystkiem granica l może nie istnieć, następnie l i λ mogą być małemi, których rzędy nie dadzą się porównać.

Można byłoby dać określenia szersze, ale co do tego odsyłamy do dzieł specjalnych.

SZEREGI PRZEMIENNE. Jeżeli wyrazy szeregu:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

są, począwszy od pewnego miejsca, naprzemian dodatnie i ujemne, mówimy, że mamy szereg przemienny. Przypuśćmy, że znaki wyrazów danego szeregu zmieniają się od początku. Oznaczmy wartość bezwzględną wyrazu ogólnego

przez $u_n = |a_n|$. Będziemy więc mieli szereg:

$$/1/ \quad u_1 - u_2 + u_3 - \dots - u_{2n} + u_{2n+1} - \dots$$

Udowodnimy, że jeżeli $u_{n+1} < u_n$ oraz $u_n \rightarrow 0$,
gdy $n \rightarrow \infty$, to szereg ten jest zbieżny. Ugrupujmy
w tym celu wyrazy szeregu /1/ w dwojaki sposób:

$$(u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + \dots$$

$$u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n} - u_{2n+1}) - \dots$$

i utwórzmy ciągi z sum częściowych parzystej i niepa-
rzystej liczby wyrazów szeregu /1/:

$$/2/ \quad S_2, S_4, S_6, \dots, S_{2n}, \dots$$

$$/3/ \quad S_1, S_3, S_5, \dots, S_{2n+1}, \dots$$

Pierwszy z tych ciągów jest rosnący, drugi male-
jący- oba ciągi są ograniczone /pierwszy od góry, dru-
gi od dołu/, posiadają więc granice. Oznaczmy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 6;$$

i zauważmy, że

$$S_{2n+1} - S_{2n} = u_{2n+1},$$

skąd

czyli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1}$$

$$6 - S = 0$$

A zatem ciągi /2/ i /3/ posiadają tę samą granicę
która jest zarazem sumą danego szeregu /1/.

Jako przykład weźmy szereg:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

Na zasadzie dopiero co dowiedzionego twierdzenia jest on zbieżny. Ponieważ jednak szereg, utworzony z wartości bezwzględnych jego wyrazów jest rozbieżny, przeto dany szereg nie jest bezwzględnie zbieżny, t. zn. jest warunkowo zbieżny.

Niech będzie dany szereg:

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

Udowodnimy, że szereg ten jest zbieżny, gdy $\alpha > 1$ zaś rozbieżny, gdy $\alpha \leq 1$.

Przypuśćmy najpierw, że $\alpha > 1$. Utwórzmy sumy częściowe:

$$s_1 = 1; \quad s_3 = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right);$$

$$s_7 = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha} \right) < 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha},$$

czyli

$$s_7 < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}},$$

albo też

$$s_7 < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}};$$

następnie

$$s_{15} = 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \dots + \frac{1}{7^\alpha} \right) + \left(\frac{1}{8^\alpha} + \dots + \frac{1}{15^\alpha} \right),$$

skąd

$$s_{15} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{2^{2(\alpha-1)}} + \frac{1}{3^{3(\alpha-1)}}$$

Stosując metodę indukcji zupełnej, można wykazać,

że

$$s_{2^k-1} < 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \dots + \frac{1}{2^{(k-1)(\alpha-1)}}$$

Lecz $1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \dots + \frac{1}{2^{(n-1)(\alpha-1)}}$ jest to postęp geometryczny o wykładniku $\frac{1}{2^{\alpha-1}}$. Gdy $\alpha > 1$, wówczas $\alpha-1 > 0$ i postęp ten, gdy liczba jego wyrazów rośnie nieograniczenie, jest zbieżny, /postęp nieskończenie malejący/; istnieje więc granica $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$. Ponieważ $b_{2n-1} < b_n < A$, więc $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n-1} < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, a zatem dany szereg jest w tym przypadku zbieżny.

Przypuśćmy teraz, że $\alpha \leq 1$. Porównajmy dany szereg:

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

z szeregiem harmonicznym /rozbieżnym/:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Mamy tutaj $n^\alpha \leq n$, więc $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$. Wyrazy danego szeregu są zatem równe lub większe od wyrazów szeregu harmonicznego. Z porównania wynika rozbieżność danego szeregu.

DRUGIE KRYTERJUM CAUCHY'ego. Szereg o wyrazach dodatnich:

$$1/ \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

jest zbieżny, jeżeli

$$\frac{\lg \frac{1}{a_n}}{\lg n} > \alpha > 1$$

W rzeczy samej, z powyższego warunku wynika, że

$$\lg \frac{1}{a_n} > \alpha \lg n$$

skąd

$$\frac{1}{a_n} > n^\alpha$$

$$a_n < \frac{1}{n^\alpha}$$

Szereg

$$\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha} + \dots$$

jest tutaj zbieżny, a zatem na zasadzie twierdzenia o porównywaniu dwóch szeregów i szereg /1/ jest zbieżny.

KRYTERJUM DUHAMEL-RAABE. jest analogiczne do kryterjum d'Alembert'a, jest przytem w takim do niego stosunku, jak drugie kryterjum Cauchy'ego do kryterjum pierwszego. Głosi ono, że jeżeli

$$\frac{\lg \frac{a_{n+1}}{a_n}}{\lg \frac{n}{n+1}} > \alpha > 1$$

to szereg /1/ jest zbieżny. Istotnie, wówczas mnożąc nierówność przez mianownik $\lg \frac{n}{n+1}$ ujemny, co pociąga za sobą zmianę znaku $>$ na $<$, otrzymamy:

$$\lg \frac{a_{n+1}}{a_n} < \alpha \cdot \lg \frac{n}{n+1}$$

więc

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha}$$

Zakładając następnie $n = 1, 2, \dots, n$ otrzymamy nierówności:

$$\frac{a_2}{a_1} < \frac{1^\alpha}{2^\alpha}$$