

A zatem ostatecznie

$$(\arg Thx)' = \frac{1}{1-x^2}$$

ZASTOSOWANIE POCHODNYCH DO BADANIA FUNKCJI. Niech będzie dana funkcja $f(x)$, określona w przedziale (a, b) . Weźmy w tym przedziale dwie wartości zmiennej x , mianowicie x_1 i x_2 takie, ażeby:

$$1/ \quad a < x_1 < x_2 < b$$

Jeśli nierówność 1/ pociąga za sobą zawsze nierówność

$$2/ \quad f(x_1) \leq f(x_2)$$

to funkcję nazywamy **r o s n ą c ą** w tym przedziale.

Jeśli zaś nierówność 1/ pociąga za sobą zawsze nierówność

$$3/ \quad f(x_1) > f(x_2)$$

to funkcję nazywamy **m a l e j ą c ą** w tym przedziale.

Przypuśćmy, że dana funkcja $f(x)$, określona w przedziale (a, b) , w jednym z punktów tego przedziału posiada pochodną dodatnią, czyli $f'(x_0) > 0$.

Można wówczas znaleźć taką liczbę ε dodatnią, że nierówność

$$1/ \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0$$

pociąga za sobą nierówność

$$2/ \quad f(x) < f(x_0)$$

zaś nierówność

$$1' / \quad x_0 < x < x_0 + \varepsilon$$

pociągnie za sobą nierówność

$$12' / \quad f(x) > f(x_0)$$

Istotnie, ponieważ

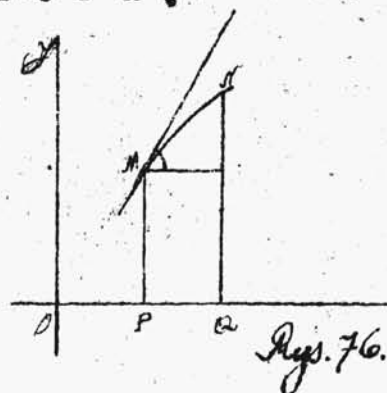
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$$

więc przy wartościach zmiennej x , które są dość bliskie x_0 , różnica $f(x) - f(x_0)$ oraz $x - x_0$ muszą mieć znaki jednakowe: gdy $x - x_0 > 0$, wówczas $f(x) > f(x_0)$ /nierówność 2' /: gdy zaś $x - x_0 < 0$, wówczas

$$f(x) < f(x_0) \text{ / nierówność 2' /}$$

TWIERDZENIE O ZNAKU POCHODNEJ

Jeżeli funkcja $f(x)$ w przedziale (a, b) rośnie, to jej pochodna w dowolnym punkcie tego przedziału jest dodatnia lub równa zero.



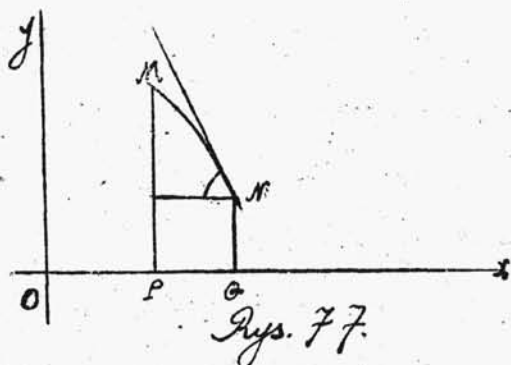
Rys. 76.

W istocie, jeżeli funkcja $f(x)$ w danym przedziale rośnie, to przyrosty Δx i Δy /patrz określenie/ mają znaki jednakowe /rys. 76 /, a więc stosunek tych przyrostów jest

dodatni. Stąd wynika, że i pochodna czyli granica tego stosunku jest dodatnią, albo równą zeru, gdyż granica zmiennej dodatniej może być tylko dodatnią albo równą zeru.

Jeżeli funkcja $f(x)$ w danym przedziale maleje, to jej pochodna w dowolnym punkcie tego przedziału jest ujemna

lub równa zeru. W rzeczy samej, przyrosty Δx i Δy mają tutaj znaki różne a więc ich stosunek jest ujemny.

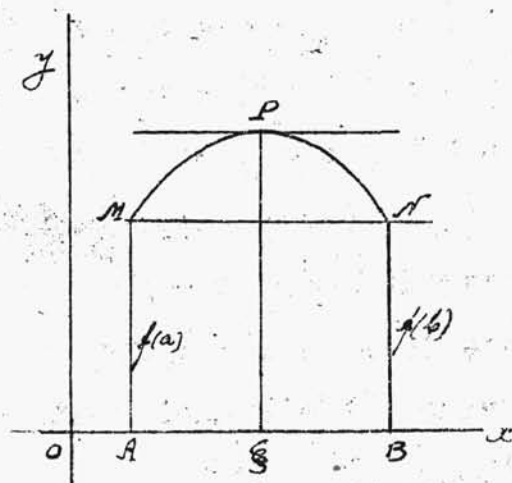


Rys. 77.

A zatem pochodna jest ujemna lub równa zeru.

TWIERDZENIE ROLLE 'A. Jeżeli funkcja ciągła w danym przedziale posiada w dwóch punktach tego przedziału tę samą wartość, to istnieje pomiędzy temi dwoma punktami przynajmniej jeden taki punkt pośredni ξ , w którym pochodna jest równa zeru.

Niech $y = f(x)$ będzie funkcją ciągłą w przedziale (a, b) i niech $f(a) = f(b)$. Załóżmy dla ułatwienia dowodu, że $f(a) = f(b) = 0$. Możliwe są teraz dwa przypadki: albo $f(x)$ w każdym punkcie przedziału równa się zeru, czyli jest wielkością stałą, albo też tak nie jest. W pierwszym przypadku w każdym punkcie pośrednim ξ mamy $f'(\xi) = 0$



Rys. 78.

/jako pochodna wielkości stałej/. Jeżeli zachodzi przypadek drugi, to istnieje w przedziale (a, b) takie wartości zmiennej x , dla których funkcja $f(x)$ jest dodatnia lub ujemna.

Przypuśćmy, że $f(x)$

przybiera wartości dodatnie. Niech ξ oznacza wartość zmiennej, dla której funkcja staje się równą kresowi górnemu M . Taka wartość ξ istnieje, gdyż funkcja jest ciągła /funkcja ciągła osiąga kresy/. Tak więc $f(\xi) = M$ i stanowi największą wartość funkcji, czyli jej kres górny; oczywiście M jest większe od zera. Przypuśćmy następnie, że $f'(\xi) > 0$. Na zasadzie jednego z twierdzeń poprzednich istnieje taki przedział $(\xi, \xi + \varepsilon)$, że gdy $\xi < x < \xi + \varepsilon$,

to wówczas $f(x) > f(\xi)$. Stąd wynika niedorzeczność: istnieją wartości $x > \xi$, należące do przedziału (a, b) dla których $f(x)$ jest większe od kresu górnego.

Jeżeli teraz założymy, że $f'(\xi) < 0$, to dla każdego x , spełniającego warunek $\xi > x > \xi - \varepsilon$ musi być znowu $f(x) > f(\xi)$; otrzymujemy tedy tę samą niedorzeczność. Pozostaje więc ostatnia ewntualność, mianowicie, że

$$f'(\xi) = 0$$

Zupełnie takie same rozumowanie należy zastosować, gdy przypuścimy, że $f(x)$ przybiera w przedziale (a, b) wartości ujemne. W takim razie istnieje napewno wartość ξ , większa od a i mniejsza od b , przy której $f(x)$ osiąga wartość najmniejszą (kres dolny) $f(\xi) = \eta < 0$. (Dalszy ciąg rozumowania podobnie jak poprzednio).

Gdy wartości funkcji w punktach krańcowych są różne od zera, np. $f(a) = f(b) = c$; wówczas oznaczamy

$$/I/ \quad \varphi(x) = f(x) - c$$

przyczem

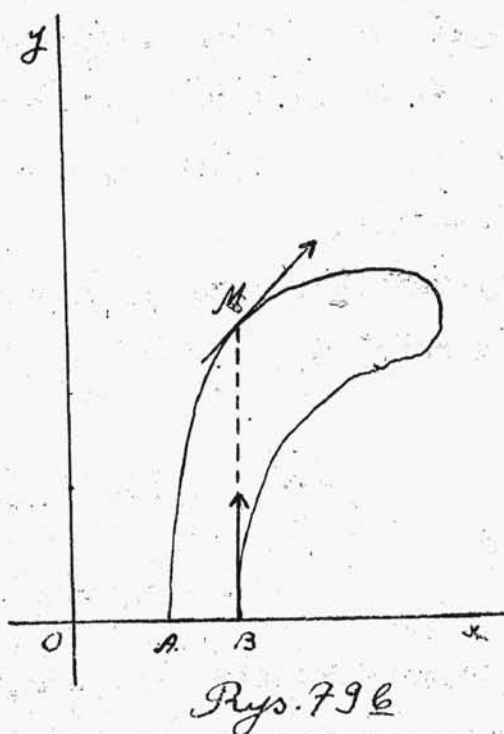
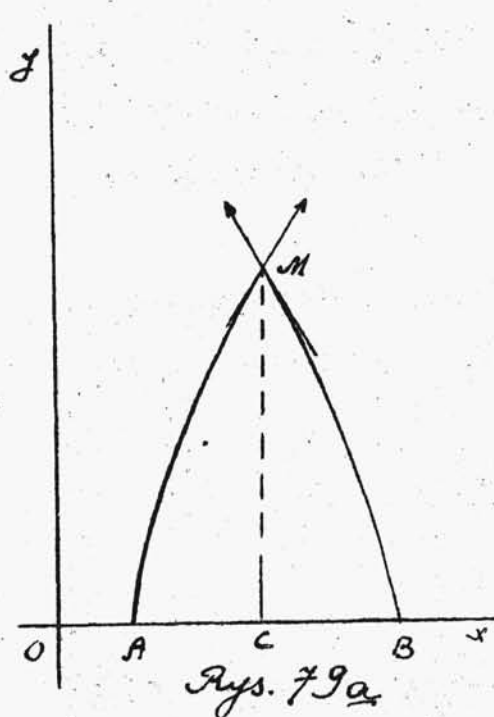
$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

Różniczkując równanie /I/, znajdziemy, że $\varphi'(x) = f'(x)$. Ale na mocy dopiero co dowiedzionego twierdzenia, gdy

$a < \xi < b$, wówczas $f'(\xi) = 0$, a więc i
 $f'(x) = 0$,

co dowodzi słuszności twierdzenia.

U w a g a. Twierdzenie Rolle'a może być zastosowane jedynie wtedy, gdy funkcja $f(x)$ ma dla wszystkich wartości zmiennej x w przedziale (a, b) , pochodną jednoznacznie określoną. Np. dla funkcji, wykreślonych na rys. 79a i 79b, twierdzenie to jest niesłuszne: na rys. 79a mamy wykres funkcji, której pochodna nie jest jednoznacznie określona dla wartości c , na rys. 79b - funkcji, której pochodna, zarówno jak sama funkcja, nie jest jednoznacznie określona dla wartości b .



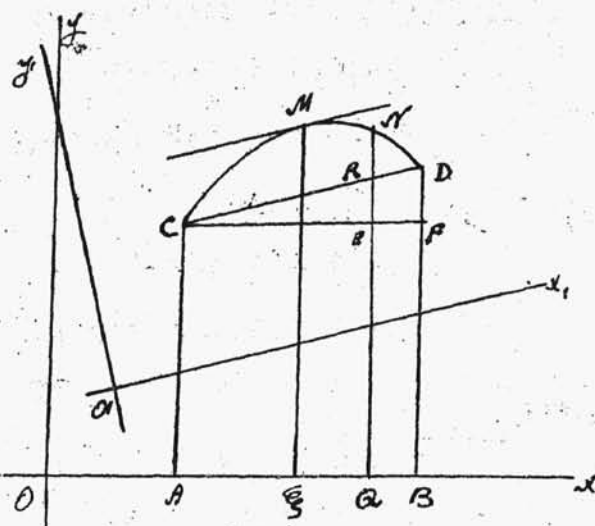
Twierdzenie o wartości pośredniej jest uogólnieniem twierdzenia Roll'a i należy do najważniejszych twierdzeń w rachunku różniczkowym. Brzmi ono jak następuje.

Pomiędzy dwoma punktami krzywej ciągłej w danym przedziale i posiadającej w każdym z punktów tego przedziału styczność jednoznacznie określoną, istnieje zawsze taki punkt pośredni, że styczna w nim jest równoległa do cięciwy łączącej oba dane punkty.

Niech będą dane na krzywej punkty C i D /rys. 80/. Zmierzmy układ współrzędnych w ten sposób, aby oś x była równoległa do cięciwy CD . Jeżeli są zachowane warunki ciągłości oraz istnienia pochodnej jednoznacznie określonej, to, na mocy twierdzenia Roll'a istnieć będzie taki punkt pośredni ξ , w którym styczna będzie równoległa do nowej osi x /pochodna

$f'(\xi) = 0$ /, a więc i do cięciwy CD .

Twierdzenie to może być dowiedzione również bez-



Rys. 80.

pośrednio. Mianowicie współczynnik kierunkowy cięciwy CD równa się stosunkowi

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

zaś współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej w punkcie ξ równa się $f'(\xi)$

Równość tych współ-

czynników pociągnie za sobą równoległość prostych. Możemy rozpatrywać jako funkcję $F(x)$ zmiennej x , nie całą rzędną, ale tylko jej część, zawartą między krzywą i cięciwą CD . Ta funkcja przyjmuje w punktach krańcowych te same wartości równe zeru: można więc zastosować twierdzenie Rolle'a. Z podobieństwa trójkątów CRE i CDF wynika:

$$\frac{RQ - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

skąd

$$RQ = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a).$$

A więc

$$NR = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) = F(x)$$

Różniczkując obie strony tej równości, znajdziemy, że

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ponieważ $F(a) = F(b) = 0$, więc na mocy twierdzenia Rolle'a istnieje w przedziale (a, b) taka wartość ξ zmiennej x , dla której pochodna

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

stąd

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

co właśnie dowodzi słuszności twierdzenia.

Ostatnia równość pozwala nam wyrazić to twierdzenie w sposób inny, niezależny od interpretacji geometrycznej:

Stosunek różnicy wartości funkcji do różnicy wartości zmiennej jest równy wartości pochodnej w punkcie pośrednim.

Oznaczmy w ostatnim wzorze $b - a = h$ oraz

$\xi = a + \theta h$, gdzie oczywiście $0 < \theta < 1$.

Wtedy można napisać

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= (b - a) \cdot f'(a + \theta h) \\ f(a + h) - f(a) &= h \cdot f'(a + \theta h) \end{aligned}$$

Zastępując a przez x , otrzymamy ten sam wzór w innej postaci, najczęściej używanej:

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot f'(a+\theta h)$$

gdzie należy pamiętać, że $0 < \theta < 1$.

Przy badaniu pochodnych funkcji nasuwa się pytanie, czy zawsze, gdy pochodna jest dodatnia funkcja rośnie, gdy zaś pochodna jest ujemna funkcja maleje. Przypuśćmy, że w przedziale (a, b) pochodna $f'(x) > 0$. Oznaczmy dwie wartości zmiennej x w tym przedziale przez x_1 i x_2 . Na zasadzie wyżej dowiedzionego twierdzenia istnieje taka wartość zmiennej $x_1 < \xi < x_2$ że

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

Ponieważ, jak wynika z założenia, pochodna $f'(\xi)$ jest dodatnia, więc różnica $(x_2 - x_1)$ musi posiadać ten sam znak, co i różnica $f(x_2) - f(x_1)$. Jeżeli zatem $x_2 > x_1$, to $f(x_2) > f(x_1)$, czyli większej wartości odciętej odpowiada większa wartość rzędnej: inaczej mówiąc, funkcja jest w tym wypadku rosnącą.

Gdybyśmy założyli, że $f'(\xi) < 0$, to różnica $(x_2 - x_1)$ oraz $f(x_2) - f(x_1)$ posiadałaby znaki różne, czyli funkcja $f(x)$ byłaby malejącą.

To twierdzenie pozwala nam powiedzieć czy funkcja rośnie, czy maleje, gdy mamy jej pochodną.

Wynika stąd wniosek następujący. Jeśli pochodna $f'(x)$ jest w przedziale (a, b) dodatnią, zaś w punkcie krańcowym z lewej strony /dla mniejszej wartości odciętej/ funkcja $f(x)$ jest również dodatnia lub równa zeru, to w całym przedziale (a, b) funkcja $f(x)$ jest dodatnia. Jeżeli zaś w przedziale (a, b) pochodna $f'(x)$ jest ujemna i jeżeli $f(a) \leq 0$ /zakładamy, że $a < b$ /, to w całym przedziale (a, b) funkcja $f(x)$ jest ujemna.

MAXIMUM I MINIMUM. Niech będzie dana funkcja określona w przedziale (a, b) . O pewnej wartości ξ w tym przedziale powiadamy że stanowi ona **m a x i - m u m** ; jeżeli istnieje takie otoczenie punktu ξ , że wszystkie rzędne w tym otoczeniu są mniejsze od rzędnej w tym punkcie, czyli jeżeli dla

$$\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$$

zachodzi nierówność

$$f(x) < f(\xi)$$

Jeżeli zaś istnieje takie otoczenie punktu ξ , że wszystkie rzędne w tym otoczeniu są mniejsze od rzędnych w punkcie ξ , czyli gdy nierówność

$$\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$$

pociąga za sobą nierówność

$$f(x) > f(\xi)$$

powiadamy, że funkcja osiąga **m i n i m u m** w punkcie ξ .