

12/

$$\begin{cases} P(x, y) = 0 \\ Q(x, y) = 0 \end{cases}$$

Podstawmy teraz na miejsce  $z$  liczbę  $x-iy$  W takim razie

$$f(x-iy) = P(x, y) - iQ(x, y) = 0$$

czyli

$$f(x-iy) = 0$$

A zatem  $x-iy$  jest również pierwiastkiem równania. A więc pierwiastki zespolone występują zawsze parami sprzężzonymi. Stąd wniosek, że każde równanie stopnia nieparzystego posiada przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty /pierwiastków zespolonych musi być liczba parzysta/.

TOŻSAMOŚĆ WIELOMIANÓW. Niech będą dane dwa wielomiany  $n$  stopnia względem  $z$  :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

$$f(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$$

Jeżeli współczynniki przy jednakowych potęgach są odpowiednio równe:

$$a_0 = b_0 ; a_1 = b_1 ; \dots ; a_n = b_n ;$$

to powiadamy, że pomiędzy wielomianami zachodzi tożsamość formalna. Wówczas oczywiście:

$$f(x) = f(x)$$

przy wszelkich wartościach  $x$ .

Jeżeli dla wszystkich wartości  $x$

$$f(x) = f(x)$$

czyli

$$F(x) \equiv f(x) - f(x) = 0$$

mówimy, że pomiędzy wielomianami  $f(x)$  i  $f(x)$  zachodzi tożsamość wartościowa.

Rzecz jasna, że tożsamość formalna pociąga za sobą zawsze tożsamość wartościową, ale nie jest oczywistą słuszność twierdzenia odwrotnego. Twierdzenie odwrotne jednak jest słuszne. Wynika to z twierdzenia, które brzmi, jak następuje: wielomian  $n$  stopnia nie może równać się zeru przy więcej niż  $n$  wartościach zmiennej: Inaczej mówiąc, równanie stopnia  $n$  nie może mieć więcej niż  $n$  pierwiastków. Posługiwac się będziemy metodą indukcji zupełnej i dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności.

Przypuśćmy zatem, że funkcja pierwszego stopnia

$$f(x) = ax + b$$

jest równa zeru przy dwóch różnych wartościach zmiennej:  
 $x_1$  i  $x_2$ , czyli

$$ax_1 + b = 0;$$

$$ax_2 + b = 0. \quad (\text{przyjmujemy } x_1 \neq x_2)$$

Odejmując te równości stronami, otrzymamy:

$$a(x_1 - x_2) = 0$$

To jest możliwe tylko wówczas, gdy albo

$$a = 0$$

albo

$$x_1 - x_2 = 0$$

czyli

$$x_1 = x_2$$

Z założenia zaś wiemy, że ani jedno, ani drugie nie jest słuszne.

A zatem równanie stopnia pierwszego nie może mieć dwóch pierwiastków.

Przypuśćmy teraz, że równanie kwadratowe

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

posiada 3 pierwiastki:  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$ , czyli, że

$$f(x_i) = 0$$

$$f(x_2) = 0$$
$$f(x_3) = 0$$

Utwórzmy wielomian

$$f(x) = f(x) - a(x-x_2)(x-x_2)$$

Jest to, jak łatwo sprawdzić, wielomian stopnia pierwszego, którego współczynniki są różne od zera,

gdyż  $f(x_3) = a(x_3-x_1)(x_3-x_2) \neq 0$

Zauważmy, że gdy  $x = x_2$

$$f(x_2) = f(x_2)$$

czyli

$$f(x_2) = 0$$

Podobnie, gdy  $x = x_2$

$$f(x_2) = 0$$

A więc równanie stopnia pierwszego

$$f(x) = 0$$

powinno posiadać 2 pierwiastki:  $x_1$  i  $x_2$ , co jest niemożliwe. A zatem równanie kwadratowe nie może posiadać trzech pierwiastków.

W ten sam sposób moglibyśmy udowodnić twierdzenia dla  $n = 3, 4, \dots$ . Załóżmy, że twierdzenie to jest słuszne dla  $n = k$ , czyli, że równanie  $k$  stopnia nie może mieć  $k+1$  pierwiastków. Udowodnimy, że w takim

razie równanie stopnia  $k+1$  nie może posiadać  $k+2$  pierwiastków, czyli, że to twierdzenie jest słuszne dla  $n = k+1$

Przypuśćmy, że mamy równanie

$$f(x) = 0$$

gdzie

$$f(x) = a_0 x^{k+1} + a_1 x^k + \dots + a_{k+1},$$

którego pierwiastkami są

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k+1}, x_{k+2}.$$

Utwórzmy wielomian

$$p(x) = f(x) - a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k+1})$$

Jest to wielomian stopnia, co najwyżej  $k$ . Staje się on równy 0, gdy odjemna  $f(x)$  i odjemnik

$a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{k+1})$  są zerami. To zaś zachodzi wówczas, gdy  $x$  przybiera wartości

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{k+1}$$

A więc równanie  $k$  stopnia

$$p(x) = 0$$

powinno mieć  $k+1$  pierwiastków, co przeczy założeniu.

Dlatego też równanie  $k+1$  stopnia

$$f(x) = 0$$

nie może mieć  $k+2$  pierwiastków. Rozumując w ten spo-

sób w dalszym ciągu, doszlibyśmy do przekonania, że twierdzenie jest słuszne dla  $n = k+2, k+3, \dots$  wogóle dla dowolnej liczby  $n$ .

Możemy teraz udowodnić, że "tożsamość wartościowa" pociąga za sobą "tożsamość formalną". Niech  $f(z) = g(z)$  dla każdego  $z$ . Trzeba udowodnić, że  $f(z)$  i  $g(z)$  mają te same współczynniki. Przypuśćmy, że nie. Wtedy  $F(z) = f(z) - g(z)$  jest istotnym wielomianem, posiadającym nieskończenie wiele pierwiastków, będąc stopnia najwyżej  $n$ . Jest to sprzeczne z poprzednio udowodnionym twierdzeniem.

ROZKŁAD NA CZYNNIKI PIERWIASTKOWE. Idąc dalej udowodnimy, że równanie stopnia  $n$  posiada zawsze  $n$  pierwiastków. Oprzemy się przytem na twierdzeniu, którego dowód podamy na końcu kursu, mianowicie, że każde równanie algebraiczne posiada przynajmniej jeden pierwiastek. Narazie możemy przyjąć to twierdzenie bez dowodu. Przedtem jeszcze przypomnimy pewną własność dzielenia. Jeżeli mianowicie oznaczymy przez  $Q(z)$  iloraz z podzielenia wielomianu  $f(z)$  przez  $z-a$ , zaś przez  $R$  resztę z tegoż dzielenia, to

$$f(z) = (z-a) \cdot Q(z) + R$$

Reszta  $R$  jest zawsze stopnia niższego, niż dzielnik, a więc nie zawiera tu wcale zmiennej  $z$ . Podstawiając do wyżej napisanej równości

$$z = a$$

znajdziemy, że

$$R = f(a)$$

A więc warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby  $f(z)$  dzieliło się bez reszty przez  $z - a$  jest:

$$f(a) = 0$$

czyli, żeby  $a$  było pierwiastkiem równania.

Niech będzie dane równanie  $n$ -stopnia

$$f(z) = 0$$

Na zasadzie twierdzenia, które przyjąłismy na razie bez dowodu, posiada ono przynajmniej jeden pierwiastek  $a_1$ . Dzieląc wielomian  $f(z)$  przez  $z - a_1$ , otrzymujemy:

$$f(z) = (z - a_1) \cdot f_1(z)$$

gdzie  $f_1(z)$  jest wielomianem stopnia  $n-1$ . Wielomian  $f_1(z)$  musi posiadać przynajmniej jeden pierwiastek  $a_2$ , dzieli się zatem bez reszty przez  $z - a_2$ :

$$f_1(z) = (z - a_2) \cdot f_2(z)$$

Wielomian stopnia  $n-2$  :  $f_2(z)$  posiada pierwiastek  $a_3$ , możemy więc napisać, że

$$f_2(z) = (z - a_3) \cdot f_3(z).$$

Tak samo

$$f_3(z) = (z - a_4) \cdot f_4(z),$$

i t.d. Ostatecznie będziemy mogli przedstawić wielomian  $f(z)$  w postaci:

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2)(z - a_3) \dots (z - a_n) a_0,$$

gdyż

$$f_n(z) = a_0$$

Jest to rozkład na czynniki pierwiastkowe.

Prawa strona składać się będzie z  $n$  czynników /  $n$  razy obniżamy stopień równania o jeden /: każdy z czynników zawiera jako odjemnik jeden z pierwiastków równania. A więc równanie to posiada  $n$  pierwiastków, gdyż iloczyn  $f(z) = 0$ , gdy jeden z czynników  $z - a_1$ , albo  $z - a_2$ , albo  $z - a_3$ , ..., albo  $z - a_n$  równa się zeru.

PIERWIASTKI WIELOKROTNE. Przy rozkładaniu wielomianu  $f(z)$  na czynniki może się okazać, że niektóre z  $n$  czynników powtarzają się kilkakrotnie. Znaczy to, że wśród  $n$  pierwiastków równania niektóre są sobie równe. Tego rodzaju pierwiastki noszą nazwę **p i e r w i a s t k ó w w i e l o k r o t n y c h**. Przy rozkładzie na czynniki występują odpowiednie dwumiany w potęgach równych wielokrotności danego pierwiastka.



Najogólniejszy rozkład wielomianu  $n$  stopnia da się wyrazić w sposób następujący:

$$f(z) = a_0(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}(z-a_3)^{m_3}\dots(z-a_k)^{m_k}$$

Jeżeli pierwiastki  $a_1$  i  $a_2$  są zespolone sprzężone to muszą mieć ten sam stopień wielokrotności, czyli jeżeli  $a_1 = m + ni$  zaś  $a_2 = m - ni$ , to wówczas  $m_1 = m_2$ . Jest to oczywiste, albowiem jedynie w tym przypadku

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0[(z-a_1)(z-a_2)]^{m_1}(z-a_3)^{m_3}\dots(z-a_k)^{m_k} = \\ &= a_0(z^2 - 2ma + m^2 + n^2)^{m_1}(z-a_3)^{m_3}\dots(z-a_k)^{m_k} \end{aligned}$$

jest liczbą rzeczywistą. Wynika to zresztą z teorii pierwiastków wielokrotnych, którą podajemy niżej.

WZÓR TAYLORA. Niech będzie dany wielomian  $n$  stopnia względem zmiennej niezależnej  $z$  :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

Nadajemy zmiennej  $z$  przyrost  $h$ . Wówczas  $f(z)$  przybierze wartość

$$f(z+h) = a_0(z+h)^n + a_1(z+h)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(z+h) + a_n$$

Rozkładając każdy ze składników po prawej stronie równania według reguły Newtona i porządkując wyrazy według potęg rosnących  $h$ , otrzymamy wielomian, który będziemy mogli przedstawić w postaci:

$$1/1/ \quad f(z+h) = f_0(z) + h \cdot f_1(z) + h^2 \cdot f_2(z) + \dots + h^n \cdot a_0$$

W celu znalezienia wartości funkcji  $f_2(x)$  uczynimy  $h=0$  : zauważmy wówczas, że

$$f(x) = f_2(x)$$

Wyobraźmy sobie teraz, że  $x$  jest wielkością stałą, natomiast  $h$  zmienną: znajdziemy pochodną funkcji  $f(x+h)$  względem  $h$ :

$$f'_h(x+h) = f_2(x) + 2h f_3(x) + 3h^2 f_4(x) + \dots + n h^{n-1} f_n(x)$$

Otóż

$$f'_h(x+h) = f'_{(x+h)}(x+h) \cdot D_h(x+h)$$

Uczynimy  $h=0$  : otrzymamy:

$$f'_2(x) = f_2(x)$$

Znajdźmy następnie drugą pochodną funkcji  $f(x+h)$  czyli pochodną funkcji  $f'_h(x+h)$ :

$$f''_h(x+h) = 2f_3(x) + 2 \cdot 3 \cdot h f_4(x) + 3 \cdot 2 \cdot h^2 f_5(x) + \dots$$

Mamy podobnież

$$\begin{aligned} f''_h(x+h) &= D_h[f'_h(x+h)] = D_h[f'_{(x+h)}(x+h)] = \\ &= f''_{(x+h)}(x+h) \cdot D_h(x+h) = f''_{(x+h)}(x+h), \end{aligned}$$

zakładając, że  $h=0$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} f''_2(x) &= 2f_3(x) \\ f_3(x) &= \frac{f''_2(x)}{2 \cdot 2} \end{aligned}$$

m) Uwaga:  $D_x y = \frac{dy}{dx} = y'_x = f'_x(x)$

Jeżeli teraz w pochodnej trzeciej

$$f'''(z+h) = 2 \cdot 3 \cdot f_4(z) + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot h \cdot f_5(z) + \dots$$

założymy, że  $h=0$ , to znajdziemy:

$$f'''(z) = 2 \cdot 3 \cdot f_4(z)$$

skąd znowu

$$f_4(z) = \frac{f'''(z)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Zapomocą metody indukcji zupełnej moglibyśmy udowodnić, że

$$f_k(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1)}$$

Ponieważ następnie

$$f^{(n)}(z) = \alpha_0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

więc

$$\alpha_0 = \frac{f^{(n)}(z)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n};$$

będziemy mogli zatem napisać wzór /1/ w postaci:

$$f(z+h) = f(z) + h \cdot f'(z) + \frac{h^2}{2!} f''(z) + \frac{h^3}{3!} f'''(z) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(z)$$

Jest to t.j.w. wzór Taylora w przypadku szczególnym, gdy  $f(z)$  jest wielomianem.

P r a y k ł a d : Niech:

$$f(z) = z^3 + 5z - 7$$

W takim razie

$$\begin{aligned} f(x+h) &= x^3 + 5x - 7 + h(3x^2 + 5) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot 6x + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6 = \\ &= x^3 + 5x - 7 + h(3x^2 + 5) + 3h^2x + h^3 \end{aligned}$$

Niech będzie dany wielomian:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Przyrównując ten wielomian do zera, otrzymamy równanie

$$f(x) = 0.$$

Przypuśćmy, że  $\alpha$  jest pierwiastkiem tego równania, czyli

$$f(\alpha) = 0$$

Na mocy wzoru Taylora możemy napisać, że

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x)$$

A więc

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + h \cdot f'(\alpha) + \frac{h^2}{2!} f''(\alpha) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\alpha)$$

Może się zdarzyć, że  $\alpha$  jest też pierwiastkiem równania pochodnego

$$f(x) = 0$$

czyli, że

$$f'(\alpha) = 0$$

Wówczas

$$f(a+h) = \frac{h^2}{2!} f''(a) + \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Jeżeli również

$$f''(a) = 0$$

to

$$f(a+h) = \frac{h^3}{3!} f'''(a) + \frac{h^4}{4!} f^{(4)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a).$$

Ten wynik jest najzupełniej ogólny. Jeżeli liczba  $\alpha$  jest pierwiastkiem równania danego i  $k$  pierwszych równań pochodnych:

$$\begin{aligned} f(a) &= 0 \\ f'(a) &= 0 \\ f''(a) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(k)}(a) &= 0 \end{aligned}$$

ale

$$f^{(k+1)}(a) \neq 0$$

wtedy

$$f(a+h) = \frac{h^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \frac{h^{k+2}}{(k+2)!} f^{(k+2)}(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Możemy nadać tym równaniom postać nieco odmienną.  
Uczyńmy mianowicie:

$$h = z - \alpha$$

stąd

$$z = \alpha + h$$

Jeżeli  $\alpha$  nie jest pierwiastkiem równania, czyli  
jeżeli

$$f(\alpha) \neq 0$$

to

$$f(z) = f(\alpha) + \frac{z-\alpha}{1} f'(\alpha) + \frac{(z-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \dots + \frac{(z-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha)$$

Pierwszy wyraz rozwinięcia nie zawiera czynnika,  
 $z - \alpha$ , jest więc przez  $z - \alpha$  niepodzielny. Jeżeli  
zatem podzielimy  $f(z)$  przez  $z - \alpha$ , to otrzymamy re-  
szkę

$$f(\alpha).$$

Przypuśćmy teraz, że  $\alpha$  jest pierwiastkiem równa-  
nia danego, ale nie jest pierwiastkiem pierwszego rów-  
nania pochodnego:

$$f(\alpha) = 0$$

$$f'(\alpha) \neq 0.$$

W takim razie:

$$f(z) = \frac{z-\alpha}{1} f'(\alpha) + \frac{(z-\alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \dots + \frac{(z-\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha).$$

Stąd wniosek, że  $f(z)$  podzieli się przez  $z-a$  przy dzieleniu zaś przez  $z-a^2$  otrzymamy resztę

$$f'(a)$$

Możemy badać w ten sposób dzielenie w dalszym ciągu. Załóżmy więc, że

$$f(a) = 0$$

$$f'(a) = 0$$

ale

$$f''(a) \neq 0$$

Dla  $f(z)$  otrzymamy wartość:

$$f(z) = \frac{(z-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(z-a)^3}{3!} f'''(a) + \dots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$

z której wynika, że  $f(z)$  podzieli się bez reszty przez  $(z-a)^2$ , a przy dzieleniu przez  $(z-a)^3$  da resztę

$$\frac{f''(a)}{2!}$$

Wogóle, jeśli  $\alpha$  jest pierwiastkiem danego równania i  $k-1$  pierwszych równań pochodnych

$$f(a) = 0$$

$$f'(a) = 0$$

$$f''(a) = 0$$

$$\dots$$

$$f^{(k-1)}(a) = 0,$$

lacz

$$f^{(k)}(a) \neq 0$$

to

$$f(z) = \frac{(z-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(z-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

Przy dzieleniu więc  $f(z)$  przez  $(z-a)^k$  otrzymamy resztę 0, czyli  $f(z)$  jest przez  $(z-a)^k$  podzielne zaś przy dzieleniu przez  $(z-a)^{k+1}$  otrzymamy resztę:

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} \neq 0$$

Możemy zatem wypowiedzieć twierdzenie następujące: jeżeli liczba  $\alpha$  jest pierwiastkiem funkcji  $f(z)$  i jej pochodnych do rzędu  $k-1$  włącznie, to  $k$  jest stopniem wielokrotności pierwiastka  $\alpha$ .

$$f(z) = (z-a)^k Q^{n-k}(z)$$

gdzie  $Q(z)$  jest przez  $z-a$  niepodzielne. Przy rozkładzie funkcji  $f(z)$  na czynniki, czynnik  $z-a$  występuje  $k$  razy.

Słuszne jest również twierdzenie odwrotne:

Jeżeli  $\alpha$  jest pierwiastkiem wielokrotnym funkcji  $f(z)$



i wielokrotność tego pierwiastka wyraża się liczbą  $k$ , to sama funkcja i jej  $k-1$  pierwszych pochodnych dzieli się bez reszty przez  $z-a$  i mamy

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$$

Słuszność twierdzenia jest oczywista z równań: (gdzie  $Q(a) \neq 0$ )

$$f(z) = (z-a)^k Q(z);$$

$$f'(z) = k(z-a)^{k-1} Q(z) + (z-a)^k Q'(z);$$

$$f''(z) = (k-1)k(z-a)^{k-2} Q(z) + k(z-a)^{k-1} Q'(z) + \dots$$

.....

$$f^{(k-1)}(z) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k (z-a) Q(z) + \dots$$

$$f^{(k)}(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k Q(z) + \dots$$

### SPROWADZENIE RÓWNAŃ O PIERWIASTKACH WIELOKROTNYCH DO SZEREGU RÓWNAŃ O PIERWIASTKACH JEDNOKROTNYCH.

Niech będzie dane równanie  $n$  stopnia

$$f(z) = 0$$

Rozłożmy funkcję  $f(z)$  na czynniki linjowe, przy-