

Analogia, zachodząca pomiędzy temi wzorami prowadzi nas do dalszego uogólnienia tych wzorów. Uogólnieniem tym właśnie <sup>jest</sup> następujące

TWIERDZENIE TAYLORA - czyli twierdzenie ogólne o wartości pośredniej. Niech będzie dana funkcja  $f(x)$ , ciągła w przedziale  $[a, b]$  i posiadająca w tym przedziale pochodne  $n$  pierwszych rzędów. Utwórzmy funkcję:

$$11/ \quad \Phi(x) = F(x) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n F(a),$$

gdzie

$$12/ \quad F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} f''(x) - \\ - \frac{(b-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(x) - \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x).$$

Funkcja 11/ równa się zeru przy  $x=a$  i przy  $x=b$ :

$$\Phi(a) = F(a) - F(a) = 0;$$

$$\Phi(b) = F(b) = 0.$$

Utwórzmy jej pochodną:

$$13/ \quad \Phi'(x) = F'(x) + \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

przyczem

$$F'(x) = -f'(x) - (b-x)f''(x) + f'(x) - \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} f'''(x) + \\ + (b-x)f''(x) - \frac{(b-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^{(4)}(x) + \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} f'''(x) - \dots$$

$$- \dots - \frac{(b-x)^{n-2}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x) + \frac{n(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} \cdot f^{(n-1)}(x).$$

Łatwo zauważyć, że wszystkie wyrazy, oprócz przedostatniego, znoszą się wobec tego:

$$14/ \quad \Phi'(x) = - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(x) + \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} \cdot F(a)$$

Na zasadzie twierdzenia Rolle'go dla pewnego punktu pośredniego

$$a < \xi < b$$

pochodna równa jest zeru

$$\Phi'(\xi) = 0,$$

czyli

$$- \frac{(b-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n)}(\xi) + \frac{n(b-\xi)^{n-1}}{(b-a)^n} \cdot F(a) = 0,$$

albo też

$$\frac{n(b-\xi)^{n-1}}{(b-a)^n} \cdot \left\{ - \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\xi) + F(a) \right\} = 0.$$

Ponieważ pierwszy z czynników powyższego iloczynu nie może równać się zeru, więc musi być zerem drugi czynnik:

$$F(a) = f(b) - f(a) - (b-a) \cdot f'(a) - \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(a) - \dots - \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\xi).$$

Stąd otrzymamy wzór /Taylora/, o który nam chodzi-

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(b-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

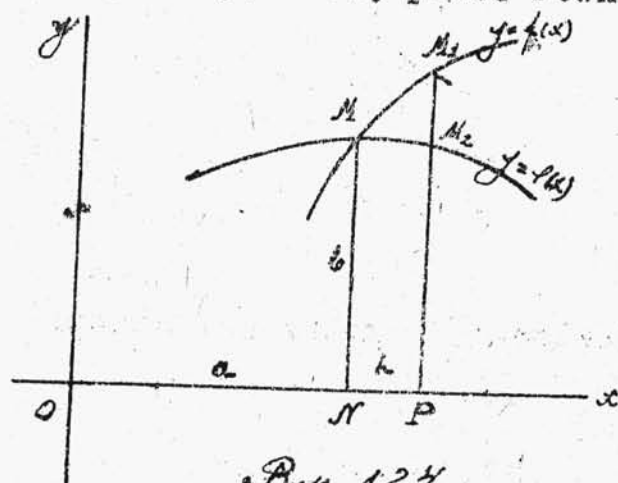
Jeżeli zastąpimy, jak poprzednio,  $b$  przez  $a+h$ ,  $\xi$  przez  $a+\theta h$ , wówczas

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h),$$

gdzie, jak należy pamiętać

$$0 < \theta < 1$$

Zastosujemy otrzymane twierdzenie do pewnych zagadnień geometrycznych. Przypuśćmy, że mamy dwie krzywe, wyrażające się przez równania:



Rys. 124.

$$y = f(x)$$

$$y = \phi(x)$$

Zauważmy różnicę rzędnych w punktach  $M_1$  i

$M_2$ , mających tę samą odcięta  $OP$ :

$$R = f(x) - \phi(x)$$

Jeżeli w jakimś punk-

cie  $M(a, b)$  krzywe się przecinają, to, oczywiście, różnica ta musi być równa zeru.

$$R=0$$

Warunkiem więc koniecznym, aby punkt  $M$  był punktem przecięcia jest:

$$f(a) = f(a)$$

Zbadajmy teraz różnicę rzędnych w otoczeniu tego punktu  $M$ , t.j. w punkcie, mającym odcięta

$$x = a + h$$

$$R = M_1 M_2 = f(a+h) - f(a)$$

Przypuszczamy, że funkcje  $f(x)$  i  $f'(x)$  są ciągłe i posiadają pochodne aż do rzędu  $n$  włącznie. Gdy  $h \rightarrow 0$  to, ponieważ  $a$  jest wielkością stałą,  $R \rightarrow 0$ . Zastosujemy do tych funkcji twierdzenie o wartości pośredniej w zwykłej postaci:

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

Odejmując te wzory stronami, otrzymamy:

$$R = h \{ f'(a) - f'(a) \} + \frac{h^2}{2} \{ f''(\xi) - f''(\xi) \}$$

Utwórzmy stosunek

$$\frac{R}{h} = f'(a) - f'(a) + \frac{h}{2} \{ f''(\xi) - f''(\xi) \}$$

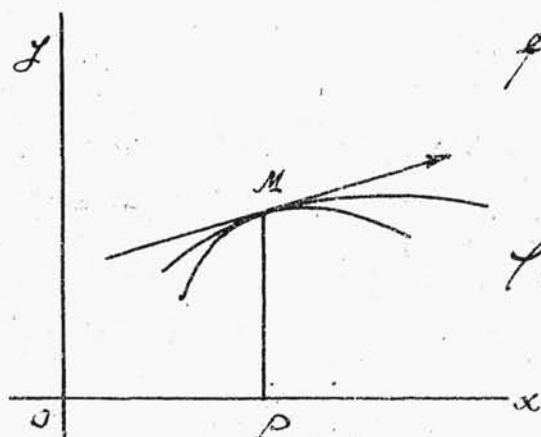
Gdy  $h \rightarrow 0$

$$\frac{R}{h} \rightarrow f'(a) - f'(a)$$

Widzimy więc, że w tym wypadku różnica rzędnych jest małą pierwszego rzędu względem  $h$ , t.j. taką, że jej stosunek do  $h$ , przy zdążaniu  $h$  do zera, dąży do liczby skończonej. Nasuwa się pytanie, co zachodzi wówczas, gdy pochodne są równe

$$f'(a) = f'(a)$$

czyli, gdy obie krzywe mają w punkcie  $M$  wspólną styczną /dwie proste, o tym samym współczynniku kierunkowym, przechodzące przez jeden punkt/.



Rys. 125.

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$$

Odejmując te nierówności stronami, znajdziemy:

$$R = \frac{h^2}{2!} [f''(a) - f''(a)] + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} [f^{(n-1)}(a) - f^{(n-1)}(a)] + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(\xi)]$$

Podzielmy wszystkie wyrazy przez  $h$  i przejdźmy

do granicy dla  $h$ , dążącego do zera.

$$\frac{R}{h^2} \rightarrow \frac{f''(a) - f''(a)}{2!}$$

A więc w tym wypadku różnica  $R$  jest nieskończenie małą drugiego rzędu względem nieskończenie małej  $h$  /to znaczy, że jej stosunek do kwadratu  $h$  dąży do granicy skończonej/. Gdybyśmy założyli, że nie tylko

$$f(a) = f(a), \\ f'(a) = f'(a),$$

ale również

$$f''(a) = f''(a),$$

to odejmując od siebie szeregi, wyrażające  $f(a+h)$ ,  $f(a-h)$  oraz dzieląc otrzymaną różnicę przez  $h^3$ , znaleźlibyśmy, że stosunek  $\frac{R}{h^3}$  dąży do pewnej liczby stałej  $A_1 \neq 0$ , gdy  $h$  dąży do zera

$$\frac{R}{h^3} \rightarrow A_1$$

czyli  $R$  jest nieskończenie małą trzeciego rzędu.

Przypuśćmy teraz, że same funkcje i ich pochodne aż do rzędu  $n-1$  włącznie są odpowiednio równe:

$$f(a) = f(a), f'(a) = f'(a), f''(a) = f''(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = f^{(n-1)}(a)$$

ale już  $f^{(n)}(a) \neq f^{(n)}(a)$

W tym wypadku, jeżeli oznaczymy  $\xi$  przez  $a + \theta h$  zaś  $\xi_1$  przez  $a + \theta_1 h$ , to

$$\frac{R}{h^n} = \frac{1}{n!} [f^{(n)}(a + \theta h) - f^{(n)}(a + \theta_1 h)]$$

Gdy  $h \rightarrow 0$

$$\frac{R}{h^n} \rightarrow \frac{f^{(n)}(a) - \varphi^{(n)}(a)}{n!}$$

A zatem  $R$  będzie małą rzędu  $n$ .

W związku z powyższymi rozważaniami zostało wprowadzone pojęcie rzędu styczności dwóch krzywych. Jeżeli mianowicie

$$f(a) = \varphi(a); \quad f'(a) = \varphi'(a);$$

ale

$$f''(a) \neq \varphi''(a)$$

to powiadamy, że pomiędzy krzywymi zachodzi styczność pierwszego rzędu /zwyczajna/.

Jeżeli teraz

$$f(a) = \varphi(a); \quad f'(a) = \varphi'(a); \quad f''(a) = \varphi''(a);$$

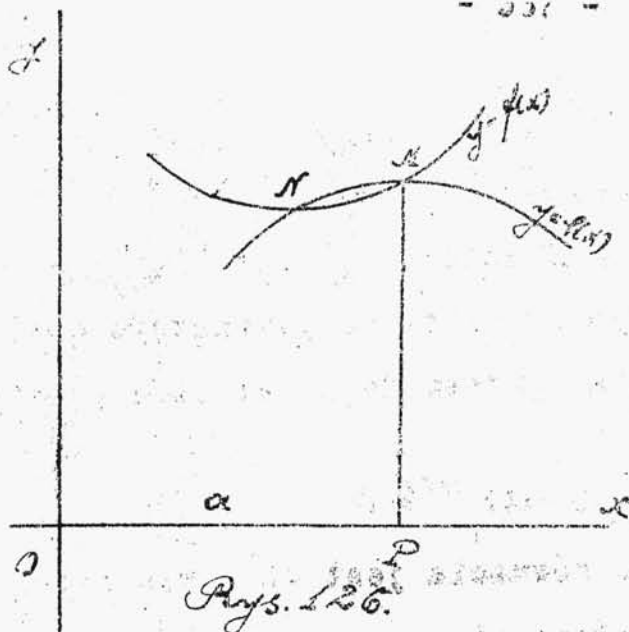
ale

$$f'''(a) \neq \varphi'''(a),$$

wówczas mówimy, że styczność jest rzędu drugiego. Wogóle, jeżeli są sobie odpowiednio równe funkcje i wszystkie pochodne aż do rzędu  $n$  włącznie, to mamy styczność  $n$ -tego rzędu.

Zauważmy tutaj, że jeżeli styczność w pewnym punkcie jest rzędu  $n$ , to różnica rzędnych obu krzywych w punkcie sąsiednim jest małą  $n+1$  rzędu.

Potraktujemy teraz teorię styczności krzywych z punktu widzenia pierwiastków wielokrotnych. Niech bę-



dane krzywe:

$$y = f(x)$$

$$y = g(x)$$

Punkty wspólne obu krzywych mają, oczywiście, rzędne jednakowe, czynią więc zadanie równaniu

$$f(x) - g(x) = 0$$

Umówimy się uważać punkt wspólny obu krzywych za kilka punktów /wielokrotność/ złączonych w jeden. Udowodnimy, że jeżeli w danym punkcie mamy styczność rzędu  $n$ , to punkt styczności będzie można liczyć jako  $n+1$  punktów. Istotnie, przypuśćmy, że w punkcie  $M$  o odciętej  $a$ , zachodzi  $n$ -krotna styczność krzywych, czyli

$$f(a) = g(a); f'(a) = g'(a); \dots \dots \dots f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$$

lecz

$$f^{(n+1)}(a) \neq g^{(n+1)}(a)$$

Na mocy wzoru Taylora można napisać, że

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(\xi)$$

i podobnie

$$g(x) = g(a) + (x-a) \cdot g'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot g^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot g^{(n+1)}(\eta)$$

Podstawiając te wartości do równania /1/, otrzymamy:



$$f(x) - P(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} [f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(\xi_1)]$$

Więc albo  $(x-a)^{n+1} = 0$  albo  $f^{(n+1)}(\xi) - f^{(n+1)}(\xi_1) = 0$

Ponieważ drugi czynnik iloczynu powyższego jest dla  $x=a$  różny od zera, przeto daje nam inne punkty przecięcia się.

W punkcie zaś  $a$ ,  $(x-a)^{n+1} = 0$

Pierwiastkiem tego równania jest  $a$ ; wielokrotność tego pierwiastka równa się  $n+1$ , co dowodzi słuszności twierdzenia.

Łatwo można dowieść również twierdzenia odwrotnego: jeżeli równanie /1/ posiada pierwiastek  $n+1$ -krotny, to funkcje  $f(x)$  i  $P(x)$  oraz ich pochodne do rzędu  $n$  włącznie muszą być odpowiednio równe, czyli pomiędzy danymi krzywymi zachodzi styczność  $n$ -tego rzędu.

W związku z tem, daje się objaśnić pewne zjawisko zachodzące przy stykaniu się dwóch krzywych; jeżeli rząd styczności wyraża się liczbą nieparzystą, to mamy styczność w zwykłym znaczeniu tego słowa; jeżeli wyraża się przez liczbę parzystą, to krzywe się przenikają, t.j. każda z nich przechodzi na drugą stronę drugiej. Zwróćmy uwagę na równanie /1/ i na różnice rzędnych w otoczeniu punktu styczności  $M$

$$R = f(x) - P(x)$$

którą można również napisać w postaci:

$$R = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left[ f^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right) - f^{(n+1)}\left(\frac{\xi}{2}\right) \right]$$

Jest widoczne, że znak tej różnicy  $R$ , gdy zmienia się  $x$ , zależy wyłącznie od znaku czynnika  $(x-a)^{n+1}$ : gdy  $n$  jest liczbą parzystą, to  $n+1$  jest liczbą nieparzystą; powyższy czynnik, a więc i  $R$ , zmienia swój znak przy przejściu  $x$  od wartości mniejszych od  $a$ ,

do wartości większych od  $a$ . W tym więc przypadku krzywe się przenikają. Jeżeli natomiast  $n$  jest liczbą nieparzystą, to  $n+1$  jest liczbą parzystą, a więc czynnik  $(x-a)^{n+1}$  jest dodatni bez względu na to, czy  $x$

jest większe czy mniejsze od  $a$ . Zatem  $R$  co do znaku się nie zmienia, czyli mamy styczność w zwykłym znaczeniu tego słowa.

Mając dwie krzywe można badać, jakiego rzędu styczność zachodzi pomiędzy nimi. Niech więc będzie dana krzywa:

$$(1) \quad y = f(x)$$

Obierzmy na niej punkt  $M(a, b)$  i poprowadźmy przez ten punkt prostą

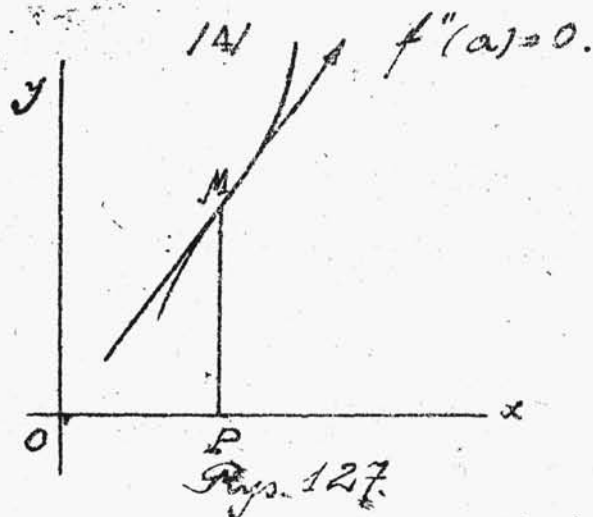
$$(2) \quad y - b = m(x - a)$$

Jeżeli pomiędzy tą prostą i krzywą zachodzi styczność pierwszego rzędu, to współczynnik kierunkowy tej

prostej musi być oczywiście równy pochodnej funkcji /1/ w punkcie  $M$ , czyli

$$/3/ \quad f'(a) = m$$

Jest widoczne, że styczność rzędu wyższego w ogólności jest niemożliwa: równanie prostej /2/ posiada tylko jeden parametr  $m$ , a ten został już związany warunkiem /3/; prosta jest przez dwa warunki: /2/ i /3/ w zupełności wyznaczona. Wyjątkowo można znaleźć na krzywej takie punkty, w których styczność z prostą może być rzędu drugiego; czyli punkty, dla których jest spełniony warunek, wyrażający równość drugich pochodnych funkcji /1/ i /2/



Tego rodzaju punkt nazywa się punktem przegięcia; krzywa przechodzi w nim z jednej strony prostej na drugą. Jest to więc punkt przecięcia się

trzykrotny.

Weźmy teraz zamiast prostej okrąg koła o promieniu  $r$  i współrzędnych środka  $(x_0, y_0)$ . Jeżeli pomiędzy krzywą i kołem ma zachodzić styczność pierwszego

rzędu, to spełnione być muszą warunki następujące:

$$1/1) \quad \varphi(x) = (a-x_0)^2 + (b-y_0)^2 - r^2 = 0$$

$$1/2) \quad \varphi'(a) = \varphi'(a)$$

Pierwszy z nich wyraża, że okrąg przechodzi przez punkt  $M$  drugi zaś, że jest styczny w tym punkcie do danej krzywej. Te dwa warunki nie wyznaczają jednak koła w zupełności, albowiem równanie koła posiada trzy parametry: współrzędne środka i promień. Można więc postawić jeszcze trzeci warunek, aby

$$1/3) \quad \varphi''(a) = \varphi''(a)$$

A zatem można zawsze znaleźć koło, którego styczność z krzywą byłaby rzędu drugiego /punkt styczności trzykrotny/. Takie koło nazywa się **kołem ściśle stycznym** lub **kołem krzywizny**; jego promień - **promieniem krzywizny**, zaś odwrotność promienia **miarą krzywizny** lub wprost **krzywizną**.

Nieraz można znaleźć na krzywej punkty szczególne w których styczność z kołem może być rzędu wyższego niż drugi.

### FUNKCJE DWUCH ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH.

Przejdziemy teraz do innego tematu, mianowicie do