

# RACHUNEK RÓŻNICZKOWY

Powróćmy do zagadnienia, którym zajmowaliśmy się na początku kursu, polegającego na określeniu stycznej do krzywej. Niech

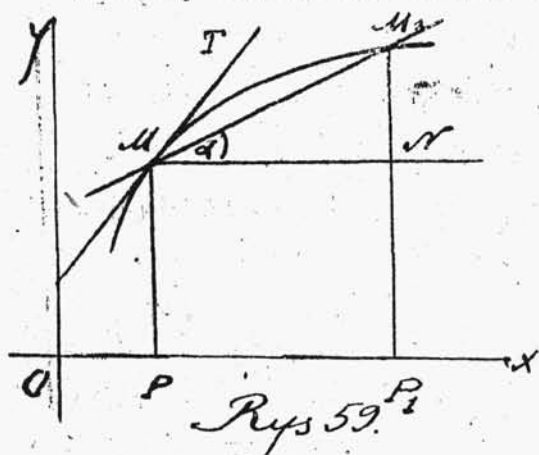
$$y = f(x)$$

będzie równaniem danej krzywej. Obierzmy na niej dwa punkty  $M$  i  $M_1$  i połączmy je sieczną. Oznaczmy dalej różnicę dwóch wartości odciętych, branych wraz z odpo-

wiedniami znakami przez  $\Delta x$  zaś różnicę dwóch wartości rzędnych, branych ze swemi znakami przez  $\Delta y$ .

$$\Delta x = OP_1 - OP = PP_1$$

$$\Delta y = M_1P_1 - MP_1 = MM_1$$



Stosunek różnicy / przyrostu / rzędnych do różnicy odciętych

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

nazywamy współczynnikiem kierunkowym cięciwy. Często oznacza się  $\Delta x$  przez  $h$  i, ponieważ

$$\begin{aligned} PM &= f(x) \\ P_1M_1 &= f(x+h) \end{aligned}$$

więc pisze się

$$\Delta x = h$$

Wobec tego

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Możemy rzędną  $OP$  ustalić i badać, w jaki sposób zmienia się powyższy stosunek, gdy punkt  $M$ , posuwa się wzdłuż krzywej. Będziemy więc mieć do czynienia z wyrażeniem, w którym  $x$  jest wielkością stałą, zmienia się tylko  $h$ . Uwidoczniając zależność stosunku od  $x$  i  $h$ , napiszemy

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = F(x, h)$$

Funkcja ta jest nieokreślona przy  $h=0$ . Może istnieć jednak granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} F(x, h)$$

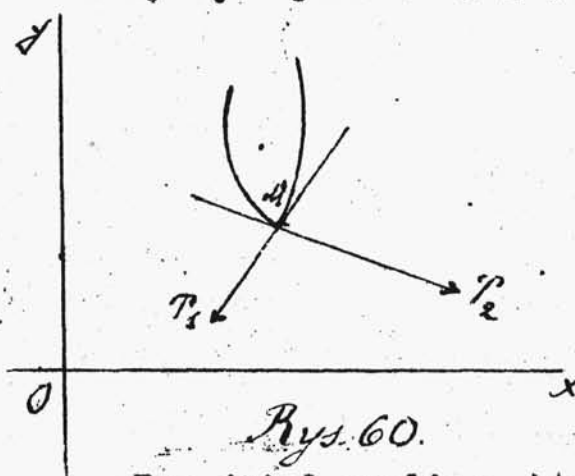
i tę granicę nazywamy p o c h o d n ą funkcji  $f(x)$ . Oznaczamy ją symbolem  $f'(x)$ . Weierstrass udowodnił, że nie każda funkcja ciągła posiada pochodną.

Dla każdej wartości funkcji można znaleźć odpowiadającą jej wartość pochodnej /oile istnieje/. Sama pochodna jest zatem funkcją zmiennej. Gdy pochodnej nie ma, to znaczy, że funkcja  $F(x, h)$  nie posiada granicy, lub też, że granica prawostronna jest różna od granicy lewostronnej. W ostatnim wypadku można mó-

wieć o pochodnej prawo i lewostronnej. Oznaczać je będziemy odpowiednio przez:

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} F'(x, h) \text{ oraz } \lim_{h \rightarrow 0-0} F'(x, h)$$

Przypuśćmy teraz, że mamy funkcję, która posiada pochodną. Zwróćmy się do interpretacji geometrycznej. Jeśli przez punkt  $M$  wykreślimy prostą  $MT$ , której współczynnik kierunkowy będzie równy pochodnej, to ta prosta będzie granicą, do której dążą proste wyznaczone przez cięciwy  $MM_1$ , gdy punkt  $M_1$  zbliża się po krzywej do punktu  $M$ . Prostą  $MT$  nazywamy styczną do krzywej w punkcie  $M$ . W tym wypadku, gdy można mó-



Rys. 60.

wieć o pochodnej prawostronnej i lewostronnej funkcji, odpowiadający jej wykres będzie posiadać w danym punkcie dwie styczne, jedną do jednej, drugą do drugiej części krzywej /rys 60/

Ten dział analizy, który zajmuje się badaniem i obliczaniem pochodnych nazywa się **ra c h u n k i e m p o c h o d n y c h**; samo dziełanie polegające na obliczeniu pochodnej nosi nazwę **r ó ż n i c z k o w a n i a**.

Zajmiemy się teraz różniczkowaniem niektórych

funkcji. Przypuśćmy że mamy funkcję pierwszego stopnia

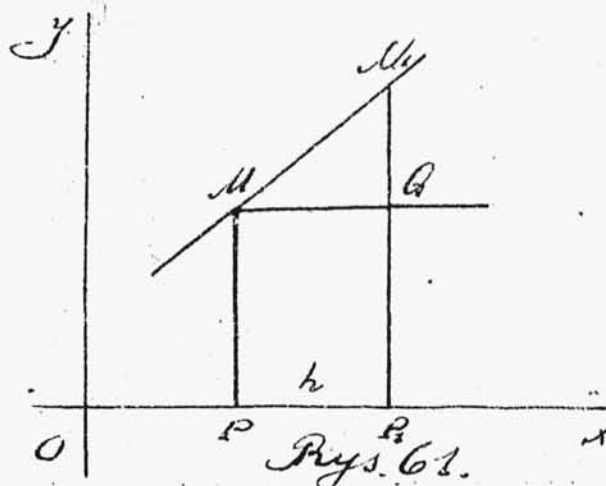
$$f(x) = ax + b$$

Bez rachunku możemy twierdzić, że pochodna tej funkcji równa się  $a$ . W rzeczy samej wykresem funkcji tej będzie

prosta o równaniu

$$y = ax + b$$

Gdy w dowolnym punkcie poprowadzimy styczną do wykresu, t.j. do prostej, to sejdzie się ona z samą prostą. Jej współczynnik kierunkowy, identyczny ze



współczynnikiem kierunkowym prostej równa się  $a$ , jak wiemy z geometrii analitycznej. A zatem pochodna

$$f'(x) = a$$

Do tego samego możemy dojść drogą czysto analityczną. W danym wypadku

$$f(x+h) = a(x+h) + b = ax + ah + b$$

Stosunek przyrostu funkcji do przyrostu zmiennej:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \frac{ah}{h}$$

Gdy  $h \neq 0$ , stosunek ten  $= a$ . Pochodna

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a$$

W wypadku szczególnym, gdy  $a=0$ , wykresem funkcji

$$f(x) = ax + b$$

będzie prosta  $y=b$ , równoległa do osi  $x$ . Oczywiście, że jej współczynnik kierunkowy, t.j.

$$f'(x) = 0$$

A więc pochodna wielkości stałej równa się zeru.

Uzasadnimy teraz kilka zasadniczych reguł różniczkowania.

**POCHODNA SUMY** dwóch funkcji równa się sumie pochodnych składników, o ile pochodne składników istnieją.

Niech  $F(x)$  będzie sumą funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

Udowodnimy że

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Istotnie

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

Grupując odpowiednio wyrazy, znajdziemy, że

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Zauważmy że oba składniki są odpowiednio  $f'(x)$

i  $g'(x)$ . A więc

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

UWAGA. Twierdzenie to można rozszerzyć na dowolną liczbę składników.

POCHODNA ILOCZYNU dwóch funkcji równa się sumie iloczynów pochodnej pierwszego czynnika przez drugi czynnik i pochodnej czynnika drugiego przez pierwszy, o ile czynniki pochodne posiadają. Załóżmy że

$$F(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Należy udowodnić, że  $F'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

W istocie

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Licznik ułamka możemy przekształcić w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) &= f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x+h) \cdot g(x) \\ + f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) &= f(x+h)[g(x+h) - g(x)] + \\ + g(x)[f(x+h) - f(x)] \end{aligned}$$

A więc

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)[g(x+h) - g(x)]}{h} +$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)]}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} g(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Stąd

$$F'(x) = f(x) \cdot f'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

W wypadku szczególnym, gdy  $f(x) = k$  jest wielkością stałą, mamy:

$$F(x) = k \cdot f(x)$$

$$F'(x) = f(x) \cdot 0 + k \cdot f'(x)$$

czyli

$$F'(x) = k \cdot f'(x)$$

Pochodna iloczynu pozwoli nam znaleźć pochodną funkcji typu:

$$y = x^n$$

Rozpatrzmy nasamprzód wypadek, gdy  $n$  jest liczbą całkowitą dodatnią. Nadajmy wykładnikowi  $n$  wartość 2

Otrzymamy funkcję  $y = x^2 = f(x)$

której pochodną jest

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + \lim_{h \rightarrow 0} h = 2x \end{aligned}$$

A więc

$$y' = 2x$$

W ten sposób znajdziemy, że gdy  $y = x^3$  to  $y' = 3x^2$  gdy  $y = x^4$ ,  $y' = 4x^3$  i t.d. Na zasadzie tego możemy przypuścić, że gdy

$$y = x^n$$

wtedy

$$y' = nx^{n-1}$$



Udowodnimy, posługując się metodą indukcji zupełnej, że tak jest istotnie. Przypuszczamy więc, że gdy

$y = x^k$ , to pochodna  $y' = kx^{k-1}$ . Wykażemy, że podług tej reguły tworzy się pochodna funkcji  $y = x^{k+1}$ .  
W istocie  $x^{k+1} = x^k \cdot x$

Zastosujemy wzór wyznaczający pochodną iloczynu:

$$(x^{k+1})' = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1) \cdot x^k$$

Zatem przypuszczenie nasze było słuszne. A więc pochodna funkcji

$$y = x^n$$

• jest równa  $y' = nx^{n-1}$

Jeżeli funkcją daną jest

$$f(x) = ax^n$$

to pochodną jej jest

$$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

Teraz potrafimy już zapisać pochodną każdego wielomianu względem  $x$ .

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Stosując ostatni wzór oraz twierdzenia o pochodnej sumy, mamy

$$f'(x) = n \cdot a_0 x^{n-1} + (n-1) \cdot a_1 x^{n-2} + \dots + 2 \cdot a_{n-2} x + a_{n-1}$$

Niech np.

$$f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 7x + 10$$

W takim razie

$$f'(x) = 10x^4 - 6x + 7$$



Przejdziemy teraz do szerszego zakresu funkcji, mianowicie do funkcji wymiernych. Nasamprzód wyprowadzimy wzór, wyznaczający pochodną ilorazu. Jak wiadomo dzielenie można zawsze sprowadzić do mnożenia przez liczbę odwrotną względem dzielnika.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

Wystarczy zatem znaleźć pochodną funkcji o postaci

$$F(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Wykluczamy przytem wartość  $x$ , która daje  $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x+h) \cdot f(x)}}{h} = - \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} f(x)} = \\ &= - \frac{f'(x)}{f(x) \cdot f(x)} = - \frac{f'(x)}{f^2(x)} \end{aligned}$$

A zatem

$$F'(x) = - \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Teraz możemy przystąpić do wypadku ogólnego. Przypuśćmy, że mamy funkcję

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

Stosując wzór, wyznaczający pochodną iloczynu, znajdziemy, że

$$F'(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

stąd

$$f'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Udowodnimy teraz słuszności wzoru, wyznaczającego pochodną funkcji  $f(x) = x^n$  dla każdego  $n$  całkowitego. Wiemy już, że gdy  $n > 0$ , to  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ . Przypuśćmy teraz, że  $n < 0$ . W takim razie  $-n > 0$ .

Niech  $n = -m$  (gdzie  $m > 0$ ):

$$x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Pochodna

$$(x^n)' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{m \cdot x^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot x^{-m-1}$$

Podstawiając  $n$  zamiast  $-m$ , znajdziemy, że

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

A więc powyższy wzór jest słuszny dla dowolnego całkowitego wykładnika potęgi  $n$ . Jako przykład znajdziemy pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x^5}$$

Mamy

$$f'(x) = (x^{-5})' = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$$

Teraz potrafimy już znaleźć pochodną każdej funkcji wymiernej

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdzie  $P(x)$  i  $Q(x)$  są wielomianami względem  $x$ .

Mianowicie

$$f'(x) = \frac{P'(x) \cdot Q(x) - P(x) \cdot Q'(x)}{Q^2(x)}$$

Niech np.

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+1}$$

Pochodna

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) \cdot 2 - (2x+3) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2-6x-2}{(x^2+1)^2}$$

Z kolei uzasadnimy wzór dla pochodnej t.zw. funkcji złożonej.

Przypuśćmy, że funkcja jest dana nie bezpośrednio w zależności od zmiennej  $x$ , ale w zależności od innej funkcji  $f(x)$ , to jest, że mamy do czynienia z funkcją o postaci:

$$f[f(x)]$$

Przykładów funkcji złożonych można dać bardzo wiele, np.  $\log \sin x$ .  $\sin x$  oznaczmy przez  $z$  i naszą funkcją będzie  $\log z$ . Obliczenie pochodnej funkcji złożonej nie przedstawia trudności.

Niech

gdy oznaczmy  $f(x)$  przez  $z$ , funkcja przybierze kształt

$$y = f(z)$$