

gdy  $n = 2p$   

$$x^{2p} \rightarrow \infty$$

gdy zaś  $n = 2p+1$   

$$x^{2p+1} = -y^{2p+1}$$

oraz  

$$x^{2p+1} \rightarrow -\infty$$

Ciąg więc w tym wypadku granicy nie posiada. Wykonywa on wahania nieskończone.

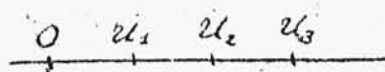
6/.  $x = -1$ . W takim razie  $x^{2p} = 1$ ,  $x^{2p+1} = -1$ .

Jest to ciąg, o którym była mowa w jednym z przykładów poprzednich. Granicy nie posiada.

### POJĘCIE PUNKTU SKUPIENIA.

Niech będzie dany zbiór liczb:  $u_1, u_2, u_3, \dots$

Możemy go przedstawić geometrycznie, odkładając na prostej punkty, których odcięte są równe liczbom danego zbioru. Przedziałem liczbowym nazywa się zbiór wszystkich liczb, zawartych między dwiema liczbami  $a$  i  $b$  /przyciem włączamy liczby  $a$  i  $b$  /; oznaczamy go przez  $(a, b)$ . Liczba  $x$  nale-

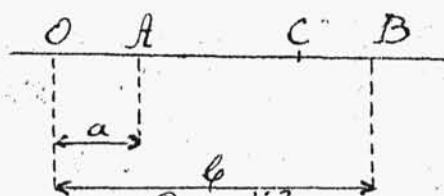


Rys. 42.

ży do przedziału, jeżeli geometrycznie odpowiada przedziałowi odcinek  $AB$ .

Otoczeniem nazywa się przedział, zawierający daną liczbę jako wewnętrzną; sama liczba do otoczenia nie należy.

W interpretacji geometrycznej jest to odcinek wewnątrz którego leży punkt dany.



Punktem skupienia danego zbioru nazywa się liczba, w której dowolnie

małym otoczeniu jest nieskończenie wiele liczb danego zbioru.

Określenia punktu skupienia zbioru punktów otrzymamy, zamieniając w powyższym określeniu słowo "liczba" słowem "punkt".

Np: ciąg

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

posiada dwa punkty skupienia  $0$  i  $1$ . Istotnie, w de-

wolnie małym otoczeniu punktu 0 jest nieskończenie wiele wyrazów ciągu, wyrazów o wskaźniku nieparzystym.

Niech np. otoczenie  $AB$  równa się  $\frac{2}{100} (AO = \frac{1}{100}, OB = \frac{1}{100})$

W tym otoczeniu znajdują się wyrazy:

$$\frac{1}{100}, \frac{1}{102}, \frac{1}{104}, \dots$$



Rys. 44

Moglibyśmy  $AB$  zmniejszyć; pozostałoby w nim nadal nieskończenie wiele pun-

któw zbioru. Drugim punktem skupienia jest jedność. W rzeczy samej, różnica między jednością i wyrazami o wskaźnikach parzystych równa się odwrotności liczb całkowitych dodatnich.

Niech będzie np. otoczenie  $CD = \frac{2}{100}$ ; znajdują się w nim liczby:

$$\frac{100}{101}, \frac{102}{101}, \frac{104}{101}, \dots$$

Widzimy więc z tego przykładu, że ciąg może mieć kilka punktów skupienia. Widzimy także, że punkt skupienia może do zbioru /dla którego jest punktem skupienia/ nie należeć. Ciąg może mieć nieskończenie wiele punktów skupienia, np. ciąg utworzony ze wszystkich punktów wymiernych przedziału. /Jakie są punkty skupienia takiego ciągu?/

Uchwycimy najlepiej różnicę między granicą, a punktem skupienia przez porównanie jednego i drugiego określenia; jeżeli punkt ma być punktem skupienia, wystarczy, aby w jego dowolnie małym otoczeniu było nieskończenie wiele wyrazów ciągu; gdy zaś punkt ma być granicą, to w jego dowolnie małym otoczeniu muszą się znajdować "prawie" wszystkie wyrazy ciągu. Pojęcie punktu skupienia zawiera jako przypadek szczególny pojęcie granicy: granica jest zawsze punktem skupienia. Punkt skupienia zaś może nie być granicą.

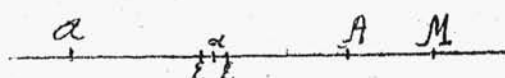
TWIERDZENIE WEIERSTRASSA. Ciąg ograniczony od góry i od dołu /zbiór punktów zawartych na odcinku skończonym/ o ile składa się z nieskończonej liczby elementów liczb, albo punktów/, posiada przynajmniej jeden punkt skupienia.

Utwórzmy przekrój w dziedzinie liczb rzeczywistych. Każdą liczbę  $a$  zaliczamy do klasy niższej jeżeli jest nieskończenie wiele liczb naszego zbioru od niej większych, każdą zaś liczbę  $\lambda$ , dla której ten warunek nie jest spełniony, zaliczamy do klasy wyższej. Prze-

krój jest więc określony: obie klasy stanowią zbiór wszystkich liczb rzeczywistych;  $a \in A$ , żadna klasa nie jest pusta, gdyż istnieją liczby  $m$  i  $M$ , że przy wielkim  $n$

$$m < u_n < M$$

Nazwijmy przez  $\alpha$  liczbę wyznaczoną przez ten przekrój. Ta liczba właśnie jest punktem skupienia. Niech  $\varepsilon$  oznacza dowolnie całą liczbę / odcinek/



*Rys. 45*

W otoczeniu liczby  $\alpha$   
 $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$

jest oczywiście nieskończenie wiele wyrazów zbioru,

a to dlatego, że są w nim liczby klasy  $a$  i liczby klasy  $A$ ; zgodnie z określeniem tych klas między dowolną liczbą klasy  $a$  i dowolną liczbą klasy  $A$  musi się zawierać nieskończenie wiele liczb danego zbioru. Twierdzenie więc jest słuszne.

**TWIERDZENIE.** Jeżeli ciąg posiada granicę, to jest ograniczony od góry i od dołu, przyczem posiada tylko jeden punkt skupienia.

Niech będzie dany ciąg

$$u_1, u_2, u_3, \dots \dots \dots u_n \rightarrow a$$

Przypuśćmy, że żaden wyraz jego nie powtarza się nieskończoną ilość razy. Punkt  $A$  jest granicą. To znaczy, że wszystkie wyrazy ciągu, począwszy od wskaź-

nika  $n_0$  są zawarte w przedziale  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$   
a więc zewnątrz tego przedziału jest tylko skończona



Rys 46.

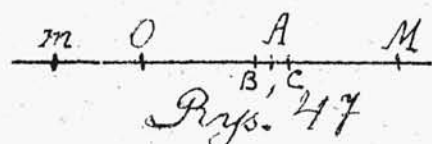
liczba wyrazów. Musi więc istnieć punkt  $m$  leżący ze wszystkich punktów zbioru najbardziej na lewo, tak sa-

mo istnieje punkt  $M$  znajdujący się ze wszystkich punktów zbioru najbardziej na prawo. Wszystkie zatem punkty są zawarte w przedziale  $(m, M)$ . Punkt  $A$  jest granicą, więc w jego otoczeniu są "prawie wszystkie" punkty zbioru. Poza tem otoczeniem  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  jest tylko skończona liczba punktów zbioru, a więc wewnątrz przedziału nie może być  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$  punktu skupienia. Ponieważ  $\varepsilon$  jest dowolnie małe, więc między  $A - \varepsilon$  i  $A + \varepsilon$  nie może być nowego punktu skupienia.

Jeśli jakikolwiek wyraz ciągu zbieżnego powtarza się nieskończoną liczbę razy, to on właśnie jest granicą  $= a$ . Zewnątrz przedziału  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  jest tylko skończona ilość wyrazów, żaden więc inny wyraz nie może nieskończoną liczbę razy się powtarzać. Dalszy ciąg rozumowania niczem się nie różni od poprzedniego i prowadzi do tego samego wniosku.

TWIERDZENIE ODWROTNE. Jeżeli pewien ciąg lub odpowiadający mu zbiór punktów posiada tylko jeden punkt skupienia i jest ograniczony od dołu i od góry, to posiada granicę.

Niech  $U_n$  , będzie zawarte w przedziale  $(m, M)$  i niech  $A$  będzie punktem skupienia. Rozpatrzmy trzy



przedziały:  $/m, B/$

$/B, C/$  i  $/C, M/$ , gdzie

$A$  jest środkiem odcinka

$BC$  . W przedziałach  $/m, B/$  i  $/C, M/$  jest tylko skończona liczba elementów zbioru "prawie wszystkie" zaś muszą się znajdować w przedziale  $/B, C/$ . Istnieje zatem taki wskaźnik  $N_0$  , począwszy od którego, wszystkie wyrazy należą do przedziału  $/B, C/$ .

Ponieważ rozważanie to jest słuszne dla dowolnie małego odcinka  $AC$  więc w dowolnie małym otoczeniu punktu  $A$  znajdują się "prawie" wszystkie punkty ciągu i ciąg posiada granicę.

OGÓLNE KRYTERJUM ZBIĘŻNOŚCI, Twierdzenie I.

Jeżeli ciąg posiada granicę to różnica pomiędzy jego wyrazami, począwszy od pewnego miejsca, jest dowolnie małą.

Przypuśćmy więc, że

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

Jeżeli wybierzemy dowolną liczbę  $\varepsilon > 0$  to istnieje takie  $n_0$ , że gdy  $n$  i  $m$  będą od  $n_0$  większe, to

$$|u_n - u_m| < \varepsilon$$

Taką jest treść tego twierdzenia.

W istocie istnieje taka liczba  $n_0$  że dla  $n > n_0$  zachodzi nierówność

$$|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

i dla

$$|u_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dodając te dwie nierówności stronami, znajdziemy,

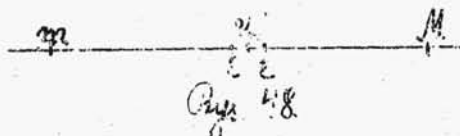
$$\text{z} \quad |u_n - u_m| = |(u_n - a) + (a - u_m)| \leq |u_n - a| + |u_m - a| < \varepsilon$$

Twierdzenie odwrotne, słusznem jest również twierdzenie odwrotne: jeżeli w ciągu różnica pomiędzy wyrazami począwszy od pewnego miejsca stać się może dowolnie małą



to ciąg jest ograniczony i posiada jeden punkt skupienia, a zatem posiada i granicę. Utwórzmy przedział

$$(u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon)$$



Poza tym przedziałem może się znajdować tylko skończona liczba punktów. Istnieje

więc punkt  $m$  położony najbardziej na lewo i punkt  $M$  leżący najbardziej na prawo. Ciąg jest więc ograniczony. Ale przedział  $(u_n - \varepsilon, u_n + \varepsilon) = 2\varepsilon$ , w którym zawiera się nieskończenie wiele wyrazów zbioru, jest dowolnie mały. Musi zatem istnieć w nim jeden, ale tylko jeden punkt skupienia.

Przejdźmy teraz do badania funkcji, dla których zmienna  $x$  może przybierać wszystkie wartości danego przedziału, stanowiące continuum. Niech więc będzie dana funkcja  $f(x)$ , określona w przedziale, danym przez warunki

$$a \leq x \leq b$$

Zbiór liczb rzeczywistych tego przedziału jest nieprzeliczalny, nie można go ponu-

umerować tak, aby się utworzył ciąg. Gęstość i zamkniętość zbioru nie daje się pogodzić z jego przeliczalnością. Przypuśćmy bowiem, że udało się nam ten zbiór ponumerować. Ustawmy wartość w ciąg następujący:

$$(1) \quad u_1, u_2, u_3, \dots$$

Rozpatrywany przez nas zbiór liczb jest równej mocy ze zbiorem liczb rzeczywistych, zawartych pomiędzy 0 i 1.

Można te zbiory sobie podporządkować np. zapomocą wzoru

$$x = a + (b-a) \cdot t$$

gdzie

$$a \leq t \leq 1$$

Dowiedziemy, że zbiór liczb rzeczywistych, zawartych między 0 i 1 jest nieprzeliczalny. W tym celu wybierzmy w naszym ciągu pierwszy z kolei wyraz zbioru, leżący pomiędzy  $u_1$  i 1 /na odcinku  $[0, 1]$  i oznaczmy go przez  $u_{n_2}$ . Następnie niech  $u_{n_3}$  oznacza pierwszy wyraz ciągu /I/ na przedziale pomiędzy  $u_1$  i  $u_{n_2}$ ; niech  $u_{n_4}$  będzie pierwszym pomiędzy  $u_{n_2}$  i  $u_{n_3}$  i t.d. W przedziale między  $u_{n_{i-1}}$  i  $u_{n_i}$  wszystkie wyrazy mają wskaźnik  $n > n_{i-1}$ .

Otrzymamy szereg przedziałów, leżących całkowicie jeden wewnątrz drugiego.

$$\frac{0 \quad u_1 \quad u_{n_2}}{\quad \quad \quad} \quad \frac{u_{n_4} \quad u_{n_3} \quad 1}{\quad \quad \quad}$$

Rys. 49

Lewe końce tych przedziałów tworzą ciąg rosnący:

$$(1) u_1 < u_{n_3} < u_{n_5} < \dots$$

a prawe ciąg malejący.

$$(2) u_{n_2} > u_{n_4} > u_{n_6} > \dots$$

Oba ciągi posiadają granicę  $u$  która nie jest wyrazem żadnego z ciągów (1) ani (2); proces tworzenia się ciągów jest nieskończony. Granica ta jest wspólna. Gdyby bowiem pierwszy ciąg miał granicę  $u_l$  a drugi granicę  $u_p$  to między punktami  $u_l$  i  $u_p$  nie byłoby ani jednego wyrazu naszego ciągu (1) co jest niemożliwe gdyż ciąg (1) ma obejmować wszystkie punkty przedziału  $(0, 1)$ . Ta granica  $u$  jest zawarta między 0 i 1,

musi więc jako liczba danego zbioru posiadać pewien wskaźnik  $p$ . Ze sposobu tworzenia ciągu  $u_1, u_2, u_3, \dots$  wynika własność następująca:

Jeśli  $u$  jest zawarty między  $u_1$  i  $u_{n_2}$  w takim razie musi być  $i \geq n_3$  tak samo jeśli  $u_i$  jest zawarty między  $u_{n_3}$  i  $u_{n_2}$  to wskaźnik  $j \geq n_4$ . Wogóle jeśli wyraz  $u_s$  jest zawarty między  $u_{n_p}$  i  $u_{n_{p+1}}$  to wskaźnik  $s \geq n_p + 2$ .

Wskaźniki  $1, n_3, n_5, n_7, \dots$  tworzą ciąg rosnący nieograniczenie, istnieje zatem wskaźnik  $n_i > p$ . Doszliśmy więc do sprzeczności: wskaźniki wyrazów wewnątrz przedziału  $u_{n_i}, u_{n_i+1}$  mają, jak widzieliśmy, wskaźnik większy lub równy  $n_i + 2$ , a więc wskaźnik  $p$

jako odpowiadający wyrazowi zawartemu wewnątrz takiego podziału jest  $> m+2$ , co jest niemożliwe wobec tego, iż  $p < n$ . Doszliśmy więc do sprzeczności. Ostatecznie: Zbiór wszystkich wartości liczbowych między 0 i 1, a więc w każdym innym przedziale jest nieprzeliczalny.

GRANICA FUNKCJI. Przypuśćmy, że funkcja  $f(x)$  jest określona dla wszystkich wartości  $x$  w przedziale  $(a, b)$ . Pod wyrażeniem " $f(x)$  posiada pewną własność w otoczeniu punktu  $C$ " należy rozumieć, że istnieje pewne "otoczenie punktu  $C$ ", wewnątrz którego wszystkie wartości  $f(x)$  daną własność posiadają t.j., że istnieje taki przedział  $(d, g)$  zawierający  $C$  że dla wszystkich wartości  $x$  zewnątrz tego przedziału prócz, być może, samej wartości  $C$ ,  $f(x)$  posiada daną własność. Tak np. funkcja  $f(x) = 1 - x^2$  w otoczeniu punktu zerowego jest mniejsza od jedności albowiem istnieje otoczenie np.  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ , w którym warunek powyższy zostaje spełniony.

Jeżeli funkcja  $f(x)$  w otoczeniu punktu  $C$  zbliża się do wartości stałej  $g$  tyle i ile wymaga dowolnie mała mia-

