

terą A , zaś punkty, które odpowiadają ciągowi /2/ literą B . /odpowiednimi wskaźnikami/. Punkty A i B nie przeplatają się ze sobą, jednak odległość między nimi może być dowolnie małą. A więc granicą między punktami A i B może być tylko jeden punkt, mianowicie odpowiadający liczbie α /rys.17/.

W ten sposób wykazaliśmy, że zachodzi odpowiedniość między teorią Cantora i teorią Dedekinda.

Teorię Cantora możnaby przeprowadzić niezależnie od teorii Dedekinda, jako całość wystarczającą samą przez się. Trzeba byłoby w takim razie za pomocą ciągów określić równość lub nierówność liczb, zdefiniowanych przez te ciągi, a także dodawanie i mnożenie w ten sposób określonych liczb. To wszystko można znaleźć np. w "Teorii liczb niewymiernych" prof. Sierpińskiego, dokąd odsyłamy pragnących głębiej poznać teorię Cantora.

POJĘCIE FUNKCJI.

Pojęcie funkcji jest to pojęcie odpowiedniości pomiędzy dwoma zbiorami liczb. Przypuśćmy, że x i y są liczbami dwu różnych zbiorów. Gdy liczba x zmieniać się może dowolnie, przyczym poszczególnym jej wartościom odpowiadają określone wartości zmiennej y , po-

wiadamy, że liczba y jest funkcją zmiennej niezależnej x . Odpowiednie wartości y mogą istnieć dla wszystkich lub tylko niektórych wartości x . Gdy dla każdej wartości x istnieje tylko jedna wartość y , wtedy y nazywa się funkcją jednowartościową; gdy zaś każdemu x odpowiadają 2, 3... lub wiele wartości y , to mówimy, że jest funkcją dwu-, trój-..., wielewartościową zmiennej x . Zależność pomiędzy zmiennymi podana być może w sposób rozmaity. Często określa ją wzór algebraiczny, np.

$$y = \frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} ; \quad y = x ; \quad y^2 = x$$

Równie dobrze może być podany związek zapomocą konstrukcji geometrycznej. Niech będzie dany np. odcinek $AB=a$ i prosta prostopadła do niego w punkcie A . Odmierzmy na tej prostej dowolny odcinek $AC=x$, połączmy punkt C z B i z punktu A spuścmy na BC prostopadłą $AD=y$. W ten sposób zależność między y i x jest określona. Gdy x od zera wzrastać będzie do nieskończoności, y dążyć będzie od 0 do a . Tę samą zależność można wyrazić zapomocą wzoru.

Mianowicie

$$ax = BC \cdot y$$

$$ax = y \sqrt{a^2 + x^2}$$

stąd

$$y = \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{a^2}{x^2} + 1}}$$

I z tego wzoru widać, że gdy zmienna x od 0 rośnie do nieskończoności /co oznaczamy symbolicznie: $0 \rightarrow \infty$

to y od zera zdąża do a / $0 \rightarrow a$ /

Rozważmy teraz inny przykład.

Niech będzie dane koło i dwie styczne do niego, poprowadzone przez końce średnicy AB . Odmierzmy na jednej stycznej $AC = x$ i z punktu C poprowadźmy trzecią styczną do koła. Odcinek ona na stycznej, przechodzącej przez punkt B , odcinek $BD = y$. W ten sposób zależność między y i x jest ustalona. Można ją wyrazić równie

nież za pomocą wzoru. Z podobieństwa trójkątów COM i MOD wynika:

$$CM : OM = OM : MD$$

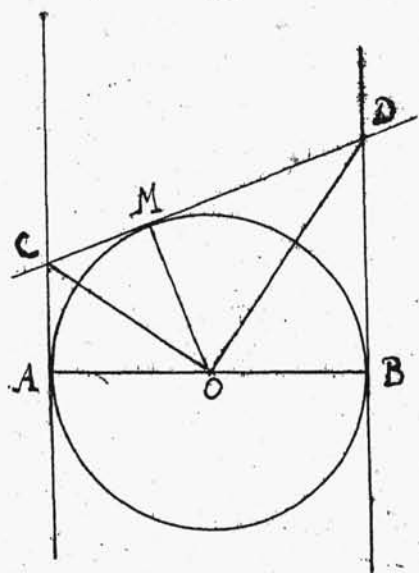
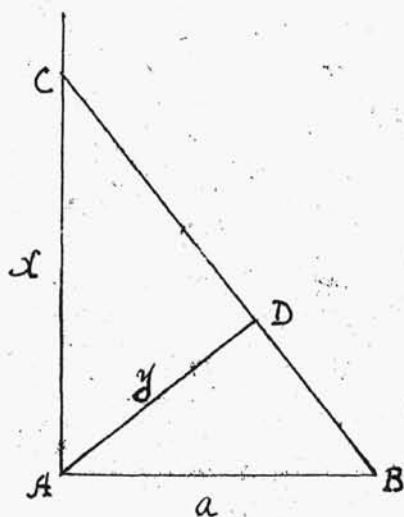
$$OM^2 = CM \cdot MD$$

Podstawiając zamiast OM , CM i MD odpowiednio R , x i y znajdziemy:

$$R^2 = xy$$

A stąd

$$y = \frac{R^2}{x}$$



Klasyfikacja funkcji. Oprócz wyżej podanych można znaleźć jeszcze nieskończenie wiele przykładów zależności funkcjonalnej. Aby zaznaczyć, że liczba y jest funkcją zmiennej x , piszemy: $y=f(x)$; $y=\varphi(x)$ i t.p. W zależności od tego, jakiego rodzaju związek zachodzi między zmiennymi, można funkcje rozklasyfikować.

Do I klasy zaliczymy takie, jak $y=x$, $y=x^2$ wogóle $y=x^n$. Wykreślając te funkcje, zauważymy, że kształt ich zależy od tego, czy wykładnik n jest liczbą parzystą, czy też nieparzystą /patrz rys. 6 i 8/. W pierwszym wypadku krzywa przechodzi przez ćwiartki I i II, w drugim zaś przez I i III. Wszystkie krzywe wyrażone równaniami $y=x^n$, gdzie $n=2k$, przechodzą przez te same 3 punkty, a mianowicie: $(0,0)$, $(1,1)$ oraz $(-1,1)$. Im wykładnik n jest większy, tym krzywa jest jakby bardziej spłaszczoną i kształt jej bardziej zbliżony do kształtu, zaznaczonego na rys. 20. W wypadku, gdy $n=2k+1$, krzywa zamiast przez punkt $(-1,1)$, przechodzi przez $(-1,-1)$. Ze wzrostem wykładnika n część krzywej w pobliżu początku układu coraz bardziej się zbliża do osi x i zdąża do kształtu, zaznaczonego na rys. 21. Zauważyć jednak należy, że dla żadnego n krzywa kształtów granicznych osiągnąć nie może.

W podobny sposób możemy wykreślać funkcje więcej

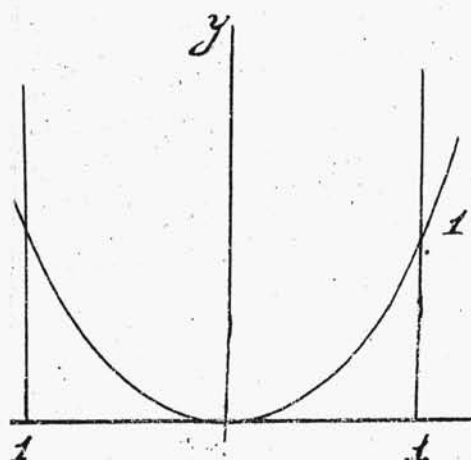
omplikowane, np.:

$$y = x^4 + 3x^5 + x^3 + 10.$$

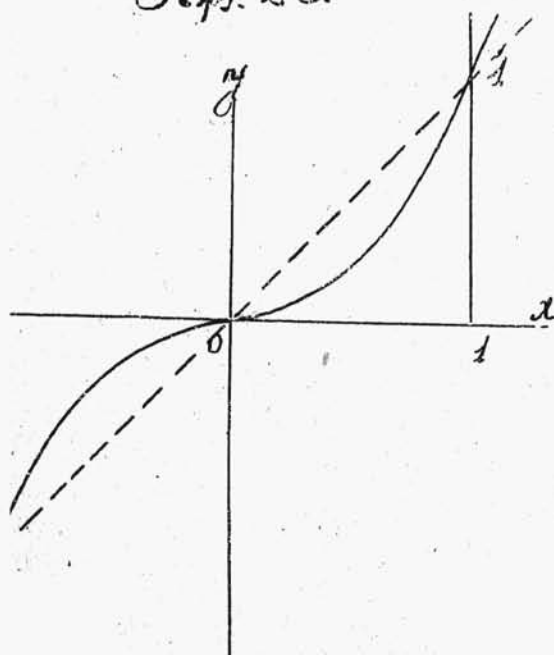
Wszystkie te funkcje są wielomianami względem x .

ólny i kształt jest następujący:

$$I = P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$



Rys. 20.



Rys. 21.

Funkcje te nazywają się też funkcjami wymiernymi całkowitemi n stopnia.

One właśnie tworzą 1 klasę funkcji. Następną klasę stanowią t. zw. funkcje wymierne.

Dadzą się one przedstawić w postaci ilorazu dwóch wielomianów:

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Do tej klasy zaliczamy wszystkie funkcje, które są wyrażone za pomocą x przez dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie w skończonej liczbie. W wypadku szczególnym, gdy mianownik $Q(x)$ jest liczbą stałą, y staje się

wielomianem; tak więc I klasa funkcji zawiera się jako szczególny wypadek w klasie II.

Zwykle zakładamy, że $P(x)$ i $Q(x)$ nie posiadają wspólnego czynnika. Gdyby bowiem takowy istniał, moglibyśmy przez niego funkcję skrócić. Należy jednak zauważyć, że usuwanie wspólnych czynników zmienia nieraz samą funkcję. Weźmy np. prostą funkcję $y = \frac{x}{x}$. Można ją zastąpić przez $\frac{1}{1} = 1$ tylko wtedy, gdy x jest różne od zera. Kiedy zaś $x = 0$, funkcja przybiera kształt $\frac{0}{0}$ i traci swoje znaczenie; różni się więc od funkcji $\frac{1}{1}$, która ma zawsze wartość określoną.

To samo zdarzyć się może przy każdym przekształceniu funkcji. Niech będzie np. funkcja

$$Y = \left(\frac{1}{x-2} + x+2 \right) : \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

Według reguł algebraicznych możemy ją przedstawić w postaci:

$$Y = \frac{(1+x^2-4) \cdot x}{(x-2)(x+1)} = \frac{(x^2-3) \cdot x}{(x-2)(x+1)}$$

Tu trzeba zauważyć, że funkcje:

$$(1) \quad Y = \left(\frac{1}{x-2} + x+2 \right) : \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad \text{oraz}$$

$$(2) \quad Y = \frac{(x^2-3) \cdot x}{(x-2)(x+1)}$$

nie są identyczne. Podczas gdy funkcja (1) nie posiada określonej wartości przy $x = 2, 0, -1$, funkcja (2) jest nieokreślona tylko przy $x = 2, -1$; gdy $x = 0$, funkcja (2)

ma określoną wartość 0.

Widzimy z tych przykładów, że przy pewnych wartościach x funkcja może nie być określoną. Zdarza się to wtedy, gdy mianownik funkcji równa się zero.

Określając funkcje wymierne nie zakładamy, że współczynniki są liczbami wymiernymi. Do wymiernych zaliczymy np. funkcje

$$y = \frac{x\sqrt{2}-x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}-1}; \quad y = \frac{x^2+x+\sqrt{7}}{x\sqrt{4}+\pi}$$

Klasę III funkcji stanowią t.zw. funkcje algebraiczne wyrażne. Powstają one ze zmiennej niezależnej x za pomocą skończonej liczby wszystkich działań algebraicznych, nie wykluczając pierwiastkowania i potęgowania o wykładnikach wymiernych. Wykładniki zaś niewymierne są wykluczone. Takimi są funkcje:

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}; \quad y = \sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{x}};$$

$$y = \frac{\sqrt{1-x^5} + \sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x+\sqrt{-x}}}$$

jak również $y = x^{\frac{m}{n}}$, gdzie m i n są to liczby całkowite. Funkcje te nazywają się wyrażnemi, gdyż y dane jest bezpośrednio w zależności od x . Podczas gdy funkcje wymierne były określone zawsze, z wyjątkiem skończonej liczby wartości x , funkcja algebraiczna wyrażna może być nieokreśloną dla nieskończenie wielu wartości zmien-

nej niezależnej, np. zawartych w pewnym przedziale większych lub mniejszych od jakiejś liczby i t.d. Dla każdej wartości x , przy której funkcja jest określona, posiada ona kilka wartości /zawsze ilość skończoną/, czyli jest wielowartościową.

Do klasy IV zaliczamy wszystkie funkcje algebraiczne. Ich kształt ogólny jest następujący:

$$(1) \quad y^n + R_1(x)y^{n-1} + R_2(x)y^{n-2} + \dots + R_{n-1}(x)y + R_n(x) = 0$$

Ta kategoria funkcji jest znowu obszerniejszą od poprzedniej. W wypadku, gdy $n=2$, funkcja nazywa się kwadratową i ma postać:

$$y^2 + R_1(x)y + R_2(x) = 0$$

można ją napisać w postaci funkcji wyrażnej:

$$y = \frac{-R_1(x) \pm \sqrt{R_1^2(x) - 4R_2(x)}}{2}$$

Gdy $n > 4$ podobne przekształcenie staje się niemożliwym, a więc postać (1) jest od ostatniej postaci ogólniejszą. Zachodzi jeszcze pytanie, czy każdą funkcję algebraiczną wyrażną da się sprowadzić do tej postaci ogólnej. Należy odpowiedzieć na to pytanie twierdząco. Nie dając ogólnego dowodu, pokażemy to na kilku przykładach.

Niech będzie funkcja:

$$(1) \quad y = \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}$$

Oznaczmy składnik pierwszy przez u , drugi przez v .

Będziemy mogli napisać:

$$(2) \quad y = u + v$$

oraz

$$u^3 = 1+x \quad i \quad v^3 = 1-x$$

Podnieśmy równanie (2) do sześciu:

$$y^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = 2 + 3uv \cdot y$$

stąd

$$3uvy = y^3 - 2$$

Podnosząc ostatnie równanie znów do sześciu, znajdziemy:

$$27u^3v^3y^3 = (y^3 - 2)^3$$

lecz

$$u^3v^3 = (1+x)(1-x) = 1-x^2$$

więc

$$27y^3(1-x^2) = (y^3 - 2)^3$$

Otrzymaliśmy zatem równanie kształtu żadanego.

Przeróbmy jeszcze przykład następujący. Niech:

$$y = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

Jeżeli oznaczymy $1+x$ przez u^2 , a $1-x$ przez v^2 , to

$$y = \frac{u+v}{u-v} = \frac{(u-v)^2}{u^2-v^2} = \frac{u^2+v^2-2uv}{2x} = \frac{2+2uv}{2x} = \frac{1+uv}{x}$$

Mnożąc obie strony równania przez x otrzymamy

$$\begin{aligned}1 + ur &= xy \\ ur &= xy - 1\end{aligned}$$

więc

$$u^2 r^2 = (xy - 1)^2$$

Zauważymy jednak, że

$$u^2 r^2 = 1 - x^2$$

A więc

$$1 - x^2 = (xy - 1)^2$$

Po rozwinięciu prawej strony równania i przeniesieniu wyrazów na lewą stronę otrzymamy:

$$x^2 y^2 - 2xy + x^2 = 0$$

Stąd przez podzielenie przez x^2 , otrzymamy żądany kształt równania

$$y^2 - \frac{2y}{x} + 1 = 0$$

W podobny sposób da się sprowadzić każdą funkcję algebraiczną wyrażoną do ogólnej postaci funkcji algebraicznej, której określenie powtórzymy poniżej, w celu uniknięcia nieporozumień:

Funkcją algebraiczną zmiennej x jest każdy pierwiastek równania n -tego stopnia, którego współczynniki są funkcjami wymiernymi zmiennej x . Ta klasa funkcji stanowi przedmiot algebry wyższej.

Każdą funkcję analityczną zmiennej x , która ni

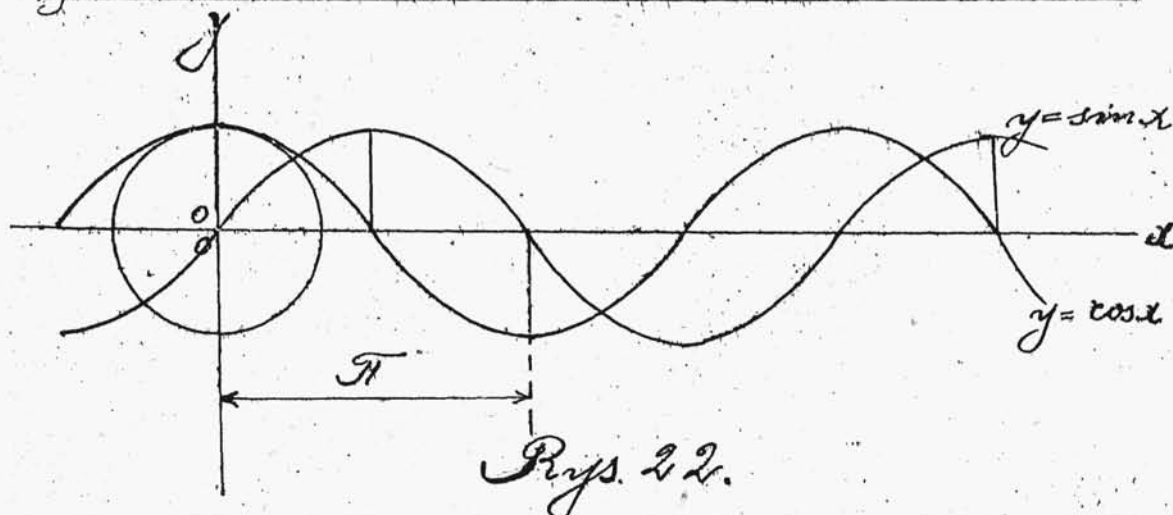
jest funkcją algebraiczną, nazywamy funkcją przestępną i zaliczamy do V klasy funkcji. Ta klasa, określona w sposób negatywny, zawiera nieskończoną liczbę funkcji, z których najważniejszymi są funkcje trygonometryczne, odwrotne względem trygonometrycznych czyli kołowe, logarytmiczne i wykładnicze. Zajmiemy się teraz wykreśleniem tych funkcji.

Funkcje trygonometryczne. Są to funkcje, z którymi ma do czynienia trygonometria elementarna. Powszechną własnością wszystkich funkcji trygonometrycznych jest ich okresowość. Zaczniemy od funkcji

$$y = \sin x$$

Wykreślmy ją, posługując się poniższą tabelką:

x	0	π	2π	3π	...	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$...
y	0	0	0	0	...	1	-1	1	...



Jak wiadomo $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$; gdy więc przesunie-

my krzywą o wielokrotność 2π , to przystanie ona do samej siebie.

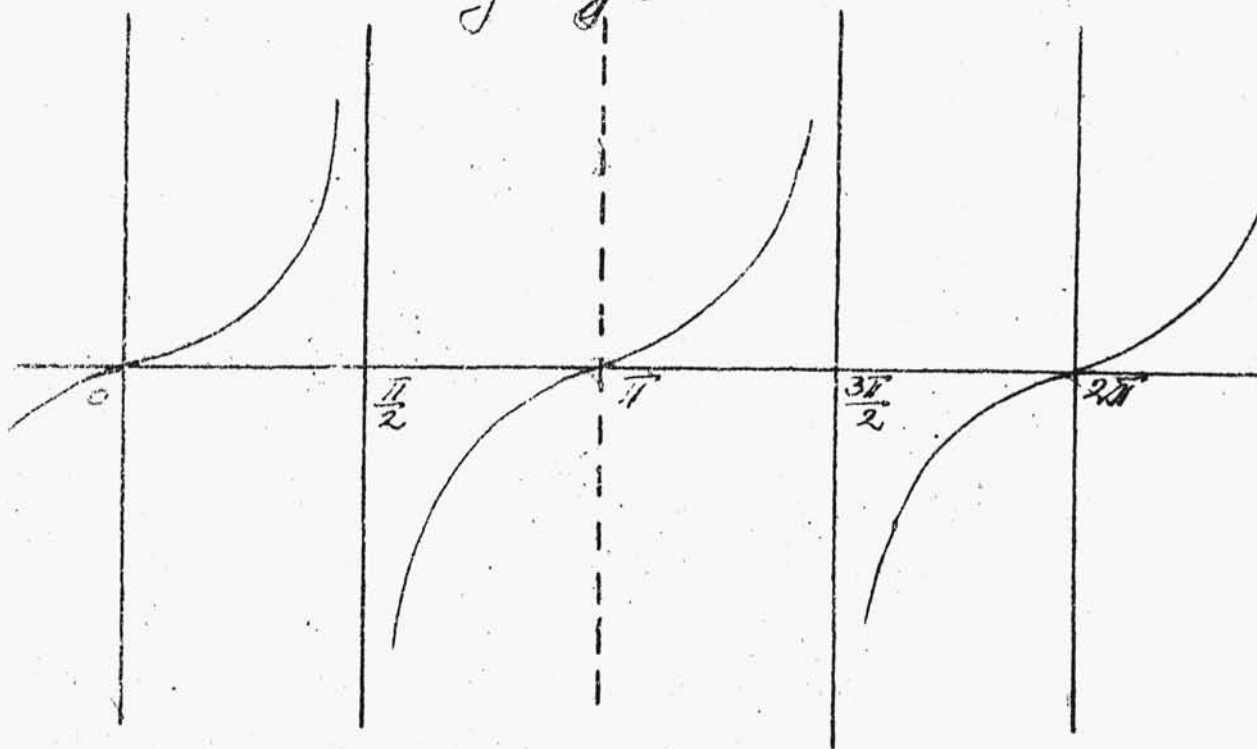
Mając wykres tej funkcji, możemy otrzymać z łatwością wykres funkcji

$$y = \cos x$$

Wiemy zianowicie, że $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$; wystarczy więc przesunąć sinusoidę wzdłuż osi Ox w kierunku ujemnym o $\frac{\pi}{2}$, aby otrzymać cosinusoidę.

Nieco inaczej wygląda tangensoida, t.j. wykres funkcji

$$y = \operatorname{tg} x$$



rys.23.

Krzywa składa się z szeregu oddzielnych gałęzi, zbl

śających się asymptotycznie do prostych równoległych do osi y i leżących od niej w odległości $\frac{(2k+1)\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1$).

§ 2. Krzywa przecina oś x w punktach, mających odcięte $k\pi$, gdzie $k=0, 1, 2, \dots$ oraz $k=-1, -2, -3, \dots$. Tak więc, pomiędzy dwiema równoległymi, położonymi w odległości $\frac{\pi}{2}$ od siebie, krzywa rośnie od 0 do $+\infty$ albo też od $-\infty$ do 0. Dla wartości odciętych $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $k=0, \pm 1, \pm 2$ są przerwy w ciągłości funkcji. Jednakże i ta funkcja jest okresową. Przy przesunięciu o π w kierunku osi x każda poprzednia gałąź krzywej przystanie do następnej.

Funkcje odwrotne względem trygonometrycznych, czyli funkcje kołowe. Niech będzie dana funkcja

$$y = \arctg x$$

Jak wiadomo, można tę samą zależność napisać w postaci

$$\operatorname{tg} y = x$$

Aby otrzymać wykres, podstawiamy $x = y'$ i $y = x'$ i budujemy krzywą $y' = \operatorname{tg} x'$ (rys. 23). Zastępując wreszcie oś x' przez oś y i oś y' przez x , otrzymamy wykres żądany. Na tym wykresie uwidacznia się wielowartościowość funkcji. Chcąc znaleźć rzędną danego punktu, mając jego odciętą, prowadzimy przez punkt dany równoległą do osi y . Z rysunku widać, że ta prosta może mieć nieskończenie wiele punktów przecięcia z krzywą. Wszystkie