

Wynika stąd wniosek następujący. Jeśli pochodna  $f'(x)$  jest w przedziale  $(a, b)$  dodatnią, zaś w punkcie krańcowym z lewej strony /dla mniejszej wartości odciętej/ funkcja  $f(x)$  jest również dodatnia lub równa zeru, to w całym przedziale  $(a, b)$  funkcja  $f(x)$  jest dodatnia. Jeżeli zaś w przedziale  $(a, b)$  pochodna  $f'(x)$  jest ujemna i jeżeli  $f(a) \leq 0$  /zakładamy, że  $a < b$ /, to w całym przedziale  $(a, b)$  funkcja  $f(x)$  jest ujemna.

MAXIMUM I MINIMUM. Niech będzie dana funkcja określona w przedziale  $(a, b)$ . O pewnej wartości  $\xi$  w tym przedziale powiadamy że stanowi ona **m a x i - m u m** ; jeżeli istnieje takie otoczenie punktu  $\xi$  , że wszystkie rzędne w tym otoczeniu są mniejsze od rzędnej w tym punkcie, czyli jeżeli dla

$$\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$$

zachodzi nierówność

$$f(x) < f(\xi)$$

Jeżeli zaś istnieje takie otoczenie punktu  $\xi$  , że wszystkie rzędne w tym otoczeniu są mniejsze od rzędnych w punkcie  $\xi$  , czyli gdy nierówność

$$\xi - \varepsilon < x < \xi + \varepsilon$$

pociąga za sobą nierówność

$$f(x) > f(\xi)$$

powiadamy, że funkcja osiąga **m i n i m u m** w punkcie  $\xi$ .

TWIERDZENIE. Jeżeli funkcja posiada pochodną i osiąga w danym punkcie maximum lub minimum, to pochodna w tym punkcie jest równa zeru.

Załóżmy, że w punkcie  $\xi$  funkcja osiąga maximum i że pochodna  $f'(\xi)$  istnieje. Możliwe są tylko trzy przypadki: albo  $f'(\xi) > 0$ , albo  $f'(\xi) < 0$  albo wreszcie  $f'(\xi) = 0$ . Pierwszy z nich miejsca mieć nie może, albowiem musiałby istnieć przedział  $(\xi, \xi + \varepsilon)$  w którym byłoby  $f(x) > f(\xi)$ , co przeczy temu, że  $f(\xi)$  stanowi maximum. Podobnie niemożliwy jest przypadek drugi: istniałby przedział  $(\xi - \varepsilon, \xi)$ , w którym  $f(x) > f(\xi)$ , co znowu jest niemożliwe. Pozostaje więc tylko trzeci przypadek, mianowicie

$$f'(\xi) = 0$$

Tego samego można dowieść, gdy funkcja osiąga w punkcie  $\xi$  minimum.

Zachodzi pytanie, czy słuszne jest twierdzenie odwrotne: czy zawsze, gdy pochodna staje się zerem, funkcja osiąga maximum lub minimum. Prosty przykład wykazuje, że tak nie jest. Niech będzie dana funkcja

$$f(x) = x^3$$

i niech  $\xi = 0$  /rys. 8/. Jak wiemy  $f'(x) = 3x^2$ ; po-

nieważ  $f(\xi) = f(0) = 0$ , więc i  $f'(\xi) = 0$ . Jednakże w punkcie początkowym 0 funkcja  $f(x)$  nie osiąga ani maximum ani minimum, gdyż  $f(x) > 0$ , jeśli tylko  $x > 0$ , oraz  $f(x) < 0$ , gdy tylko  $x < 0$ . A więc równość

$$f'(\xi) = 0$$

jest warunkiem koniecznym, ale nie dostatecznym, istnienia w punkcie  $\xi$  maximum lub minimum.

### POCHODNE RZĘDÓW WYŻSZYCH. Niech będzie dana

funkcja  $y = f(x)$ . Wyrażenie

$$y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nazywamy pierwszą pochodną lub pochodną pierwszego rzędu funkcji  $f(x)$ .

Ta pochodna jest samą funkcją zmiennej niezależnej  $x$ , można więc znaleźć pochodną tej pierwszej pochodnej. Te

nową pochodną nazywamy drugą pochodną lub <sup>pochodną</sup> drugiego rzędu funkcji  $f(x)$ . Oznaczamy ją symbolem

$$y'' = f''(x) = [f'(x)]'$$

Różniczkując znowu drugą pochodną, znajdziemy trzecią pochodną /pochodną rzędu trzeciego/ funkcji  $f(x)$ , którą

oznaczamy przez  $f^{(n)}(x)$ . W ten sposób możemy dojść do określenia  $n$ -ej pochodnej  $n$ -go rzędu funkcji  $f(x)$ , którą się oznacza przez  $f^{(n)}(x)$ .

Przykład 1. Niech będzie dana funkcja

$$y = x^n$$

W takim razie, jak wiemy

$$y' = nx^{n-1}$$

A więc

$$y'' = (nx^{n-1})' = n(n-1)x^{n-2}$$

Przykład 2. Niech teraz będzie dana funkcja

$$y = \sin x$$

Dla tej funkcji mamy

$$y' = \cos x; y'' = -\sin x; y''' = -\cos x; y^{(4)} = \sin x$$

Widzimy, że tutaj pochodna czwartego rzędu jest równa funkcji pierwotnej. A więc pochodna rzędu piątego będzie równa pochodnej rzędu pierwszego, pochodna rzędu szóstego będzie równa pochodnej rzędu drugiego i t.d. W górze cztery wyżej napisane pochodne będą się kolejno powtarzać.

Pochodne rzędu drugiego i trzeciego / w ogólności / rozstrzygnąć, czy funkcja ma w danym punkcie maximum, czy też minimum.

Niech będzie dana funkcja  $f(x)$ . Jeżeli  $f'(\xi) = 0$  zaś  $f''(\xi) \neq 0$ , to mamy minimum lub maximum, za-

leżnie od tego, czy druga pochodna jest dodatnia, czy ujemna.

Przypuśćmy, że  $f'(\xi)=0$ , a  $f''(\xi)>0$ . Uważajmy  $f''(\xi)$  za pochodną funkcji  $f'(\xi)$ . Na mocy twierdzenia o znaku pochodnej możemy powiedzieć, że w pewnym otoczeniu na prawo od punktu  $\xi$  /dla  $x > \xi$  / mamy

$$f'(x) > f'(\xi)$$

czyli

$$f'(x) > 0$$

zaś na lewo od punktu  $\xi$  (dla  $x < \xi$ ) mamy

$$f'(x) < f'(\xi)$$

czyli

$$f'(x) < 0$$

Lecz gdy  $f'(x) > 0$ , to funkcja  $f(x)$  rośnie /na prawo od punktu  $\xi$  /, gdy zaś  $f'(x) < 0$ , to funkcja  $f(x)$  maleje /na lewo od punktu  $\xi$  /: a zatem w punkcie  $\xi$  funkcja osiąga minimum.

Przypuśćmy teraz, że  $f'(\xi)=0$  i  $f''(\xi)<0$ . W takim razie na prawo od punktu  $\xi$   $f'(x) < 0$ , zaś na lewo od niego  $f'(x) > 0$ : a więc na prawo od punktu  $\xi$  funkcja maleje, na lewo zaś rośnie. W punkcie  $\xi$  zatem funkcja osiąga maximum.

Oba twierdzenia możemy sformułować w sposób następujący.

Jeżeli pierwsza pochodna funkcji  $f(x)$  jest równa zeru, lecz druga różna od zera, to mamy maximum, gdy druga pochodna jest ujemna, zaś minimum, gdy druga pochodna jest dodatnia.

Twierdzenie to nie rozstrzyga o zachowaniu się funkcji  $f(x)$  w tym przypadku, gdy  $f'(\xi)=0$  oraz  $f''(\xi)=0$ . Wtedy mamy twierdzenie poniższe.

Przypuśćmy, że  $f'(\xi)=0$ ,  $f''(\xi)=0$ , ale  $f'''(\xi) \neq 0$   
np.  $f'''(\xi) > 0$ .

Na mocy twierdzenia o znaku pochodnej napiszemy  
na lewo od punktu  $\xi$  ( $x < \xi$ )  $f'(x) < f'(\xi)$   
na prawo od punktu  $\xi$  ( $x > \xi$ )  $f'(x) > f'(\xi)$

A więc  $f'(x)$  na lewo od punktu  $\xi$  maleje, a na prawo rośnie, czyli na lewo mamy  $f'(x) > 0$ , na prawo zaś również  $f'(x) > 0$ . Widzimy stąd, że funkcja  $f(x)$  rośnie w całym otoczeniu punktu  $\xi$ , a zatem w tym punkcie nie osiąga ani minimum ani maximum.

Z łatwością można to ostatnie twierdzenie uogólnić i na ten przypadek, gdy więcej niż dwie pierwsze

pochodne są zerami.

INNE OZNACZENIE POCHODNYCH. Niech będzie dana funkcja  $y = f(x)$ . Wiemy już co znaczą symbole:

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) \\ y'' &= f''(x) \\ y''' &= f'''(x) \\ &\vdots \\ y^{(n)} &= f^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Wprowadzimy jeszcze oznaczenie:  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$

Symbole  $dy$  i  $dx$  nazywamy nieraz różniczkami funkcji  $y$  i zmiennej  $x$ . Należy pamiętać, że wyrażenie  $\frac{dy}{dx}$  nie jest stosunkiem, lecz granicą stosunku  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , gdy  $\Delta x \rightarrow 0$ , o ile mowa o pochodzeniu i istotnej treści pojęcia pochodnej.

Niech będzie dana funkcja  $y = f(z)$ , gdzie  $z = \varphi(x)$ . Będziemy oznaczać

$$\frac{dy}{dz} = f'(z)$$

oraz

$$\frac{dz}{dx} = \varphi'(x)$$

stąd wzór na pochodną funkcji złożonej przyjme postać prostą i łatwą do zapamiętania

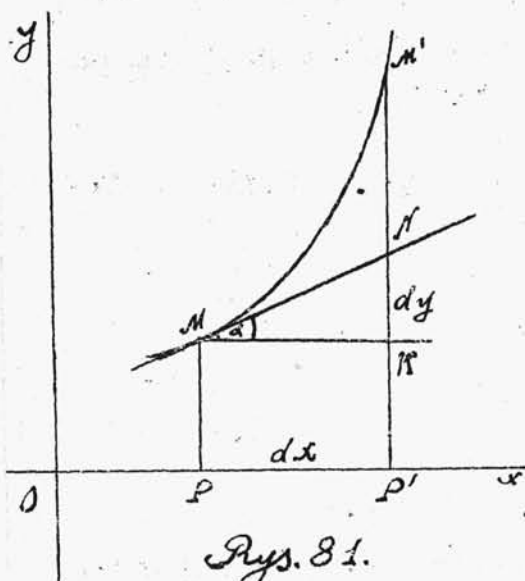
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = f'(z) \cdot \varphi'(x)$$



Podobnie jak każdą liczbę, możemy w sposób konwencjonalny przedstawić i pochodną w postaci stosunku dwóch liczb, które można oznaczyć przez  $dy$  i  $dx$ . Liczbie  $dx$  możemy nadać wartość stałą dowolną, przy czem otrzymamy dla  $dy$  wartość:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

Przy założeniu tedy, że  $dx$  oznacza dowolny, ale określony przyrost  $\Delta x$  zmiennej niezależnej, różniczka  $dy$  nie oznacza bynajmniej przyrostu funkcji  $y$  / t.j. odcinka  $KM'$  na rys. 81/ lecz oznacza przyrost rzędnej nie krzywej lecz stycznej do krzywej w punkcie  $M$  t.j.



Rys. 81.

odcinek  $KN$ . Rzeczywiście jeżeli przez  $dx$  oznaczmy przyrost odciętej / rys 81/  $PP' = \Delta x = dx$ , to wówczas  $KN = MP \cdot \tan \alpha$ , czyli  $KN = dx \cdot f'(x) = dy$ . Podobnie jak  $dy = f'(x) dx$  możemy napisać:

$$d(dy) = (dy)' dx = f''(x) dx^2$$

$$d(dy) = d^2y = f''(x) \cdot dx^2$$

Stąd mamy inny sposób oznaczania pochodnej drugiego rzędu:



$$f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

W ten sam sposób

skąd

$$d^3 y = d(d^2 y) = f'''(x) \cdot dx^3$$

$$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Analogicznie do tego  $n$ -tą pochodną funkcji  $f(x)$  oznaczamy przez

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

---