

Ostatecznie mamy α położone między 0,673506
0,673508 błąd jest mniejszy od 0,000002.

KRĄNCE DLA PIERWIASTKÓW.

Przy oddzielaniu pierwiastków równania nieraz pożyteczną jest rzeczą znać liczby, pomiędzy którymi są zawarte wszystkie pierwiastki danego równania, czyli krąnce dla tych pierwiastków.

Krąncem dla pierwiastków dodatnich nazywamy liczbę większą od wszystkich pierwiastków równania.

W analogiczny sposób określamy kraniec dla pierwiastków ujemnych.

Sposobów odnajdywania krąnców jest bardzo dużo. My tutaj zapoznamy się tylko z dwoma. Pierwszy sposób daje się sformułować w twierdzeniu następującem:

Jako kraniec dla pierwiastków dodatnich można wziąć liczbę

$$c = 1 + \sqrt[m]{\frac{\alpha}{A}}$$

gdzie A_m oznacza pierwszy z kolei ujemny współczynnik zaś α liczbę dodatnią, nie mniejszą od wartości bezwzględnej każdego ze współczynników ujemnych funkcji

$$f(x) = Ax^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_m x + \dots$$

Niech np. będzie dane równanie

$$3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 11x + 10 = 0$$

W tym wypadku

$$A=3; m=2; \alpha=11;$$

więc

$$l = 1 + \sqrt{\frac{11}{3}} = 1 + \frac{\sqrt{33}}{3}.$$

Łatwo jest wykazać słuszność powyższego twierdzenia. Wystarczy dowieść, że gdy

$$11/ \quad x > l$$

wówczas

$$12/ \quad f(x) > 0.$$

Zauważmy więc, że gdy x jest dodatnie, to

$$f(x) > Ax^n - \alpha x^{n-m} - \alpha x^{n-m+1} - \dots - \alpha x - \alpha$$

/Należy porównać oba wielomiany/. Wyrazy prawej strony, poczynawszy od drugiego, tworzą postęp geometryczny malejący; sumą jego jest

$$\frac{\alpha x^{n-m+1} - \alpha}{x - 1}$$

A zatem

$$13/ \quad f(x) > \frac{Ax^n(x-1) - \alpha x^{n-m+1} + \alpha}{x-1}$$

dla każdej wartości $x > 0$. Załóżmy, że $x > 1$; w takim razie

$$x^{n-m+1} > (x-1)^{n-m+1}$$

więc

$$/4/ \quad f(x) > \frac{x^{n-m+1} [A(x-1)^m - a] + a}{x-1}$$

Gdy przypuścimy, że

$$/5/ \quad A(x-1)^m - a > 0$$

to tembardziej $f(x) > 0$. Z nierówności /5/ wynika:

$$A(x-1)^m > a,$$

skąd

$$x-1 > \sqrt[m]{\frac{a}{A}};$$

a więc

$$x > 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}}$$

Twierdzenie zatem zostało dowiedzione. Gdy bowiem

$$x > 1 + \sqrt[m]{\frac{a}{A}}$$

to słuszną będzie nierówność /5/; więc na mocy nierówności /4/, wobec tego, że $x-1 > 0$,

$$f(x) > 0.$$

Umiejąc znaleźć kraniec dla pierwiastków dodatnich, będziemy mogli również znaleźć kraniec dla pierwiastków ujemnych. W tym celu zmieniamy na przeciwne znaki wyrazów równania

$$f(x) = 0$$

zawierających nieparzyste potęgi x /t.j. podstawiamy

$-x$ zamiast x /, zmieniają się przytem również znaki pierwiastków. Gdy zatem znajdziemy kraniec dla pier-

...wiałstków dodatnich równania

$$/2/ \quad f(-x) = 0$$

to będzie on jednocześnie krańcem dla pierwiastków ujemnych równania /1/.

Wskazemy teraz drugi sposób odnajdywania krańca.

Niech będzie dana funkcja:

$$/1/ \quad f(x) = Ax^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{m-1} x^{n-m+1} - \\ - A_m x^{n-m} - A_{m+1} x^{n-m-1} - \dots - A_n$$

Można ją przekształcić w sposób następujący:

$$f(x) = x^{n-m+1} [Ax^{m-1} + A_1 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} - \\ - (\frac{A_m}{x} + \frac{A_{m+1}}{x^2} + \dots + \frac{A_n}{x^{n-m+1}}]$$

Stąd widać, że im x jest większe, tem większe są oba czynniki i tem większy jest ich iloczyn $f(x)$. Jeżeli więc przy x równym a

$$f(x) > 0$$

to z pewnością słuszną będzie ta nierówność przy x większym od a . Wystarcza więc znaleźć taką liczbę, przy której byłoby dodatnie wyrażenie w nawiasach kwadratowych. Ta liczba będzie krańcem dla pierwiastków dodatnich równania

$$f(x) = 0$$

Jeżeli w danym wielomianie znaki współczynników nie są, jak w wielomianie /1/, do pewnego miejsca wszy-

stkie dodatnie, a następnie wszystkie ujemne, to można dany wielomian rozłożyć nieskończoną liczbą sposobów na sumę wielomianów, posiadających powyższą własność:

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x).$$

Poprzednie twierdzenie stosuje się dla każdego składnika oddzielnie. Jeżeli a_1 będzie kraniec dla pierwszego wielomianu, a_2 dla drugiego i t.d., to największa z liczb $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ będzie kraniec dla pierwiastków dodatnich równania

$$F(x) = 0$$

P r z y k ł a d . Znaleźć kraniec dla pierwiastków dodatnich równania

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 6x^2 + 10x - 7 = 0$$

Rozkładamy dany wielomian na wielomiany

$$f_1(x) = x^5 - 3x^4 - 7x^3 - 6x^2$$

$$f_2(x) = 10x - 7$$

Jako kraniec dla pierwiastków wielomianu $f_1(x)$ można wziąć liczbę 4, zaś dla wielomianu $f_2(x)$ liczbę 2. A więc kraniec dla tych pierwiastków dodatnich równania

$$f(x) = 0$$

będzie liczba 4.

Jeżeli mamy dany jakiś przedział (a, b) i okaże się, że np.

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

to możemy z pewnością twierdzić, że w tym przedziale jest nieparzysta liczba pierwiastków; nie możemy jednak powiedzieć, ile jest tych pierwiastków. Na to pytanie daje nam częściowo odpowiedź t.zw. prawo znaków Kartezjusza.

Jeżeli dana jest funkcja $f(x)$, uporządkowana według potęg rosnących lub malejących zmiennej x , to każde dwa sąsiednie wyrazy mają współczynniki z jednakiem albo też różnymi znakami; powiadamy, że w pierwszym wypadku zachodzi następstwo znaków w drugim zaś zmiana znaku.

Liczba wszystkich pierwiastków dodatnich równania nie może przewyższać liczby zmian znaków, a jeżeli jest mniejsza, to o liczbę parzystą.

Jeżeli chodzi o liczbę pierwiastków ujemnych równania

$$/1/ \quad f(x) = 0$$

to jest ona oczywiście równa liczbie pierwiastków dodatnich równania

$$/2/ \quad f(-x) = 0$$

A więc liczba pierwiastków ujemnych równania /1/ równa się liczbie zmian znaków w równaniu /2/ lub jest od niej mniejsza o liczbę parzystą.

Przykład.

$$/1/ \quad x^5 - 7x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 5x - 10 = 0$$

Wypiszmy znakispółczynników tego równania

+ - - + + -

Widzimy, że są 3 zmiany znaków; a zatem dane równanie posiadać będzie 3 lub 1 pierwiastek dodatni. Podstawmy teraz $-x$ zamiast x i wypiszmy znaki otrzymanego równania:

$$-x^5 + 7x^4 + 8x^3 + 7x^2 - 5x - 10 = 0$$

- - + + - -

W tym równaniu mamy 2 zmiany znaków, a zatem równanie /1/ posiada 2 albo 0 pierwiastków ujemnych.

METODA NEWTONA OBLICZANIA PIERWIASTKÓW WYMIERNYCH

Niech będzie równanie n -tego stopnia:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

o współczynnikach wymiernych. Ponieważ wszystkie współczynniki są wymierne, więc możemy je zamienić na współczynniki całkowite, pomnożywszy je przez najmniejszą wspólną wielokrotną.

Jeżeli mamy równanie n -tego stopnia o współczynniki całkowite, można zawsze przekształcić przez podstawienie $x' = a_n x$ w ten sposób, by współczynnik przy x

w najwyższej potędze = 1.

Jeżeli zaś mamy równanie takie, że współczynnik przy x w najwyższej potędze = 1, a wszystkie inne współczynniki są całkowite, to pierwiastki rzeczywiste wymierne takiego równania mogą być tylko całkowite.

Twierdzenie to udowodnimy, założywszy przeciwne. Niech będzie równanie:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

gdzie współczynniki a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami całkowitemi. Przypuśćmy, że $x = \frac{p}{q}$ i p i q są to liczby całkowite, nie mają wspólnego dzielnika prócz 1/. Wykażemy, że to niemożliwe. Jeśli $x = \frac{p}{q}$ to równanie nasze napiszemy w formie:

$$\frac{p^n}{q^n} + a_1 \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + a_2 \frac{p^{n-2}}{q^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0,$$

skąd

$$\frac{p^n}{q^n} = - \frac{a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-2} + a_n q^{n-1}}{q^{n-1}} = - \frac{M}{q^{n-1}}$$

a mnożąc obie strony przez q^{n-1} : $\frac{p^n}{q} = -M$

Lecz $-M$ jest liczbą całkowitą, zaś według założenia p i q nie mają wspólnego dzielnika, zatem równość ta jest niemożliwa, o b d. d.

Niech będzie równanie i z taktu:

$$(1) x^n + \frac{p_1}{p_2} x^{n-1} + \frac{p_3}{p_4} x^{n-2} + \dots + \frac{p_{n-1}}{p_n} x + \frac{p_n}{p_n} = 0,$$

w którym, według założenia, współczynniki są liczbami

całkowitemi. Z twierdzenia poprzedniego wiemy, że w takim razie i pierwiastki, o ile są wymierne, muszą być całkowite. Niech α będzie pierwiastkiem równania /1/. Napiшем więc tożsamość:

$$(2) \quad \alpha^n + p_1 \alpha^{n-1} + p_2 \alpha^{n-2} + \dots + p_{n-1} \alpha = -p_n$$

Lewa strona równości /2/ dzieli się przez α , a zatem i p_n również musi się przez α dzielić. Niech iloraz $p_n/\alpha = q_{n-1}$, t.j. $p_n = \alpha q_{n-1}$. W ten sposób możemy przepisać równanie /2/ tak:

$$/3/ \quad \alpha^{n-1} + p_1 \alpha^{n-2} + p_2 \alpha^{n-3} + \dots + p_{n-1} = -q_{n-1}$$

albo $\alpha^{n-1} + p_1 \alpha^{n-2} + p_2 \alpha^{n-3} + \dots + p_{n-2} \alpha = - (p_{n-1} + q_{n-1})$

Rozumując, jak poprzednio, napiszemy $\frac{p_{n-1} + q_{n-1}}{\alpha} = q_{n-2}$

gdzie znów q_{n-2} jest liczbą stałą. Dalej

$$\alpha^{n-2} + p_1 \alpha^{n-3} + \dots + p_{n-3} \alpha + p_{n-2} = -q_{n-2}$$

.....

$$\alpha^2 + p_1 \alpha + p_2 = q_2; \quad \alpha^2 + p_1 \alpha = - (p_2 + q_2)$$

przyczem oznaczmy $\frac{p_2 + q_2}{\alpha} = q_1; \quad \alpha + p_1 = -q_1;$

$$\alpha = - (p_1 + q_1); \quad \frac{p_1 + q_1}{\alpha} = q_0; \quad q_0 + 1 = 0$$

Stąd wniosek: jeżeli liczba całkowita α jest pierwiastkiem danego równania, to wolny wyraz dzieli się przez α . Jeśli iloraz od podzielenia dodamy do współczynnika poprzedniego wyrazu, to otrzymana suma dzieli się całkowicie przez α i t.d. Ostatni iloraz

$$q_0 = -1. \text{ Ilorazy } q_{n-1}, q_{n-2}, \dots, q_2, q_1 \text{ są to}$$

liczby całkowite; współczynniki p_1, p_2, \dots, p_n w powyższych równaniach również są liczbami całkowitymi.

Dalej

$$(4) \quad \frac{x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n}{x - \alpha} = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + \dots + q_{n-1} = Q$$

Udowodnimy to, sprawdzając za pomocą mnożenia,

$$\begin{aligned} (x - \alpha) \cdot Q &= x^n - q_1 x^{n-1} - q_2 x^{n-2} - \dots - q_{n-2} x^2 - q_{n-1} x - \alpha x^{n-1} + \\ &\quad + \alpha q_1 x^{n-2} + \alpha q_2 x^{n-3} + \dots + \alpha q_{n-2} x + \alpha q_{n-1} = \\ &= x^n - (q_1 + \alpha) x^{n-1} - (q_2 - \alpha q_1) x^{n-2} - \dots - (q_{n-1} - \alpha q_{n-2}) x - \alpha q_{n-1} \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy współczynniki naszego równania:

$p_{n-1} + q_{n-1} = \alpha q_{n-2}; p_{n-1} = \alpha q_{n-2} - q_{n-1}$. Widzimy, że współczynnik zawarty wyżej w nawiasie, t.j. $(q_{n-1} - \alpha q_{n-2})$ możemy zastąpić przez $-p_{n-1}$. Analogicznie $q_2 - \alpha q_1 = -p_2$.

Równanie /4/ przepisujemy w formie:

$$x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_{n-1} x + p_n = (x - \alpha) \cdot Q$$

PRAWIDŁO OGÓLNE. Znajdujemy dzielniki liczby f_n ; wybieramy te, które są w granicach oznaczonych, np. szeregiem Sturma. Poddajemy dzielniki d liczby p_n próbie na zasadzie wyłożonego poprzednio; jeśli wszystkie dzielenia, dające liczby q_{n-1}, q_{n-2}, \dots

q_2, q_1, q_0 , dają się uskutecznić bez reszty i $q_0 = -1$, to dzielnik d jest pierwiastkiem, w przeciwnym razie — nie. Ponieważ $Q(x) = x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \dots - q_{n-1}$, równanie więc $Q(x) = 0$

piszemy odrazu i to równanie $Q(x)=0$ poddajemy takiemu samemu postępowaniu. Postępujemy w ten sposób aż do wyczerpania wszystkich dzielników liczby Δ_n w granicach określonych np. twierdzeniem Sturma lub do otrzymania wszystkich pierwiastków rzeczywistych równania. Ilość prób można zmniejszyć na zasadzie następującej uwagi.

UWAGA. Jeśli α jest pierwiastkiem równania $f(x)=0$ to $\alpha \pm m$ będzie pierwiastkiem równania $f(y \pm m)=0$.

PRZYKŁAD: Dane równanie

$$f(x) \equiv x^5 + 5x^4 + x^3 - 16x^2 - 20x - 16 = 0$$

Granica dolną i górną dla pierwiastków tego równania jest $+5$ i -5 .

Z dzielników współczynnika 16 rozpatrzmy więc tylko $\pm 1; \pm 2; \pm 4$.

$$\frac{f(+1)}{x_1-1} = \frac{-45}{x_1-1}; \quad \frac{f(-1)}{x_1+1} = -\frac{9}{x_1+1}.$$

Ponieważ 45 nie jest podzielne przez 2 , a 9 ani przez 2 ani przez 5 , to czynniki -1 , $+1$, $+4$ należy opuścić. Próbujemy teraz, czy $+2$ nie jest pierwiastkiem równania.

Spółczynniki danego równania wypisujemy w jednym wierszu. Pod nimi pisać będziemy współczynniki równa-

nia, jakie otrzymamy dzieląc równanie początkowe przez $x-2$.

$$\begin{array}{r|l} +1, +5, +1, -16, -20, -16, & +2 \\ q_0 = -1, -7, -15, -14, -8, & \\ \hline 0, -2, -14, -30, -28 & \end{array}$$

q_0 jest tu -1 , a zatem 2 jest pierwiastkiem równania. Stąd mamy również

$$f(x) = (x-2) \cdot (x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 14x + 8).$$

$$\begin{array}{r|l} +1, +7, +15, +14, +8 & -2 \\ -1, -5, -5, -4, & \\ \hline 0, +2, +10, +10 & \end{array}$$

$$f(x) = (x-2)(x+2)(x^3 + 5x^2 + 5x + 4)$$

$$\begin{array}{r|l} +1, +5, +5, +4 & -4 \\ -1, -1, -1 & \\ \hline 0, +4, +4 & \end{array}$$

$$f(x) = (x+2)(x-2)(x+4)(x^2 + x + 1)$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Pierwiastkami danego równania są:

$$x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = -4;$$

$$x_4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; x_5 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$