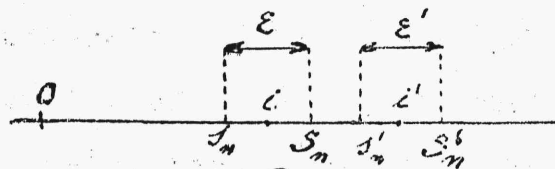


Łatwo wykazać, że ϵ nie należy od sposobu podziału odcinka AB na części. Przypuśćmy bowiem, że skutecznie podział w inny sposób. Oznaczmy wspólną granicę ciągów, powstałych drogą tych nowych podziałów przez

$$S'_1, S'_2, S'_3, \dots$$

$$S''_1, S''_2, S''_3, \dots$$

przez ϵ' . Można utworzyć trzeci podział, którego przedziały będą częściami przedziałów, otrzymanych z połączenia pierwszego i drugiego podziału /punkty końcowe przedziałów będą zarazem końcami przedziałów, powstałych z pierwszego i drugiego podziału/. Niech δ oznacza sumę pól prostokątów wpisanych, odpowiadających podziałowi, przy którym są uwzględnione wszystkie punkty, odpowiadające sumom S_n i S'_n , zaś Σ - sumą pól prostokątów opisanych w tych samych warunkach. Przypuśćmy następnie, że $\epsilon \neq \epsilon'$.



Rys. 92

Z nierówności

$$11/ \quad S_n < \delta < S'_n$$

/ponieważ δ odpowiada większej liczbie punktów podziału, niż S_n .

przeto $S_n < \delta$ i t.d./

$$12/ \quad S'_n < \delta < S''_n$$

wynika, że C jest zawarte w dwóch przedziałach. Oteż
 możemy zrobić tak wielkiem, żeby przedziały Δ_n , S_n
 i S'_n zupełnie się nie nakrywały: sprzeczność jest wi-
 doczna wprost z rysunku 92. Więc ostatecznie musi być:

$$C = C'$$

A więc wspólna granica sumy pól prostokątów wpisa-
 nych i opisanych nie zależy od sposobu podziału na pro-
 stokąty. Tę granicę nazywamy w interpretacji geometrycz-
 nej polem figury. Analitycznie nazywa się ona c a ł-
 k ą o k r e ś l o n ą w przedziale $/a, b/$ i oznacza
 się symbolem:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Liczba a /punkt A / nazywa się granicą dolną, liczb-
 a b /punkt B / granicą górną, zaś odcinek AB -
 drogą /torem/ całkowania. Stąd właśnie pochodzi znak
 całki \int , który jest niczem innem, jak zniekształconem
 S , pierwszą literą wyrazu suma.

U w a g a . Zamiast tworzyć sumy $\sum \Delta_i m_i$, lub
 $\sum \Delta_i M_i$, możemy tworzyć sumy $\sum \Delta_i f_i$, gdzie f_i oz-
 nacza którąkolwiek wartość funkcji $f(x)$ w przedzia-
 le Δ_i . Granica będzie ta sama C , a to z tego powo-
 du, iż f_i jest wartością pośrednią, t.j. spełniającą
 nierówność $m_i \leq f_i \leq M_i$.

Dla rozszerzenia pojęcia całki /na wypadek, gdy

$b \leq a$, umawiamy się, że

$$11) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$12) \int_a^a f(x) dx = 0$$

Zauważmy, że gdy mamy 3 liczby a, b, c , to

$$13) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

W rzeczy samej, przypuśćmy, że

$$a < b < c$$

$$\begin{aligned} \int_a^c f(x) dx &= \lim \sum_a^c \delta_i f_i = \lim \left(\sum_a^b \delta_i f_i + \sum_b^c \delta_i f_i \right) = \\ &= \lim \sum_a^b \delta_i f_i + \lim \sum_b^c \delta_i f_i, \end{aligned}$$

skąd wynika wzór /3/. Wzór ten można uogólnić na dowolne liczby, gdy bowiem np.

$$a < c < b,$$

wtedy

$$\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c$$

Wzór /3/ jest słuszny dla dowolnej liczby składników:

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^d + \dots + \int_e^a = 0$$

Można to udowodnić zapomocą indukcji matematycznej opierając się na tem, że /3/

$$\int_a^b + \int_b^c + \int_c^a = 0$$

Przypuścimy, że funkcja, którą całkujemy, jest sumą dwóch funkcji ciągłych. W takim razie:

$$(4) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

Istotnie

$$\begin{aligned} \int_a^b [f+g] dx &= \lim \sum_a^b \delta_i [f_i + g_i] = \lim \sum_a^b [\delta_i f_i + \delta_i g_i] \\ &= \lim \sum_a^b \delta_i f_i + \lim \sum_a^b \delta_i g_i = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

Wzór /4/ pozostaje słuszny i dla większej /skończonej/ liczby składników.

Jeżeli k jest liczbą stałą, to

$$15) \int_a^b k \cdot f(x) dx = k \cdot \int_a^b f(x) dx$$

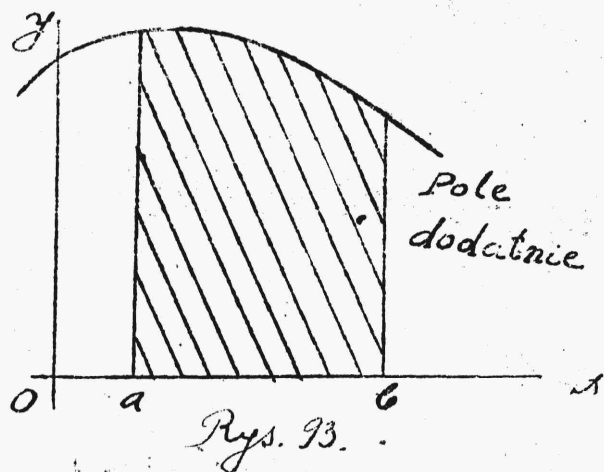
Wynika to z definicji całki:

$$\begin{aligned} \int_a^b k \cdot f(x) dx &= \lim \sum_a^b \delta_i k f_i = \lim k \cdot \sum_a^b \delta_i f_i = \\ &= k \cdot \lim \sum_a^b \delta_i f_i = k \cdot \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Jeżeli funkcja pod znakiem całki jest dodatnią dla wszystkich wartości x w przedziale (a, b) , to całka /pole/ jest dodatnią.

Analogicznie, jeśli $f(x)$ jest w przedziale (a, b) zawsze < 0 , to /pole/ całka ma wartość ujemną.

Przejdziemy teraz do uwidocznienia dalszych własności całki.



1/ Jeżeli w przedziale $[a, b]$ t.j. dla $a \leq x \leq b$

mamy

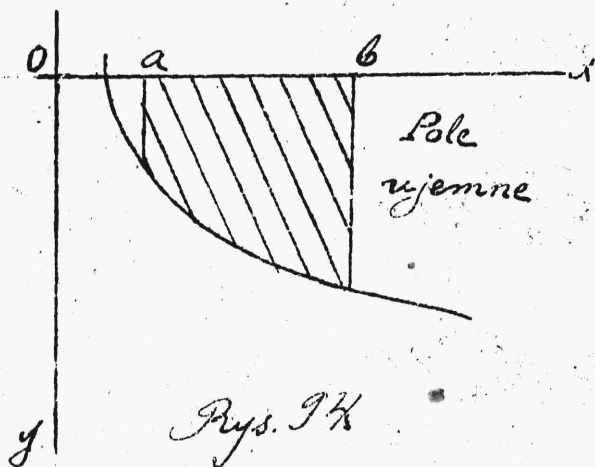
$$(\alpha) \quad f(x) > 0$$

to

$$(\beta) \quad \int_a^b f(x) dx > 0$$

czyli nierówność (α) pociąga za sobą nierówność (β) .

Dowód: ponieważ $\int_a^b f(x) dx = \lim \sum_{i=1}^n \delta_i f_i$, a każdy składnik tej sumy jest dodatni, więc i suma jest > 0 , i granica także speł-



niać będzie ten warunek.

2/ Gdy $f(x) = 1$ to

$$\int_a^b 1 dx = (b-a)$$

3/ Wzór, wyznaczający wartość średnią całek. Jeżeli w przedziale $[a, b]$

$$m \leq f(x) \leq M,$$

w takim razie

$$171 \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Istotnie

$$\int_a^b [M - f(x)] dx \geq 0$$

na zasadzie własności 1-ej, ponieważ $M - f(x) > 0$.
stąd

$$\int_a^b M dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

a więc

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

czyli

$$\int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx,$$

albo też

$$\int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Na zasadzie wzoru /6/ /własność 1-a/:

$$\int_a^b [f(x) - m] dx \geq 0,$$

stąd

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b m dx$$

czyli

$$\int_a^b f(x) dx \geq m(b-a)$$

A zatem słuszność wzoru /7/ została dowiedziona.

Wzór ten możemy przekształcić, dzieląc wszystkie wyrazy jego przez różnicę $b-a$:

$$(7') m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

Ze wzoru /7/ wynika, że istnieje w przedziale $[a, b]$ taka wartość ξ , że

$$(8) \int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(\xi).$$

Istotnie, $\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot K$, gdzie K (patrz 7') spełnia warunek: $m \leq K \leq M$; otóż funkcja $f(x)$

jako ciągła, musi przybierać wszystkie wartości pośrednie pomiędzy m a M ; a więc w szczególności istnieje takie ξ , że $f(\xi) = K$.

Wzór /8/ właśnie nazywa się wzorem na wartość średnią dla całek. Pozwala on nam obliczyć wartość przybliżoną całki, np.

$$\int_0^1 x^3 dx < 1$$

Wzór /8/ możemy jeszcze uogólnić. Przypuśćmy, że mamy całkę iloczynu

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) dx,$$

w którym $\varphi(x) > 0$. Jeśli

$$m \leq f(x) \leq M$$

to

$$19/ \quad m \cdot \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) f(x) dx \leq M \cdot \int_a^b \varphi(x) dx$$

Ten wzór jest uogólnieniem wzoru /7/; gdy bowiem podstawimy w nim $\varphi(x) = 1$, otrzymamy wzór /7/. Na zasadzie wzoru /6/ /własność 1/ możemy napisać, że gdy

$$a \leq x \leq b$$

to

$$\int_a^b [M - f(x)] \varphi(x) dx \geq 0,$$

czyli

$$\int_a^b M \cdot \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx \geq 0;$$

stąd

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx \leq M \cdot \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Następnie wiemy, że

$$\int_a^b [f(x) - m] \varphi(x) dx \geq 0$$

Przekształcając podobnie jak przedtem, znajdziemy:

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx \geq m \int_a^b \varphi(x) dx$$

co dowodzi słuszności wzoru 19/. Z tego wzoru wynika bezpośrednio wzór:

$$19/ \int_a^b \varphi(x) \cdot f(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b \varphi(x) dx,$$

przyczem

$$a \leq \xi \leq b.$$

U w a g a . W dowodzeniu zależylismy, że $\varphi(x) > 0$. Gdyby $\varphi(x) < 0$, należałoby zamiast m napisać M i odwrotnie; pozatem nic by się nie zmieniło.

Powtórzmy teraz, na ścisłych podstawach oparte, dowód twierdzenia, że pochodna funkcji, która jest polem równa się rzędnej, czyli, że:

$$S'(x) = f(x)$$

Uczyńmy górną granicę całkowania b wielkością

zmienną i oznaczmy ją przez x . Rzecz jasna, że wtedy całka będzie funkcją tej zmiennej.

$$\int_a^x f(x) dx = S(x)$$

Możemy znaleźć więc jej pochodną:

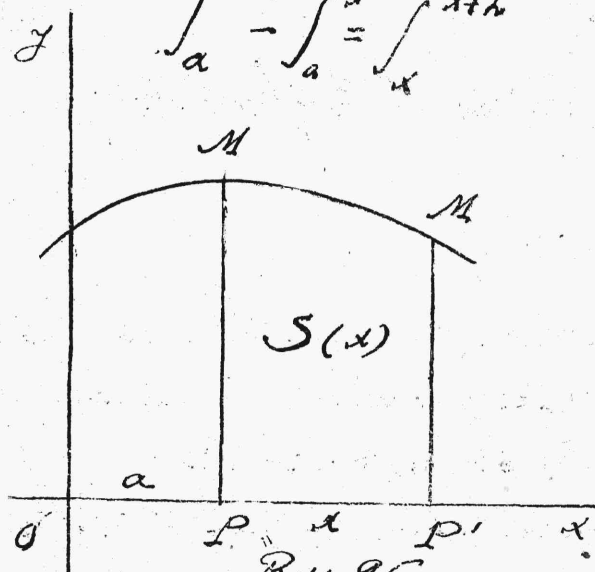
$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} - \int_a^x \right]$$

Zauważmy, że

czyli

$$\int_a^{x+h} = \int_a^x + \int_x^{x+h}$$

$$\int_a^{x+h} - \int_a^x = \int_x^{x+h}$$



Rys. 95.

A zatem /na zasadzie wzoru8/

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot h \cdot f(\xi)$$

gdzie

$$x \leq \xi \leq x+h$$

A więc

$$S'(x) = \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$$

ZWIĄZEK MIĘDZY FUNKCJĄ PIERWOTNĄ A CAŁKĄ OKREŚLONĄ.

Niech będzie funkcja ciągła $f(x)$. Możemy twierdzić, że istnieje dla niej funkcja pierwotna $F(x)$, a

właściwie nieskończenie wiele funkcji pierwotnych, różniących się o liczbę stałą C . W rzeczy samej utwórzmy całkę z górną granicą x :

$$\int_a^x f(x) dx = S(x)$$

Na zasadzie poprzednio przytoczonych rozważań ta funkcja $S(x)$ istnieje, o ile $a < x < b$, a $f(x)$ jest ciągłą w przedziale (a, b) . Ta całka właśnie jest jedną z funkcji pierwotnych. A zatem te dwie odrębne napozór dziedziny całek i funkcji pierwotnych, ściśle łączą się ze sobą. Związek pomiędzy temi dziedzinami jest zupełnie prosty:

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) + C,$$

gdyż, jak dowiedliśmy poprzednio, dwie funkcje pierwotne mogą się różnić tylko o stałą C . Tę stałą znajdziemy z łatwością, czyniąc $x = a$.

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) + C = 0$$

Stąd

$$C = -F(a)$$

A zatem

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a).$$

Gdy zmienna x przybiera wartość stałą b , wówczas

czym

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Jest to wzór zasadniczy. Pozwala nam przy pomocy funkcji pierwotnej $F(x)$ obliczyć całkę $\int_a^b f(x) dx$.

Na zakończenie zrobimy jeszcze parę uwag, dotyczących całek określonych.

Wartość całki nie zależy od zmiennej, lecz tylko od funkcji i granic całkowania. A zatem

$$\int_a^x f(y) dy = S(x) - \int_a^x f(x) dx.$$

Jeżeli granica górna całki jest wielkością zmienną, to wartość całki jest jej funkcją. Zmienna pod znakiem całki nie gra przytem żadnej roli:

$$\int_a^x f(x) dx = S(x)$$

Jeżeli zmienną jest granica dolna, zachodzi to samo, zmienia się jednak znak na przeciwny:

$$\int_x^a f(x) dx = - \int_a^x f(x) dx = -S(x)$$

Niekiedy obliczenie sumy wzrastającej ciągle ilości składników /całki określonej/ przedstawia dość znaczne trudności. Zawsze jednak wiemy, że suma ta istnieje.

Wszelkie własności całki określonej możemy wysnuć dwiema drogami: uważając całkę za funkcję pierwotną

$F(x)$, dla której $F'(x) = f(x)$; lub też uważając całkę za granicę sumy:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \lim \sum_a^b \delta_i f_i.$$

Dla przykładu uzasadnimy na innej drodze wzór:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

Mianowicie:

$$\int_a^b = F(b) - F(a) = [F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)] = \int_a^c + \int_c^b.$$

Przy obliczaniu wartości całek nieraz zachodzi potrzeba zamiany jednej zmiennej na drugą. Niech będzie całka $\int_a^b f(t) dt$; przypuścimy, że każdej wartości t w $[a, b]$ odpowiada jedna wartość x w przedziale $[d, c]$ i a każdej wartości x w $[d, c]$ jedna wartość zmiennej t w $[a, b]$ i niech ta zależność jednoznaczna wyraża się wzorem $t = \varphi(x)$. Wtedy mamy wzór:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_d^c f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx$$

w którym

$$a = \varphi(d) \quad , \quad b = \varphi(c)$$

Dowód tego jest następujący:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \lim \sum_a^b \delta_i f(t_i) = \\ &= \lim \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \cdot f[\varphi(\xi_i)] \end{aligned}$$

gdzie

$$t_i = f(x_i); \quad t_{i-1} = f(x_{i-1}); \quad t_0 = a; \quad t_n = b$$

$$x_0 = d; \quad x_n = c;$$

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$$

$$t_i - t_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f'(\xi_i);$$

a więc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot [f'(\xi_i)] \cdot f(\xi_i) \\ &= \int_d^c [f' \circ f](x) \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

LICZBY ZESPOLONE.

Wykonywując działania algebraiczne nad liczbami wymiernymi i mierząc zapomocą óbranej jednostki długość odcinków, przekonaliśmy się, że obszar liczb wymiernych jest zbyt wąski, aby w jego zakresie oba wyżej wymienione zagadnienia zawsze były wykonalne. Z tego właśnie powodu musieliśmy obszar liczb wymiernych rozszerzyć, wprowadzając liczby niewymierne; przez połączenie liczb wymiernych z niewymiernymi otrzymaliśmy