

i wielokrotność tego pierwiastka wyraża się liczbą k , to sama funkcja i jej $k-1$ pierwszych pochodnych dzieli się bez reszty przez $z-a$ i mamy

$$f(a) = f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(k-1)}(a) = 0$$

Słuszność twierdzenia jest oczywista z równań: (gdzie $Q(a) \neq 0$)

$$f(z) = (z-a)^k Q(z);$$

$$f'(z) = k \cdot (z-a)^{k-1} Q(z) + (z-a)^k Q'(z);$$

$$f''(z) = (k-1) \cdot k \cdot (z-a)^{k-2} Q(z) + k \cdot (z-a)^{k-1} Q'(z) + \dots$$

$$\dots$$

$$f^{(k-1)}(z) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot (z-a) Q(z) + \dots$$

$$f^{(k)}(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \cdot Q(z) + \dots$$

SPROWADZENIE RÓWNAŃ O PIERWIASTKACH WIELOKROTNYCH DO SZEREGU RÓWNAŃ O PIERWIASTKACH JEDNOKROTNYCH.

Niech będzie dane równanie n stopnia

$$f(z) = 0$$

Rozłóżmy funkcję $f(z)$ na czynniki linjowe, przy-

czem napiszemy najpierw te czynniki, których stopniem wielokrotności jest liczba jeden, następnie te, które mają stopień wielokrotności dwa i t.d.

$$f(z) = a_0 [(z-m)(z-n) \dots (z-l)] [(z-\alpha)(z-\beta) \dots (z-\lambda)]^2 \dots$$

Oznaczmy następnie iloczyn czynników jednokrotnych przez X_1 , iloczyn czynników dwukrotnych przez X_2 i t.d.

$$f(z) = a_0 X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^3 \dots X_n^n$$

Oczywiście X_1, X_2, X_3, \dots będą funkcjami zmiennej z . Znajdźmy pochodną funkcji $f(z)$. W tym celu zlogarytmujemy ją, a następnie zróżniczkujemy:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{x_1'}{x_1} + \frac{2x_2'}{x_2} + \frac{3x_3'}{x_3} + \dots + \frac{nx_n'}{x_n}$$

skąd

$$f'(z) = a_0 x_1' x_2^2 x_3^3 \dots x_n^n + 2a_0 x_1 x_2' x_2 x_3^3 \dots x_n^n + \dots + n a_0 x_1 x_2^2 \dots x_{n-1}^{n-1} x_n'$$

Porównajmy $f(z)$ i $f'(z)$: największym wspólnym dzielnikiem tych funkcji jest

$$f_1(z) = x_2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^3 \dots x_n^{n-1}$$

Możemy teraz postąpić z funkcją $f_1(z)$ tak, jak

postąpiliśmy z funkcją $f_1(z)$, t.zn. utworzyć jej pochodną i znaleźć jej największy wspólny dzielnik dla funkcji $f_2(z)$ i $f_1'(z)$ [zapomocą kolejnego dzielenia]. Rzecz jasna, że powstanie on w ten sam sposób z funkcji $f_3(z)$, w jaki $f_1(z)$ powstało z $f(z)$.

$$f_2(z) = x_3 \cdot x_4^2 \cdot x_5^3 \cdot \dots \cdot x_n^{n-2}$$

Tak samo znajdziemy największy wspólny dzielnik dla

$$f_2(z) \text{ i } f_2'(z)$$

$$f_3(z) = x_4 \cdot x_5^2 \cdot \dots \cdot x_n^{n-3}$$

i t.d. Podzielmy teraz kolejno funkcję $f_1(z)$ przez $f_2(z)$, funkcję $f_2(z)$ przez $f_3(z)$ i t.d.

Oznaczywszy otrzymane ilorazy przez l_1, l_2, \dots, l_n , będziemy mieli:

$$l_1 = \frac{f(z)}{f_1(z)} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n;$$

$$l_2 = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \dots \cdot x_n;$$

$$l_3 = \frac{f_2(z)}{f_3(z)} = x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \dots \cdot x_n;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$l_n = \frac{f_{n-1}(z)}{f_n(z)} = x_n.$$

Dzieląc znowu f_1 przez f_2 , f_2 przez f_3
i t.d. otrzymujemy:

$$\frac{f_1}{f_2} = X_1;$$

$$\frac{f_2}{f_3} = X_2;$$

$$\frac{f_3}{f_4} = X_3;$$

.....

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} = X_{n-1}.$$

Tym sposobem otrzymujemy wyrażenia wszystkich funkcji $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$; możemy zauważyć, że otrzymujemy to zapomocą zwykłego, algebraicznego dzielenia kolejnego.

A więc rozwiązanie równania

$$f(z) = 0$$

mającego pierwiastki wielokrotne, sprowadza się do rozwiązania równań

$$X_1 = 0;$$

$$X_2 = 0;$$

$$x_3 = 0$$

$$x_4 = 0$$

.....

$$x_n = 0$$

które posiadają wyłącznie pierwiastki jednokrotne.

Przykład : Niech będzie dane równanie:

$$f(x) = x^8 - x^7 - 4x^6 + 6x^5 - 12x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16 = 0$$

Znajdźmy pochodną

$$f'(x) = 8x^7 - 7x^6 - 24x^5 + 36x^4 + 32x^3 + 8x^2 + 8x$$

Największym wspólnym dzielnikiem dla $f(x)$ i $f'(x)$ jest

$$f_1(x) = x^4 - 4x^2 + 4$$

Teraz znajdziemy znowu pochodną

$$f_1'(x) = 4x^3 - 8x$$

Największym wspólnym dzielnikiem dla $f_1(x)$ i $f_1'(x)$ jest

$$f_2(x) = x^2 - 2$$

$$f_2'(x) = 2x$$

A zatem

$$f_3(x) = 1.$$

Wskutek tego mamy:

$$f_1(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4;$$

$$f_2(x) = x^2 - 2;$$

$$f_3(x) = x^2 - 2;$$

a stąd

$$x_1 = x^2 - x + 2;$$

$$x_2 = 1;$$

$$x_3 = x^2 - 2.$$

A więc dane równanie posiada dwa pierwiastki jednokrotne, czyniące zadość równaniu

$$x^2 - x + 2 = 0$$

oraz 2 pierwiastki trzykrotne, spełniające równanie

$$x^2 - 2 = 0$$

Ostatecznie można napisać:

$$f(x) = (x^2 - x + 2) \cdot (x^2 - 2)^3.$$

ZWIĄZEK MIĘDZY SPÓŁCZYNNIKAMI RÓWNANIA, A PIERWIASTKAMI.

Uzasadnijmy teraz pewien wniosek, wynikający z rozkładu funkcji $f(x)$ na czynniki. Wiemy mianowicie,

że w równaniu drugiego stopnia zachodzi prosty związek pomiędzy współczynnikami równania a jego pierwiastkami. Zobaczymy jak wygląda ten związek w równaniach stopni wyższych.

Niech będzie dana funkcja:

$$1/1) \quad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

Można ją przekształcić w sposób następujący:

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots (z - z_n) = \\ &= a_0 z^n - a_0 z^{n-1} (z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n) + \\ &+ a_0 z^{n-2} (z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_2 z_3 + z_2 z_4 + \dots) - \\ &- a_0 z^{n-3} (z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots) + \dots + a_0 (-1)^n z_1 z_2 \dots z_n \end{aligned}$$

Oznaczmy sumę pierwiastków równania przez:

$$S_1 = z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_n$$

sumę iloczynów wszystkich pierwiastków po dwa przez

$$S_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots$$

sumę iloczynów wszystkich pierwiastków po 3 przez

$$S_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots$$

i t. d. Będzie więc można napisać:

$$f(z) = a_0 z^n - a_0 s_1 z^{n-1} + a_0 s_2 z^{n-2} - a_0 s_3 z^{n-3} + \dots + (-1)^k a_0 s_k z^{n-k} + \dots + (-1)^n a_0 s_n.$$

Porównując otrzymany wynik z wielomianem /1/ będziemy mogli współczynniki utożsamiać:

$$a_1 = -a_0 s_1; \quad a_2 = a_0 s_2; \quad a_3 = -a_0 s_3; \quad \dots$$

$$a_k = (-1)^k a_0 s_k; \quad \dots \quad a_n = (-1)^n a_0 s_n.$$

A więc suma wszystkich pierwiastków równania:

$$s_1 = -\frac{a_1}{a_0},$$

zaś sumy wszystkich iloczynów pierwiastków po jednym, po dwa i t.d. równe są odpowiednio

$$s_2 = \frac{a_2}{a_0}; \quad s_3 = -\frac{a_3}{a_0}; \quad \dots$$

$$s_k = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}; \quad \dots \quad s_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

A zatem funkcje symetryczne pierwiastków /suma i iloczyn/ można wyrazić za pomocą współczynników równania.

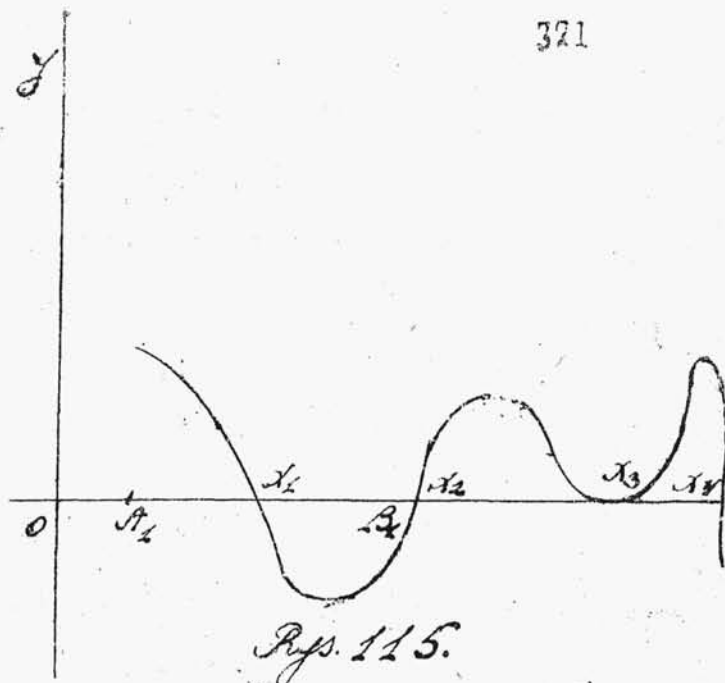
GRAFICZNE ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ. Niech będzie dany wykres funkcji:

$$y = f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

Pierwiastki równania

$$f(x) = 0$$

odpowiadają tym wartościom zmiennej x , przy których krzywa przecina oś Ox lub jest do niej styczna.



Oczywiście jest tu mowa tylko o pierwiastkach rzeczywistych. Pierwiastki zespolone nie dają się wogóle na rysunku uwidocznić: potrzeba by na to przestrzeni czterowymiarowej.

Zagadnienie, czy krzywa przecina oś x , czy tylko jej dotyka, zależy od wielokrotności odpowiedniego pierwiastka: jeżeli, mianowicie, wielokrotność pierwiastka jest rzędu nieparzystego, to krzywa przechodzi w odpowiednim punkcie z jednej strony osi ox na drugą /na rys. np. punkty x_1 i x_2 /: jeżeli zaś wielokrotność pierwiastka jest rzędu parzystego, to krzywa dotyka osi, nie przechodząc na drugą stronę /na rys. 115 punkt x_3 / . Wynika to bezpośrednio z twierdzenia następującego:

Gdy zmienna x przechodzi przez wartość rzeczywistą α , która jest pierwiastkiem równania

$$f(x) = 0$$

to funkcja $f(x)$ zmienia swój znak, albo go nie zmienia, zależnie od tego, czy wielokrotność pierwiastka jest wyrażona przez liczbę parzystą, czy też nieparzystą.

Istotnie

$$f(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots\dots$$

Weźmy dwie wartości x , np. $x=a$ i $x=b$, pomiędzy którymi jest zawarty tylko jeden pierwiastek, np

$$a < x_1 < b$$

Zbadajmy, czy wartości funkcji $f(a)$ i $f(b)$ są tego samego znaku, czy też znaków różnych.

Przy przejściu zmiennej x przez wartość x_1 wszystkie czynniki funkcji $f(x)$, z wyjątkiem może, pierwszego $(x-x_1)^{k_1}$, zachowują swój znak. A zatem znak funkcji $f(x)$ zależy wyłącznie będzie od znaku czynnika

$$(x-x_1)^{k_1}$$

Przypuśćmy, że k_1 jest liczbą nieparzystą. Różnica $x-x_1$, dla $x=a$ jest ujemna, a więc

$$(x-x_1)^{k_1} < 0.$$

Gdy zaś x przybiera wartość b , to różnica

$$x-x_1$$

jest dodatnia, co znowu pociąga za sobą nierówność

$$(x-x_2)^{k_2} \geq 0$$

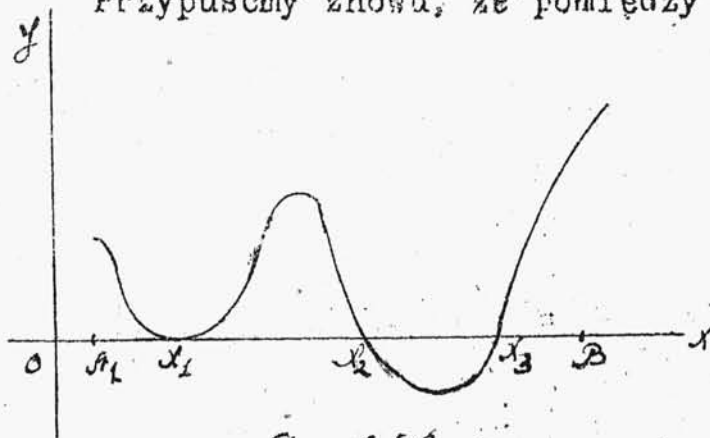
Widzimy więc, że czynnik $(x-x_2)^{k_2}$, gdy k_2 jest liczbą nieparzystą, przy przejściu zmiennej x od wartości a do b zmienia swój znak na przeciwny: a zatem znak całej funkcji również się zmienia.

Przypuśćmy teraz, że k_2 jest liczbą parzystą. W takim razie

$$(x-x_2)^{k_2} > 0$$

niezależnie od tego, czy $x-x_2$ jest dodatnie, czy ujemne, czyli bez względu na to, czy x przybiera wartości z przedziału (a, x) , czy też z przedziału (x, b) . A więc w tym wypadku funkcja $f(x)$, przy przejściu zmiennej x od a do b , zachowuje ten sam znak.

Przypuśćmy znowu, że pomiędzy liczbami a i b



jest kilka wartości pierwiastka. W takim razie zmiana znaku funkcji $f(x)$ zależy od sumy wielokrotności tych pierwiastków

Rys. 116.

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots$$

Jeżeli ta suma jest liczbą nieparzystą, to funkcja $f(x)$ dla wartości $x=a$ i $x=b$ jest różnych znaków; jeżeli zaś ta suma jest liczbą parzystą, to $f(a)$ i $f(b)$ są tego samego znaku.

Istotnie, niech pomiędzy liczbami a i b będą np. pierwiastki x_1, x_2, x_3 i niech x_1 będzie liczbą parzystą, x_2 nieparzystą i x_3 również nieparzystą. Przy przejściu zmiennej przez pierwiastek x_1 znak funkcji się nie zmienia; przy przejściu przez x_2 znak jej się zmienia przy przejściu przez x_3 znak się znowu zmienia, czyli staje się taki, jaki był pomiędzy wartościami x_1 i x_2 , a więc taki, jak dla wartości

$x=a$. Ostatecznie, znak funkcji $f(x)$ dla wartości $x=a$ i $x=b$ będzie zależał od tego, ile razy zachodzi zmiana znaku pomiędzy temi wartościami: jeżeli liczba zmian znaku jest nieparzysta, to w rezultacie znak zostanie zmieniony; jeżeli zaś liczba zmian jest parzysta, to znak funkcji $f(a)$ i $f(b)$ będzie ten sam.

Możemy ostatecznie twierdzenie wypowiedzieć prościej, umawiając się, że będziemy uważali pierwiastek k -krotny za k pierwiastków jednokrotnych. Wówczas będziemy mogli powiedzieć wprost, że wartości, które przybiera funkcja $f(x)$ dla $x=a$ i $x=b$, zależne są co do znaku, od tego, czy pomiędzy a i b jest pa-

rzysta, czy też nieparzysta ilość pierwiastków; w pierwszym wypadku $f(a)$ i $f(b)$ są tego samego znaku, w drugim zaś znaków różnych.

Najczęściej jednak mamy do czynienia z zagadnieniem odwrotnym: dana jest funkcja $f(x)$ i należy dowiedzieć się, czy pomiędzy wartościami $x=a$ i $x=b$ jest parzysta, czy nieparzysta ilość pierwiastków. W takim razie, podstawiając liczby a i b zamiast x , znajdujemy $f(a)$ i $f(b)$. Jeżeli okażą się one liczbami o tym samym znaku, lub też, co nieraz jest jaśniejsze, jeżeli iloczyn ich będzie dodatni

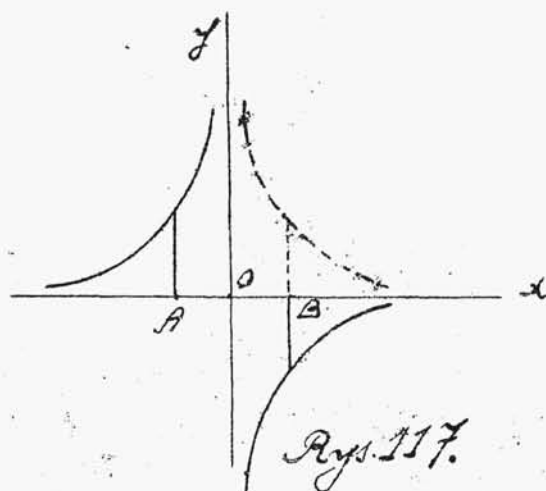
$$f(a) \cdot f(b) > 0,$$

to pomiędzy a i b będzie parzysta liczba lub zero pierwiastków. Jeżeli natomiast $f(a)$ i $f(b)$ będą liczbami o znakach różnych, albo

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

to liczba pierwiastków, zawartych pomiędzy a i b , będzie nieparzysta. Oczywiście pierwiastek wielokrotny uważamy tu za tyle pierwiastków jednokrotnych, ile wynosi rząd wielokrotności.

Uwaga: Jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$ to mamy z pewnością jeden przynajmniej pierwiastek między a i b ponieważ funkcja $f(x)$ jest ciągła. Łatwo widzieć, że dla funkcji nieciągłej taki wniosek mógłby być fał-



szywy /patrz rys. 117/

ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ LICZ-
BOWYCH. Jeżeli mamy dane
jakikolwiek równanie,
to rozwiązanie tego rów-
nania polega na oblicze-
niu z dowolną dokładnoś-
cią jego pierwiastków.

Dla wygody rozdzielamy samo rozwiązanie równania na 2
części: oddzielenie pierwiastków i znalezienie pierwiast-
ków.

Oddzielenie pierwiastków polega na tem, aby wyz-
naczyć takie przedziały, które zawierałyby tylko po
jednym pierwiastku. Tutaj wystarczy zastanowić się
tylko nad równaniami z pierwiastkami jednokrotnymi,
albowiem każde równanie, posiadające pierwiastki wie-
lokrotne, można zastąpić przez układ równań o pier-
wiastkach jednokrotnych.

Istota drugiego zagadnienia polega na tem, aby,
mając pierwiastek już oddzielony, obliczyć go z coraz
większą dokładnością.

Do rozwiązania tych zagadnień istnieje wielka li-
czba różnych metod. Żadna z nich jednak nie jest zupeł-