

Funkcje wykładnicze.

Przejdźmy teraz do określenia funkcji wykładniczej zmiennej zespolonej. Wiemy już, co oznacza symbol Z^n gdy Z jest liczbą zespoloną $x+iy$, zaś n dowolną liczbą wymierną. Nie wiemy jednak, jakie znaczenie posiada symbol a^n , gdy a jest liczbą rzeczywistą, zaś $n=x+iy$. Należy więc dać określenie ogólne funkcji wykładniczej, które obejmowałoby i ten wypadek, gdy wykładnik potęgi jest liczbą zespoloną. Dla wygody, rozszerzając zakres pewnych symbolów, staramy się zachować prawa formalne, których słuszność została wykazana w wypadku szczególniejszym. Wyobraźmy sobie więc, że mamy dać określenie symbolu

$$e^{a+bi}$$

gdy a i b są liczbami rzeczywistymi. Jeżeli mają być zachowane prawa formalne, to

$$e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi}$$

Ponieważ wiemy, co oznacza e^a , należy określić tylko e^{bi} . To określenie zaś musi być sformułowane w ten sposób, by spełniało warunek:

$$e^{bi} \cdot e^{di} = e^{(b+d)i}$$

Zauważmy, żeśmy funkcję, posiadającą własność po-

wyższą, spotkali już w poprzednich rozważaniach, lecz bardziej się nad nią nie zastanawialiśmy. Funkcją tą jest mianowicie:

$$f(b) = \cos b + i \sin b$$

Jeżeli pomnożymy ją przez

$$f(d) = \cos d + i \sin d$$

to otrzymamy iloczyn:

$$\begin{aligned} f(b) \cdot f(d) &= \cos b \cdot \cos d - \sin b \sin d + i(\cos b \sin d + \\ &+ \cos d \sin b) = \cos(b+d) + i \sin(b+d) = f(b+d) \end{aligned}$$

który czyni zadość postawionemu przez nas wyżej warunkowi. Gdy zmienną oznaczymy przez y , to określenie tej funkcji przybierze postać:

$$f(y) = \cos y + i \sin y.$$

Zauważmy, że

$$f(0) = 1$$

Znajdźmy teraz pochodną tej funkcji:

$$f'(y) = -\sin y + i \cos y$$

Ponieważ zamiast $-\sin y$ można napisać $i^2 \sin y$ więc

$$f'(y) = i^2 \sin y + i \cos y = i(i \sin y + \cos y).$$

Skąd

$$f'(y) = i \cdot f(y)$$

Widzimy, że ta funkcja posiada te same własności jakie powinna posiadać funkcja e^y . Wiemy bowiem, że gdy x jest liczbą rzeczywistą, wówczas

$$(e^{kx})' = k \cdot e^{kx}$$

Jeżeli zatem podstawimy $k=i$ oraz zastąpimy x przez y , to otrzymamy własność udowodnioną dla funkcji $f(y)$:

$$(e^{iy})' = i \cdot e^{iy}$$

Naturalną więc rzeczą będzie funkcję e^{iy} określić w sposób następujący:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

gdzie y jest liczbą rzeczywistą. Na tej zasadzie będzie można napisać, że

$$e^{a+bi} = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Dwie liczby e^{a+bi} i e^{a-bi} są sprzężone ze sobą, gdyż na mocy wyżej napisanego określenia

$$e^{a-bi} = e^a (\cos b - i \sin b)$$

W szczególnym przypadku, gdy $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$

$$e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = -i$$

Podobnie

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$e^{-\pi i} = \cos \pi - i \sin \pi = -1$$

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$$e^{-2\pi i} = \cos 2\pi - i \sin 2\pi = 1$$

Wogóle, jeżeli k jest liczbą całkowitą, to $e^{k\pi i}$ jest równe 1 lub -1 , zależnie od tego, czy jest to liczba nieparzysta czy parzysta.

Zajmiemy się teraz zagadnieniem odwrotnym, t.j. określeniem funkcji logarytmicznej dla liczb zespolonych. Niech będzie dana funkcja e^z , gdzie z jest liczbą zespoloną, równą $x+iy$. W takim razie sama funkcja będzie również liczbą zespoloną, którą można będzie przedstawić w postaci:

$$e^z = X + iY$$

W zakresie liczb rzeczywistych logarytm jest funkcją jednoznacznie określoną; tutaj jednak funkcja logarytmiczna posiada nieskończenie wiele wartości. Istotnie:

$$e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z \cdot 1$$

czyli

$$e^{z+2k\pi i} = e^z$$

Za logarytm $z = e^z$ można brać zarówno z , jak wszelką wartość $z+2k\pi i$ (k - liczba całkowita > 0 lub < 0).

A zatem logarytm liczby zespolonej jest funkcją określoną; jej okres jest równy $2\pi i$.

$$f(z+2\pi i) = f(z)$$

Udowodnimy twierdzenie odwrotne: jeżeli funkcja

logarytmiczna ma tę samą wartość przy dwóch wartościach zmiennych, to te dwie wartości różnią się o wielokrotność $2\pi i$. Przypuśćmy więc, że

$$/1/ \quad e^{z_1} = e^{z_2}$$

Ponieważ z_1 i z_2 są to liczby zespolone, będziemy mogli założyć, że

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + iy_1, \\ z_2 &= x_2 + iy_2. \end{aligned}$$

Z określenia funkcji wykładniczej mamy

$$/2/ \quad \begin{cases} e^{z_1} = e^{x_1} \cos y_1 + ie^{x_1} \sin y_1 \\ e^{z_2} = e^{x_2} \cos y_2 + ie^{x_2} \sin y_2 \end{cases}$$

Te dwie liczby są sobie równe: muszą więc być równe ich części rzeczywiste i urojone:

$$/3/ \quad \begin{cases} e^{x_1} \cos y_1 = e^{x_2} \cos y_2 \\ e^{x_1} \sin y_1 = e^{x_2} \sin y_2 \end{cases}$$

Podnosząc te wartości do kwadratu i dodając stronami, znajdziemy

$$/4/ \quad e^{2x_1} = e^{2x_2}$$

skąd

$$x_1 = x_2$$

A zatem równania /3/ będziemy mogli uprościć:

$$/5/ \quad \begin{cases} \cos y_1 = \cos y_2 \\ \sin y_1 = \sin y_2 \end{cases}$$

W takim razie, jak wiadomo z trygonometrii ele-

mentarnej,

$$y_2 = y_1 + 2k\pi$$

gdzie k jest liczbą całkowitą. Można więc napisać, że

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = x_2 + i(y_1 + 2k\pi) = x_1 + iy_1 + 2k\pi i$$

A więc

$$z_2 = z_1 + 2k\pi i$$

co należało udowodnić.

Pozwala nam to rozwiązać równanie:

$$e^z = Z$$

lub też

$$z = \log_e Z,$$

gdzie Z jest liczbą daną. Odrazu można powiedzieć, że to równanie posiada nieskończenie wiele rozwiązań, różniących się o wielokrotność $2\pi i$. Jedno z tych rozwiązań, czyli jedną z wartości funkcji logarytmicznej nazwiemy wartością główną, którą oznaczać będziemy przez

$\text{Log } Z$.

$$\log_e Z = \text{Log } Z + 2k\pi i$$

Można napisać liczbę zespoloną Z , uwidaczniając jej moduł i amplitudę

$$Z = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Jeżeli przytem

$$Z = x + iy.$$

wówczas

$$e^z = e^{i(\cos y + i \sin y)} = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Równość tych liczb zespolonych pociąga za sobą dwie równości w zakresie liczb rzeczywistych:

$$R = e^x$$

$$y = \alpha + 2k\pi$$

Logarytmując pierwszą równość, znajdziemy:

$$x = \log_e R$$

Otrzymany zatem wzór następujący, będący określeniem logarytmu liczby zespolonej

$$\log_e Z = \log_e R + i(\alpha + 2k\pi).$$

Jeżeli założymy, że

$$k = 0$$

zaś

$$0 \leq \alpha < 2\pi,$$

to otrzymamy wartość główną funkcji logarytmicznej:

$$\text{Log}_e Z = \log_e R + i\alpha$$

UOGÓLNIONE TWIERDZENIE O WARTOŚCI POŚREDNIEJ:

Dowiedliśmy w swoim czasie, że jeżeli funkcja $f(x)$ w przedziale (a, b) jest ciągła i posiada w każdym punkcie tego przedziału jednoznacznie określoną pochodną

$$f'(x), \text{ to}$$

$$f(b) - f(a) = (b-a) \cdot f'(\xi)$$

gdzie ξ jest punktem pośrednim pomiędzy a i b .

$$a < \xi < b$$

Twierdzenie to można uogólnić, wprowadzając pochodne rzędu drugiego, trzeciego i t.d.

Przypuśćmy więc, że funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale (a, b) , posiada w każdym punkcie przedziału dwie pochodne: $f'(x)$ i $f''(x)$. Weźmy pod uwagę funkcję:

$$\Phi(x) = f(b) - f(x) - (b-x) \cdot f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2(b-a)} \{ f(b) - f(a) - (b-a) \cdot f'(a) \}$$

Ta funkcja staje się zerem, gdy $x=a$, oraz gdy $x=b$.

Istotnie:

$$\Phi(a) = f(b) - f(a) - (b-a) \cdot f'(a) - \{ f(b) - f(a) - (b-a) \cdot f'(a) \} = 0$$

$$\Phi(b) = f(b) - f(b) = 0.$$

Utwórzmy pochodną tej funkcji

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= -f'(x) - (b-x)f''(x) + \frac{2(b-x)}{(b-a)} \{ f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) \} \\ &= -f'(x) - (b-x)f''(x) + \frac{2(b-x)}{(b-a)} \{ f(b) - f(a) - (b-a)f'(a) \} \\ &= -\frac{(b-a)^2}{2} f''(x). \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $\Phi(x)$ w punktach a i b przyjmuje wartość 0, więc na mocy twierdzenia Rolle'go musi istnieć pomiędzy a i b /z wyłączeniem a i b /

taka wartość ξ , że

$$\Phi'(\xi) = 0,$$

czyli, że

$$\frac{2(b-\xi)}{(b-a)^2} \left\{ f(b) - f(a) - (b-a) \cdot f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi) \right\} = 0$$

Pierwszy czynnik powyższego iloczynu nie może równać się zeru, więc drugi czynnik musi być zerem, a zatem

$$f(b) = f(a) + (b-a) \cdot f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(\xi)$$

Jest to wzór wyznaczający wartość średnią dla pochodnej drugiego rzędu. Można wzór ten napisać również w innej postaci. Oznaczmy:

$$b-a = h$$

skąd

$$b = a + h$$

oraz

$$\xi = a + \theta h$$

gdzie

$$0 < \theta < 1$$

Wówczas

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a + \theta h)$$

Porównajmy to z wzorem, wyznaczającym wartość średnią dla pochodnej pierwszego rzędu:

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a + \theta h).$$

Analogja, zachodząca pomiędzy temi wzorami prowadzi nas do dalszego uogólnienia tych wzorów. Uogólnieniem tym właśnie, ^{jest} następujące

TWIERDZENIE TAYLORA - czyli twierdzenie ogólne o wartości pośredniej. Niech będzie dana funkcja $f(x)$, ciągła w przedziale $[a, b]$ i posiadająca w tym przedziale pochodne n pierwszych rzędów. Utwórzmy funkcję:

$$1/1 \quad \Phi(x) = F(x) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n \cdot F'(a),$$

gdzie

$$1/2 \quad F(x) = f(b) - f(x) - (b-x) \cdot f'(x) - \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) - \\ - \frac{(b-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x) - \dots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(x).$$

Funkcja 1/1/ równa się zeru przy $x=a$ i przy $x=b$:

$$\Phi(a) = F(a) - F(a) = 0;$$

$$\Phi(b) = F(b) = 0.$$

Utwórzmy jej pochodną:

$$1/3 \quad \Phi'(x) = F'(x) + \frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}$$

przyczem

$$F'(x) = -f'(x) - (b-x) \cdot f''(x) + f'(x) - \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot f'''(x) + \\ + (b-x) \cdot f''(x) - \frac{(b-x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f^{(4)}(x) + \frac{(b-x)^2}{1 \cdot 2} \cdot f'''(x) - \dots$$