

# ANALIZA I

WEDŁUG WYKŁADÓW

**prof. J. Rudnickiego**

Rok 1920/21



WARSZAWA.

NAKŁADEM KOMISJI WYDAWNICZEJ TOW. BRATNIEJ POMOCY STUD. POLIT. WARSZ

Drukarnia i Litografia „SATURN” Marszałkowska 91.

i.z. 3809



C. 1054

D. 54

W S T Ę P.

Rachunek różniczkowy i całkowy opiera się na trzech pojęciach zasadniczych: funkcji, ciągłości i granicy. Te zaś pojęcia są oparte na pojęciu liczby, które się znów sprowadza do pojęcia liczby całkowitej dodatniej. A więc liczba całkowita dodatnia stanowi podstawę analizy współczesnej, jest fundamentem na którym stoi gmach rachunku różniczkowego i całkowego. Ścisła teoria liczb rzeczywistych powstała niedawno, bo dopiero w wieku XIX. Początki analizy jednak sięgają czasów znacznie dawniejszych. Już grecy starożytni rozwiązyali niektóre zagadnienia, należące do dziedziny rachunku różniczkowego i całkowego. Do typów zagadnień należą: przeprowadzenie stycznej do krzywej, obliczenie pola figury i objętości bryły. Rozwój każdego z tych zagadnień szedł pierwotnie drogą swoistą, odrębną do drogi, któreimi postępowały pozostałe zagadnienia. Gdy jednak się okazało, że może istnieć wspólna metoda dla tych zagadnień, powstała analiza. Za twórców jej uznać można Leibniza i Newtona. Oprócz nich wymienić należy Descartes'a /Kartezjusza/, twórcę analitycznej geometrii. Wprowadzona przez tego uczonego metoda graficznego przedstawiania zależności pomiędzy liczbami, wielkie miała znaczenie dla

dalszego rozwoju analizy.

Przystąpimy teraz do rozwiązania kilku zagadnień z dziedziny analizy sposobami, które istniały już przed Leibnizem i Newtonem. Prowadzimy dwie proste wzajemnie prostopadłe. Jedną z nich nazywamy osią odciętych  $/x/$ , drugą zaś osią rzędnych  $/y/$ . Położenie punktu na płaszczyźnie rysunku oznaczmy przez podanie jej odległości od obu osi. Odległość od osi rzędnych nazywamy odciętą danego punktu, a odległość od osi odciętych - jego rzędną. Odcięta i rzędna punktu stanowią jego współrzędne. Gdybyśmy wzięli tylko bezwzględne odległości punktu od osi, to istniałyby 4 punkty, mające te same współrzędne. Aby więc położenie każdego punktu było jednoznacznie przez jego współrzędne oznaczone, umawiamy się, że będziemy uważać za dodatnie odcięte punktów, leżących na prawo od osi  $y$  i rzędne punktów, znajdujących się nad osią  $x$ . Osie dzielą płaszczyznę na 4 części, zwane ćwiartkami. Znaki współrzędnych punktów, leżących w każdej z ćwiartek, są następujące:

w I ćwiartce	$x > 0$	$y > 0$
w II " "	$x < 0$	$y > 0$
w III " "	$x < 0$	$y < 0$
w IV " "	$x > 0$	$y < 0$

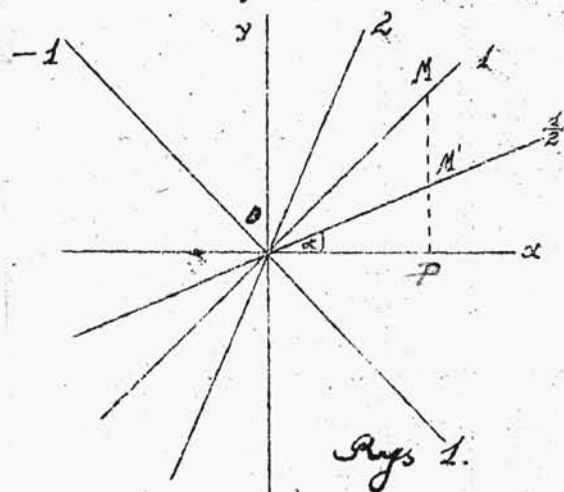
Pojęcie funkcji jest równoznacznym z pojęciem odpo-

wiedności. Jeżeli mamy dwie wielkości zmienne, powiązane ze sobą w ten sposób, że każdej wartości pierwszej zmiennej odpowiada pewna wartość drugiej zmiennej, mówimy, że zachodzi związek funkcyjności; np.  $y = kx$ ;  $y = ax^2$ ;  $y = tg x$   $y = 2^x$ . W przykładach tych  $x$  możemy zmieniać dowolnie, przyczem otrzymamy odpowiednią wartość na  $y$ ; dlatego  $x$  nazywamy zmienną niezależną, a  $y$  zmienną zależną, czyli funkcją. Jednej wartości zmiennej niezależnej może odpowiadać kilka wartości funkcji, np.  $y^2 = x$  czyli  $y = \pm \sqrt{x}$ . Dla niektórych wartości  $x$  może nie istnieć odpowiednia wartość  $y$ , np. gdy  $y = \arcsin x$  dla  $x > 1$  /ograniczając się do wartości rzeczywistych/.

Zilustrujemy teraz najprostszą zależność funkcyjną:  $y = kx$ . Jest to t.zw. zależność proporcjonalna. Wielkość  $k$  nazywa się współczynnikiem proporcjonalności. Wykres, jak wiadomo z geometrii analitycznej, da nam linię prostą, przechodzącą przez początek układu. Jeżeli  $k$  będziemy zmieniać, położenie prostej ulegnie zmianie. Przyjmijmy, że  $k = 1$ ; wówczas  $y = x$ . Prosta odpowiadająca jest dwusieczną kąta między osiami, gdyż tylko punkty na dwusiecznej położone mają obie współrzędne równe. Założmy następnie, że  $k = \frac{1}{2}$ ; zatem  $y = \frac{1}{2}x$ . Aby prostą wykreślić, dzielimy rzędną dowolnego punktu poprzednio prostej na połowy i łączymy z punktem 0. Nisza  $k = \frac{1}{4}$  to

$y = \frac{1}{4}x$ . Możemy przyjąć również  $k > 1$ . Jeżeli  $k = 2$ ,  
 $y = 2x$ ;  $k = 4$ ,  $y = 4x$ . Widoczną jest rzeczą, że istnieje  
 zależność pomiędzy współczynnikiem proporcjonalności  
 a nachyleniem prostej. Łatwo jest podać związek pomię-  
 dzy  $k$  i kątem  $\alpha$ , jaki tworzy prosta z osią  $x$ .

Z równania  $y = kx$  wynika, że  $\frac{y}{x} = k = \frac{MP}{OP} \cdot \operatorname{tg} \alpha$ ; czyli  
 $k = \operatorname{tg} \alpha$ . Gdy więc współczynnik kierunkowy się zwiększa,  
 to i kąt rośnie, i odwrotnie. Jeżeli  $k > 0$ , to i  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ,  
 a sam kąt  $\alpha$  zawiera się pomiędzy  $0^\circ$  a  $90^\circ$ ; prosta prze-



Rys. 1.

biega przez I i III ćwiartkę.

Jeżeli zaś  $k < 0$ , to  $180^\circ > \alpha > 90^\circ$

i prosta przechodzi

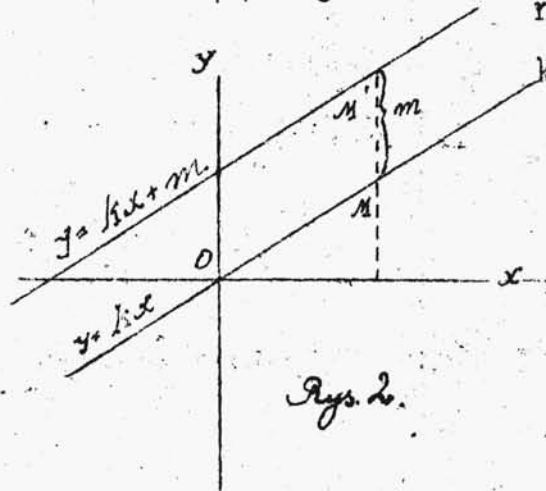
przez ćwiartki II i IV. W wypad-

ku, gdy  $k = -1$ ,  $y = -x$ , prosta  
 jest dwusieczną kąta II i IV

ćwiartki. Ponieważ od współczyn-  
 nika proporcjonalności  $k$  zależy  
 kierunek prostej, nazywa się on

też współczynnikiem kierunkowym

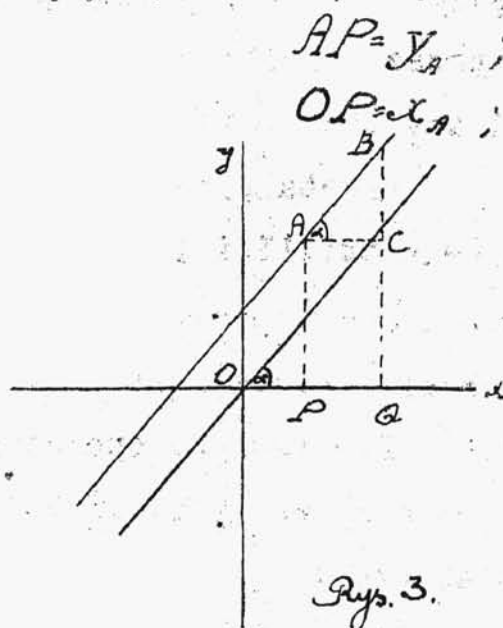
Wszystkie proste, mające ten  
 sam współczynnik kierunkowy, są  
 równoległe, np. 1/1  $y = kx$  i  
 1/2  $y = kx + m$ . Wynika to wprost  
 z określenia: mając prostą 1/1



Rys. 2.

możemy wykreślić prostą /2/, powiększając każdą rzędną prostej /1/ o  $m$  jednostek /w praktyce wystarcza powiększenie 2-ch rzędnych/. Z równoległoboku, utworzonego przez te 2 rzędne i proste dane, wynika równoległość tych prostych.

Spółczynnik kierunkowy prostej można określić również jako stosunek różnicy dwu wartości rzędnych do różnicy dwu wartości odciętych, czyli przyrostu rzędnych do przyrostu odciętych. Oznaczmy /rys.3/



$$AP = y_A ; BQ = y_B$$

$$OP = x_A ; OQ = x_B$$

Poprowadzmy z  $A$  równoległą do  $x$  i utwórzmy różnicę wartości rzędnych i odciętych punktów  $A$  i  $B$ .

$$AC = PQ = OQ - OP ; AC = x_B - x_A$$

$$BC = BQ - CQ = BQ - AP ;$$

$$BC = y_B - y_A$$

Rys. 3.

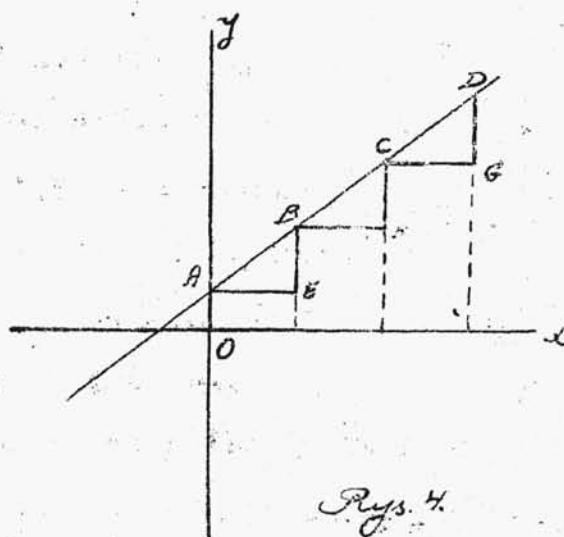
Stosunek różnicy rzędnych do różnicy odpowiadających wartości odciętych

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha = k$$

Często przyrosty oznaczamy przez  $\Delta$ .

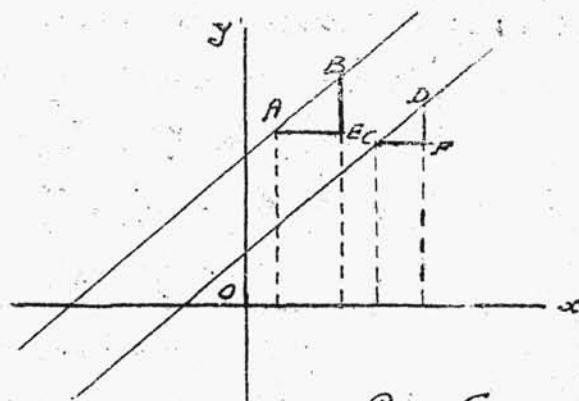
$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Dla prostej równym przyrostem odciętych odpowiadają równe przyrosty rzędnych. Gdy odcięte będziemy powiększać o odcinki  $AE = BF = CG$  to rzędne wzrosną o  $BE = EF = DG$



Rys. 4.

/rys.4/. Dla wszystkich równoległych jest stosunek przyrostu rzędnych do przyrostu odciętych jednakowy. Wynika to z podobieństwa trójkątów  $ABE$  i  $CDP$  /rys.5/.

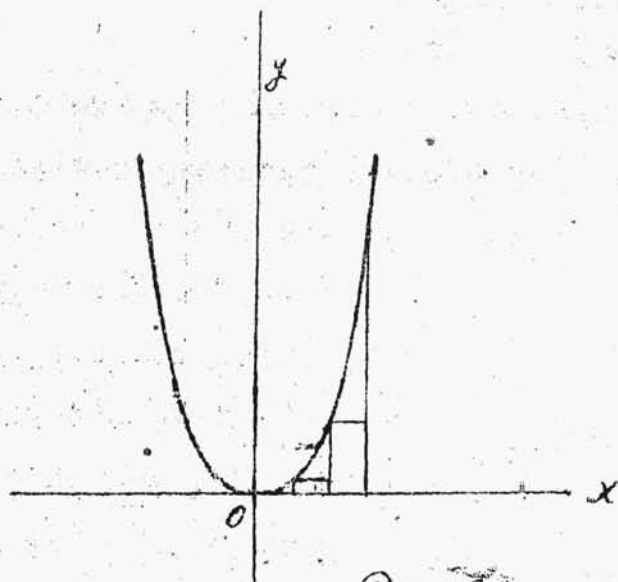


Rys. 5

Zbadajmy teraz stosunek  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  dla linii krzywej. Weźmy np. równanie  $y = x^2$ . Wykres da nam linię krzywą, symetryczną względem osi  $y$ , zwaną parabolą /rys.6/. Jest

widocznym z rysunku, że równym przyrostom odciętych nie odpowiadają równe przyrosty rzędnych. Widac to zresztą i z tabliczki:





Rys. 6.

$x$	$y$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Podczas gdy różnicą odciętych stale jest 1, różnice rzędnych rosną jak postęp arytmetyczny 1, 3, 5, .....

Obierzemy na paraboli

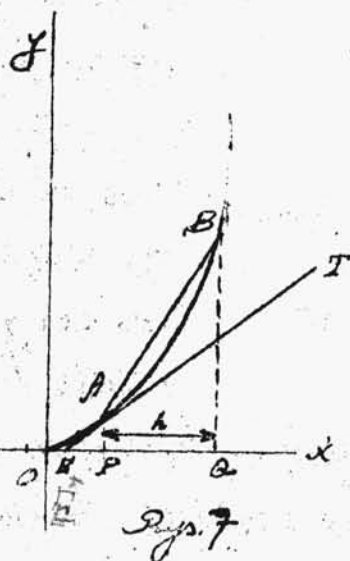
[rys. 7] dwa dowolne punkty  $A$  i  $B$  i połączmy je prostą. Im bardziej są te punkty odległe od środka układu współrzędnych, tem spadziłość cięciwy  $AB$  jest większa. Znajdźmy jej współczynnik kierunkowy, gdy punkt  $A$  ma

współrzędne  $x_A$  i  $y_A$ , a punkt  $B$  -  $x_B$  i  $y_B$ .

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Lecz współrzędne punktów  $A$  i  $B$  muszą czynić zadość równaniu paraboli, czyli  $y_A = x_A^2$  i  $y_B = x_B^2$ . A zatem

$$k = \frac{x_B^2 - x_A^2}{x_B - x_A}$$



Rys. 7.



ponieważ zaś  $x_B - x_A \neq 0$

$$l = x_B + x_A = OA + OP$$

Oznaczmy różnicę  $x_B - x_A = PQ$  przez  $h$ . Możemy napisać

$x_B - x_A = h$ ; stąd  $x_B = x_A + h$ . A więc

$$k = \operatorname{tg} \alpha = 2x_A + h$$

Wyobraźmy sobie teraz, że punkt  $A$  pozostaje bez zmiany, punkt  $B$  zaś przesuwa się wzdłuż paraboli. W wyrażeniu poprzednim zmieniać się będzie tylko składnik  $h$ .

Gdy punkt  $B$  zbliża się do  $A$ ,  $h$  maleje. Można postawić teraz zadanie w sposób odwrotny: mając dany punkt  $A$  oraz

$h$ , znaleźć  $B$ . Odwracając poprzednie rozumowanie, znajdziemy, że  $h = k - 2x_A$ . Im punkt  $B$  jest bliższy  $A$

tem współczynnik kierunkowy cięciwy mniej różni się od  $2x_A$ , czyli średnia spadistość łuku  $AB$  jest bliższa

$2x_A$ . Wielkość  $2x_A$  jest miarą spadistości w punkcie

$A$ . Wykreślmy teraz prostą, przechodzącą przez punkt  $A$

i mającą współczynnik kierunkowy  $2x_A$ . Ta prosta nie będzie już cięciwą. W rzeczy samej, gdyby prosta  $AT$  przecinała parabolę, to oznaczwszy rzut cięciwy na oś od-

ciętych przez  $h$ , znaleźlibyśmy, że jej współczynnik kierunkowy równa się  $2x_A + h$ ; to zaś zgadza się z założeniem tylko wtedy, gdy  $h = 0$ . Jeżeli zaś rzut cięciwy

równa się 0, to i sama cięciwa musi się równać 0. Łatwo

dowieść, że każda inna prosta, przechodząca przez punkt

$A$ , t.j. dla której  $k \neq 2x_0$ , przecina parabolę /otrzymamy cięciwę, której rzut  $k = k - 2x_0$ . Prosta  $AT$  nazywamy styczną do paraboli w punkcie  $A$ . Współczynnik kierunkowy stycznej w danym punkcie nazywamy spadziścią łuku krzywej w tym punkcie. Wielkość  $2x_0$  jest spadziścią paraboli w punkcie  $A$ . Opierając się na powyższym, możemy wystawić styczną w dowolnym punkcie paraboli. Z tego punktu prowadzimy tylko promień pod kątem, którego tangens równa się podwójnej odciętej. Przedłużmy styczną do przecięcia z osią  $x$ .

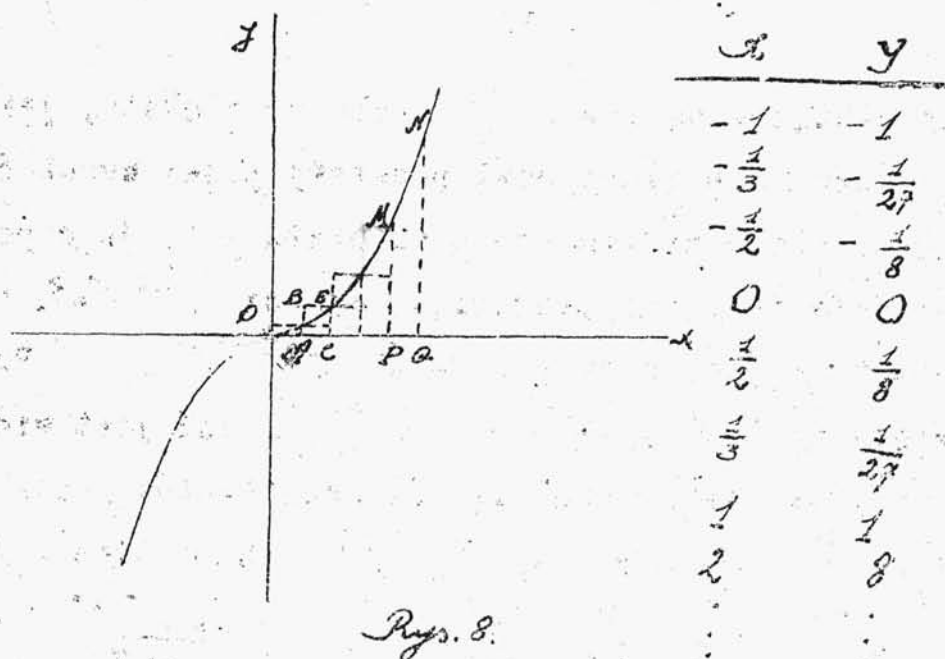
Ale  $AP = OP^2$  ; więc  $k = \frac{AP}{EP} = 2OP$

$\frac{OP^2}{EP} = 2OP$  . Stąd  $EP = \frac{OP}{2}$

Jeżeli zatem połączymy dany punkt paraboli ze środkiem jego odciętej, otrzymamy styczną do paraboli w tym punkcie. Stosując podobną metodę, moglibyśmy poprowadzić styczne i do innych krzywych.

Rozwiążemy teraz drugie zagadnienie, wchodzące w zakres rachunku całkowego. Znajdziemy, mianowicie, pole figury, zawarte między łukiem krzywej, rzędną jednego jej punktu i osią  $x$ .

Zbudujmy krzywą, wyrażoną równaniem  $y = x^3$ . Obie współrzędne każdego punktu krzywej są jednakowego znaku, krzywa więc leży tylko w ćwiartce I i III.



Przedewszystkiem należałoby określić, co nazywamy polem narysowanej figury; lecz rozwiążemy zagadnienie tak, jak ono było historycznie rozwiązane i samą definicję pola odłożymy na koniec. Odkładamy odcietą  $OP$ , równą jednostkowej długości i zbudujemy odpowiednią rzędną. Obliczymy pole, zawarte między  $MP$ ,  $OP$  i krzywą. Podzielmy  $OP$  na  $n$  części równych 1, uważając punkty podziału za końce odciętych punktów krzywej, wystawmy odpowiednie rzędne. Z kolejnych rzędnych budujemy prostokąty opisane i wpisane w figurę, biorąc za podstawy części odciętej  $OP$ , a za wysokość rzędne z prawej strony dla prostokątów opisanych i z lewej dla wpisanych. Znajdziemy teraz pole figury, złożonej z szeregu prostokątów wpisanych, czyli sumę pól tych prostokątów. Oznaczmy ją przez  $S_n$ . Wszystkie pod-

stawy prostokątów są równe  $\frac{1}{n}$ . Pole prostokąta, jak wiadomo, równa się iloczynowi podstawy przez wysokość. Ponieważ wysokość pierwszego prostokąta = 0, jego pole też = 0. Pole drugiego prostokąta wynosi  $\frac{1}{n} \cdot AB$ , ale  $AB = OA_1^3 = \left(\frac{1}{n}\right)^3$ ; więc pole =  $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^4}$ . Pole trzeciego =  $\frac{1}{n} \cdot CE = \frac{1}{n} \cdot OC^3 = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{2}{n}\right)^3 = \frac{2^3}{n^4}$ . Już jest widoczne ogólne prawo tworzenia się pól prostokątów. Pole ostatniego z nich równa się  $\frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^3$ . Suma tych pól

$$S_n = \frac{1}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \dots + \frac{(n-1)^3}{n^4}$$

zbadajmy teraz pola prostokątów opisanych. Zauważymy, że każdemu z nich, oprócz ostatniego, odpowiada równy prostokąt wpisany /stojący po lewej stronie/. Suma więc pól prostokątów opisanych będzie większą od sumy pól prostokątów wpisanych o pole ostatniego prostokąta opisanego, t.j. o  $\frac{1}{n} \cdot MP = \frac{1}{n}$ , gdyż  $MP = 1$ .

Oznaczywszy ją przez  $S_n$ , otrzymamy:

$$S_n = \frac{1}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \frac{3^3}{n^4} + \dots + \frac{(n-1)^3}{n^4} + \frac{n^3}{n^4}$$

Wynosząc w obu wzorach  $\frac{1}{n^4}$  przed nawias, znajdziemy:

$$I_n = \frac{1}{n^4} [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3]$$

$$S_n = \frac{1}{n^4} [1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3]$$

Obliczmy teraz sumę sześciątów kolejnych liczb.

Zwróćmy więc uwagę na to, że

$$1^3 + 2^3 = 9 = (1+2)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$$

i t.d.

Za pomocą metody indukcji matematycznej dowiedzimy, że suma sześciątów liczb kolejnych jest równa kwadratowi sumy tych liczb. Założmy więc, że powyższy wzór jest słuszny dla  $k$  liczb. Postaramy się udowodnić, że musi on być słusznym dla  $k+1$  liczb. Przypuszczamy zatem, że

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = (1+2+3+\dots+k)^2$$

Do obu stron równania dodajemy po  $(k+1)^3$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = (1+2+\dots+k)^2 + (k+1)^3$$

$$\text{Ale } (k+1)^3 = (k+1)^2(k+1) = (k+1)^2 \cdot k + (k+1)^2 = 2(k+1) \cdot \frac{(k+1)k}{2} + (k+1)^2$$

$$+ (k+1)^2; \quad (k+1)^3 = 2(k+1)(1+2+3+\dots+k) + (k+1)^2$$

A więc

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = [(1+2+3+\dots+k) + (k+1)]^2$$

Jeżeli zatem jest słuszny dla  $k$  sześciątów kolejnych liczb, to musi być słusznym i dla  $k+1$  sześciątów. Myśmy sprawdzili słuszność tego wzoru dla  $k=3$  musi więc wzór być słusznym dla  $k=4$  Ponieważ zaś sprawdzi się dla  $k=4$ , to sprawdzi się i dla  $k=5$  i t.d. Rozumując w ten sposób dowiedzimy, że

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2 = \left[ \frac{(n+1)n}{2} \right]^2$$

Wracając teraz do sumy pól prostokątów otrzymamy:

$$S_n = \frac{1}{n} \left[ \frac{(n+1)n}{2} \right]^2 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4n} = \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

$$S_n = \frac{1}{n} [1+2+\dots+(n-1)]^2 = \frac{1}{n} \left[ \frac{n(n-1)}{2} \right]^2 = \frac{n^2(n-1)^2}{4n} = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2$$

Jeżeli będziemy liczbę  $n$  zwiększać, suma pól prostokątów wpisanych będzie rosła. Zawsze jednak będzie zachodzić nierówność  $S_n < \frac{1}{4}$ . Gdy  $n$  rośnie nieograniczenie ( $n \rightarrow \infty$ ), suma dąży do  $\frac{1}{4}$  ( $S_n \rightarrow \frac{1}{4}$ ). Powiadamy, że jest granicą zmiennej  $S_n$ . Gdybyśmy wzięli teraz prostokąty opisane, to przekonalibyśmy się, że im  $n$  jest większe, tem  $S_n$  jest mniejsze; ale zawsze  $S > \frac{1}{4}$ . Przyjmijmy teraz, że  $n=2$  i liczbę tę podwajamy. Otrzymamy dwa ciągi liczb:

1/  $S_2 < S_4 < S_8 < \dots < \frac{1}{4}$  ciąg rosnący.

2/  $S_2 > S_4 > S_8 > \dots > \frac{1}{4}$  ciąg malejący

1/ Pierwszy z nich jest rosnący, drugi malejący;

2/ wszystkie liczby drugiego ciągu są większe od wszystkich liczb pierwszego ciągu; 3/ różnica między wyrazami odpowiednimi obu ciągów może być mniejszą od dowolnie małej liczby. Dwa ciągi, spełniające trzy powyższe warunki, wyznaczają pewną, w zupełności określoną liczbę mniejszą od wszystkich wyrazów drugiego ciągu i większą od wszystkich wyrazów pierwszego ciągu, którą nazywamy wspólną granicą obu ciągów. Dla rozpatrywanych przez nas ciągów wspólną granicą jest  $\frac{1}{4}$ . Mówimy, że szukane pole równa się  $\frac{1}{4}$ , albo że krzywa dzieli pole kwadratu zbudowanego na współrzędnych punktu  $M$  w stosunku 3:1. Możemy sformu-



łować teraz definicję pola. Pole zawarte między łukiem krzywej i współrzędnymi danego punktu, jest wspólną granicą pól prostokątów wpisanych i opisanych, gdy ich liczba  $n$  rośnie nieograniczenie. Weźmy teraz dowolną odciętą  $OB=x$ . Łatwo znajdziemy pole nowej figury, jako funkcję  $x$ . Podzielmy  $x$  na  $n$  równych części. Każda z nich  $= \frac{x}{n}$ . Budujemy prostokąty wpisane i opisane. Suma ich pól:

$$S_n = \frac{x}{n} \left( \frac{x}{n} \right)^3 + \frac{x}{n} \left( \frac{2x}{n} \right)^3 + \dots + \frac{x}{n} \left[ \frac{(n-1)x}{n} \right]^3 = \frac{x^4}{4} [1^3 + 2^3 + \dots + n^3]$$

$$S_n = \frac{x^4}{4} (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = \frac{x^4}{4} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^2 (n+1)^2$$

Gdy  $n \rightarrow \infty$ , będziemy mogli utworzyć znowu dla ciągu zbieżnego. Ich wspólną granicą będzie  $\frac{x^4}{4}$ . Temu więc równać się będzie szukane pole  $ONQ$ ; czyli  $S(x) = x^4 \cdot \frac{1}{4}$ . Zatem krzywa dzieli pole prostokąta, zbudowanego na współrzędnych punktu  $N$  znów w stosunku 3:1.

### LICZBY NIEWYMIERNE.

Już poprzednie wykłady wskazują nam na konieczność rozszerzenia zakresu liczb przez wprowadzenia liczb niewymiernych. Mówiliśmy, że funkcja wyraża zależność między dwiema zmiennymi. Wykres funkcji opiera się na podporządkowaniu parze liczb punktu, a to z kolei oparte jest na podporządkowaniu liczbie odcinka. Zachodzi py-



tanie, czy każdemu odcinkowi odpowiada pewna liczba, i czy każdej liczbie odpowiada ściśle określony odcinek. Otóż dopiero po wprowadzeniu liczb niewymiernych między zbiorem wszystkich liczb i zbiorem wszystkich możliwych odcinków istnieje odpowiedniość doskonała, t.j. każdemu odcinkowi odpowiada jedna liczba i każdej liczbie odpowiada jeden odcinek. Tylko dzięki tej odpowiedniości możliwa jest interpretacja geometryczna, a więc i wykres, ilustrujący zależność między dwiema zmiennymi.

W zakresie liczb wymiernych mierzenie odcinka nie zawsze byłoby możliwe /odcinki niewspółmierne z jednostką/. Aby więc można było każdy odcinek zmierzyć, t.j. wyrazić go za pomocą liczby, należy samo pojęcie liczby rozszerzyć i pogłębić. Najpodstawowszym jest pojęcie liczby całkowitej. Na tych właśnie liczbach określamy cały szereg działań: dodawanie, odejmowanie, mnożenie. Jednak działanie odwrotne do mnożenia, dzielenia, w zakresie liczb całkowitych nie zawsze jest możliwe. Dlatego wprowadzamy liczby ułamkowe. Do tego samego prowadzi również mierzenie wielkości /np. długości przy pomocy metra/. Powstaje więc zbiór liczb wymiernych t.j. ułamków właściwych i niewłaściwych. Pitagoras wykazał, że to jeszcze nie wystarcza, aby umożliwić zmierzenie każdego odcinka. Na innej drodze również możemy się przekonać, że wprowadzenie ułamków

jeszcze nie jest dostatecznym rozszerzeniem kresu liczb. Mianowicie działaniem wyższym od mnożenia jest potęgowanie. Jeżeli wykładnik jest liczbą całkowitą jest to zawsze możliwe. Lecz działanie odwrotne w wypadku ogólnym jest niemożliwe. Niema np. liczby wymiernej, której kwadrat równałby się 2. Należy więc tworzyć nowe liczby, zwane niewymiernymi. Pozwoli to nam rozwiązać oba zagadnienia: znaleźć pierwiastek każdej liczby dodatniej i zmierzyć każdy odcinek.

Grecy nie znali teorii liczb rzeczywistych; zastępowała ją ponieważ teoria proporcji. Wszystkie działania były wykonywane geometrycznie na odcinkach. Dopiero w XIX wieku nastąpiła rewizja pojęć zasadniczych, dotyczących się liczby. Pojawiły się liczne prace, dotyczące zakresu teorii liczb. Na wymienienie zasługują rozprawy Dedekinda, Cantora i Weierstrassa. Rozprawy Dedekinda i Cantora zawierają dwa punkty widzenia na liczby niewymierne. Pierwsza z nich oparta jest na pojęciu przekroju, druga na pojęciu ciągów.

TEORIA DEDEKINDA. Przekrojem nazywamy podział wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy, z zachowaniem następujących warunków: każda liczba I klasy ma być mniejszą od każdej liczby II klasy; ani jedna klasa nie może być pusta /t.j. nie zawierać wcale liczb/; obie klasy razem