

Jest to krzywa podobna do astroidy.

TEORIA SZEREGÓW.

Teoria szeregów ma na celu podanie określenia sumy nieskończonej liczby składników oraz metod operowania takimi sumami. Wyobraźmy sobie, że mamy nieskończoną liczbę składników, stanowiących wyrazy pewnego ciągu

$$/1/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots$$

Powiadamy, że składniki te tworzą s z e r e g. Sumę skończonych liczb wyrazów szeregu nazywamy s u m ą c z ę ś c i o w ą, oznaczać ją będziemy literą s ze wskaźnikiem równym liczbie składników tej sumy. A więc:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

.....

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Sumy częściowe szeregu /1/ tworzą pewien ciąg nieskończony

$$/2/ \quad s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_n, \dots$$

Jeżeli wówczas, gdy n dąży do nieskończoności,

ciąg /2/ dąży do granicy S , to tę granicę nazywamy sumą szeregu /1/. Jeżeli zatem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S$$

to wtedy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$$

Jeżeli szereg /1/ posiada sumę, czyli gdy ciąg /2/, utworzony z jego sum częściowych, dąży do granicy, to szereg /1/ nazywamy szeregiem zbieżnym. W przeciwnym razie mówimy, że szereg ten jest szeregiem rozbieżnym.

Znając wyrazy szeregu /1/, można oczywiście znaleźć sumy częściowe, a więc i ciąg /2/ przez nie utworzony, i odwrotnie: gdy znamy ciąg, jaki tworzą sumy częściowe, możemy znaleźć wszystkie wyrazy szeregu. W rzeczy samej, ponieważ

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n,$$

zaś

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$$

więc

$$s_n - s_{n-1} = a_n$$

Przypuśćmy np., iż wiadome jest, że

$$s_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}.$$

W takim razie

$$a_1 = s_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = s_2 - s_1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n} - \frac{2^n-1}{2^{n-1}} = \frac{2^{n+1}-2^{n+1}+2}{2^n}$$

czyli

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

Sumą szeregu

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

jest

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}-1}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Przypuśćmy teraz, że

$$s_n = \frac{n}{n+1}$$

Zatem

$$a_1 = s_1 = \frac{1}{2};$$

$$a_2 = s_2 - s_1 = \frac{1}{6};$$

$$a_3 = s_3 - s_2 = \frac{1}{12};$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)},$$

czyli

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

Szereg więc będzie można przedstawić w postaci:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

więc szereg ten jest zbieżny, jego sumą jest liczba 1

Rozważmy teraz szereg będący postępem geometrycznym:

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n + \dots$$

Jego sumami częściowymi są:

$$s_1 = a;$$

$$s_2 = a + aq;$$

$$s_3 = a + aq + aq^2$$

$$s_n = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a}{1 - q} (1 - q^n)$$

Należy rozpatrzyć oddzielnie kilka przypadków, zależnie od wykładnika q .

$$1/ \quad q > 1$$

W tym przypadku

$$q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1 - q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - q^n)$$

nie istnieje, szereg zatem jest rozbieżny.

$$2/ \quad -1 < q < 1$$

W takim razie $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{a}{1-q}$$

Szereg zatem jest zbieżny, jego suma

$$S = \frac{a}{1-q}$$

3/ $q = \pm 1$

Ten przypadek rozpada się na dwa podrzędne:

a/ $q = +1$

Wówczas $s_n = a \cdot n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nie istnieje

b/ $q = -1$

W takim razie $s_{2n} = 0$; $s_{2n+1} = a$. Zatem i tutaj

$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ nie istnieje.

A więc w przypadku 3/ szereg jest rozbieżny.

4/ $q < -1$

Ponieważ w tym przypadku q^n granicy nie posiada więc szereg jest rozbieżny.

A zatem szereg, który jest postępem geometrycznym jest zbieżny tylko w przypadku 2/, t.j. gdy jego wykładnik jest zawarty pomiędzy -1 , a $+1$, z wykluczeniem krańców przedziału.

Zajmiemy się teraz z kolei rzeczy badaniem własności szeregów zbieżnych. Niech dany będzie szereg zbieżny

1/ $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$

Jeżeli do szeregu tego dodamy jeszcze jeden wy-

raz, np. a , to nowy szereg

$$a + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

również będzie zbieżny i sumą jego będzie $S + a$.

Istotnie, gdy oznaczymy sumę $n+1$ wyrazów otrzymanego szeregu przez S'_{n+1} , to $S'_{n+1} = a + S_n$, a więc

$$\lim S'_{n+1} = a + S$$

Podobnie, zamiast jednego, moglibyśmy dodać do szeregu /1/ więcej wyrazów /zawsze liczbę skończoną/, przyczem otrzymany szereg byłby też zbieżny.

Stąd wynika również, że od szeregu /1/ można odjąć pewną liczbę wyrazów /skończoną/, szereg jednak nadal będzie zbieżny, a suma jego zmniejszy się o sumę odjętych wyrazów, np.

$$a_3 + a_4 + \dots + a_n + \dots = S - a_1 - a_2$$

A zatem można do szeregu dodać lub od niego odjąć skończoną liczbę wyrazów, przyczem szereg pozostanie zbieżny.

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregu zbieżnego /1/ pomnożyć przez liczbę k , to szereg

$$k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + \dots + k \cdot a_n + \dots$$

będzie zbieżny i jego sumą będzie $k \cdot S$. Oznaczmy sumę n wyrazów otrzymanego szeregu przez S'_n . Oczywiście

$$S'_n = k \cdot S_n$$

a więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s'_n = k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = k \cdot S$$

Jeżeli dany jest szereg zbieżny /1/, to każdy inny szereg, utworzony z sum częściowych tego szeregu np.

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \dots$$

jest też zbieżny i posiada tę samą granicę, co szereg /1/.

Jeżeli dane są dwa szeregi zbieżne:

$$1/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S;$$

$$2/ \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots = S';$$

to szereg, którego wyrazy są sumą odpowiednich wyrazów danych szeregów

$$13/ \quad (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots + (a_n + b_n) + \dots$$

jest również zbieżny i jego sumą jest $S + S'$. Pamiętaj, że zamiast dwóch można dodawać 3, 4, ..., lecz zawsze liczbę skończoną szeregów zbieżnych.

Jeżeli szereg

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

jest zbieżny, to wyraz ogólny a_n musi dążyć do zera, gdy jego wskaźnik n rośnie nieograniczenie. Istotnie:

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

Gdy n rośnie nieograniczenie, to $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = S;$

a ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1}$, więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Jest to warunek konieczny, lecz niedostateczny zbieżności szeregów, istnieją bowiem szeregi rozbieżne, których wyraz ogólny dąży do zera. Rozpatrzmy np. słynny szereg harmoniczny:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Utwórzmy sumy częściowe:

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$s_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

czyli

$$s_{(2^2)} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

Podobnie

$$s_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2};$$

czyli

$$s_{(2^3)} > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}.$$

Następnie

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right) > \\ > 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16};$$

czyli

$$S_{(2^k)} > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}.$$

Zapomocą indukcji zupełnej można udowodnić, że

$$S_{(2^n)} > 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Gdy $n \rightarrow \infty$, wówczas $S_{(2^n)} \rightarrow \infty$

A zatem sumy częściowe szeregu harmonicznego rosną nieograniczenie, jest to więc szereg rozbieżny.

Twierdzenia analogiczne do tych, które udowodnione zostały dla szeregów zbieżnych, można udowodnić dla szeregów rozbieżnych.

Jeżeli do szeregu rozbieżnego:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

dodamy, od niego odejmiemy, lub go pomnożymy przez jakąś liczbę, to otrzymany szereg będzie rozbieżny. Jeżeli natomiast dodamy do siebie odpowiednie wyrazy dwóch szeregów rozbieżnych, to o sumie ich nie z góry powiedzieć nie można: może to być szereg rozbieżny lub zbieżny, np. szeregi:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\ -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

są rozbieżne, jednak szereg, którego wyrazy są sumą odpowiednich wyrazów tych szeregów jest zbieżny:

$$0+0+0+0+\dots = 0$$

Można więc powiedzieć ogólnie, że zbieżność i rozbieżność szeregu zależą od nieskończonej liczby wyrazów, zmiana skończonej liczby wyrazów nie wpływa na zbieżność i rozbieżność szeregu.

Przejdziemy teraz do bardziej szczegółowego badania szeregów, których wszystkie wyrazy są tego samego znaku, np. dodatnie. /Oczywiście wystarczy, gdy będą dodatnie tylko wszystkie wyrazy, począwszy od pewnego miejsca, gdyż poprzednie wyrazy będziemy mogli odrzucić/. Przypuśćmy, że takim szeregiem jest:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Sumy częściowe tego szeregu będą stanowiły ciąg rosnący, ponieważ

$$a_{n+1} > 0$$
$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

a więc

$$S_{n+1} > S_n$$

Jeżeli zatem dla każdego n jest spełniony warunek, że $S_n < M$

t.j. jeśli sumy częściowe są ograniczone od góry, to szereg, którego wszystkie wyrazy są dodatnie lub ujemne /z wyjątkiem może liczby skończonej wyrazów/ jest

zbieżny. Jest to warunek konieczny i dostateczny zbieżności takiego szeregu.

Niezawsze jednak jest wygodnie poznawać w sposób powyższy, czy szereg jest zbieżny, czy nie, dogodniejsze są t.zw. kryteria, czyli cechy zbieżności szeregów Cauchy'ego i d'Alembert'a.

Twierdzenie pomocnicze o porównaniu 2-ch szeregów o wyrazach dodatnich.

Jeżeli wszystkie wyrazy szeregów:

$$/1/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$/2/ \quad b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots$$

dla $n > n_0$ są dodatnie ($a_n > 0, b_n > 0$) i lub równe zeru i przy wszystkich wartościach n mamy

$$b_n \leq a_n$$

i jeżeli szereg /1/ jest zbieżny, to i szereg /2/ jest zbieżny i jego suma jest nie większa od sumy szeregu

/1/.

W rzeczy samej, utwórzmy szeregi o wszystkich bez wyjątku wyrazach dodatnich:

$$/1'/ \quad a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$$

$$/2'/ \quad b_{n_0} + b_{n_0+1} + b_{n_0+2} + \dots$$

Jeżeli sumę częściową n wyrazów szeregu /1'/ oz-

naczymy przez S_n , zaś szeregu /2'/ przez S'_n , wówczas oczywiście $S'_n \leq S_n$.

Ponieważ szereg /1'/ jest zbieżny, więc $S_n < S$.
A zatem $S'_n < S$, czyli szereg /2'/ jest zbieżny.
A więc i szereg /2/, różniący się od niego skończoną liczbą wyrazów musi być zbieżny.

Analogiczne twierdzenie można udowodnić dla szeregów rozbieżnych: gdyby szereg /1/ był rozbieżny i dla wszystkich wartości $n > n_0$ byłoby

$$b_n \neq a_n$$

to i szereg /2/ byłby rozbieżny.

Niech będzie dany szereg

$$/1/ \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Utwórzmy ciąg z sum częściowych:

$$/2/ \quad s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$$

Jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ można znaleźć taki wskaźnik n_0 , że gdy $n > n_0$ mamy $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ dla każdego $p > 0$, to ciąg /2/ jest zbieżny. Ponieważ zaś

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p},$$

więc gdy

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

dla każdego $p > 0$ oraz $n > n_0$, to dany szereg jest zbieżny. Jest to warunek konieczny i dostateczny zbież-

ności szeregu, ale w praktyce nieraz trudny do zastosowania. Stosujemy więc w praktyce cechy prostsze - ale wyrażające warunek dostateczny, lecz niekonieczny zbieżności, jak Cauchy'ego, d' Alembert'a i innych.

CECHA ZBIEŻNOSCI CAUCHY'ego. Jeżeli dla wszystkich wartości wskaźnika $n > n_0$ jest spełniony warunek

$$/1/ \sqrt[n]{a_n} < r < 1$$

/przyczem $r > 0$ /, to szereg o wyrazach dodatnich

$$/2/ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

jest zbieżny.

W istocie, z nierówności /1/ wynika, że gdy $n > n_0$ to

$$a_n < r^n$$

Utwórzmy szereg

$$/3/ r + r^2 + r^3 + \dots + r^n + \dots$$

Szereg jest zbieżny, jako postęp geometryczny o wykładniku $|r| < 1$. A zatem, na mocy twierdzenia o porównywaniu dwóch szeregów, i szereg /2/ musi być zbieżny.

Ten warunek nie jest ogólny. Jest to tylko warunek dostateczny, lecz niekonieczny, zbieżności szeregów.

CECHA ZBIEŻNOSCI d' ALEMBERT'a. Jeżeli dla wszystkich wartości wskaźnika $n > n_0$ jest spełniony warunek: