

$$r = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$$

Widzimy, że otrzymaliśmy ten sam wzór, do którego doszliśmy przedtem inną drogą. Określenie więc promienia krzywizny, jako odwrotności granicy pewnego stosunku, zwanej krzywizną, prowadzi do tego samego, co i określenie jego jako promień koła ściśle statycznego.

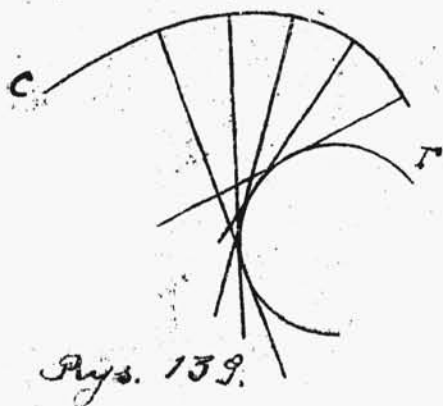
OBWIEDNIE Przypuśćmy, że dane jest równanie:

$$f(x, y, \alpha) = 0,$$

gdzie α jest pewną wielkością stałą, zwaną parametrem. Każdej wartości parametru α odpowiada pewna krzywa, mówimy że zbiór wszystkich krzywych, odpowiadających różnym wartościom parametru, stanowi rodzinę krzywych.

Może istnieć pewna krzywa, styczna do każdej krzywej rodziny \mathcal{F} . Tę krzywą właśnie nazwiemy *o b w i e d n i ą* krzywych danej rodziny.

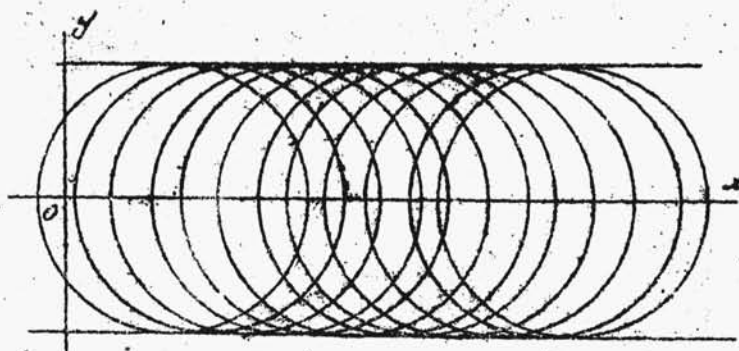
Niech np. będzie dana jakaś krzywa. Poprowadzmy w każdym punkcie tej krzywej normalną. Istnieje taka krzywa \mathcal{F} , która



jest styczna do wszystkich normalnych, czyli jest odpowiednią tych normalnych. Później się prze

ponamy, że na niej leżą wszystkie środki krzywizny dane krzywej.

Nierzadko może się zdarzyć, że obwiednią jest linja prosta, lub układ prostych. Niech np. będzie dana rodzina kół równych, których środki leżą na osi x /pa-



Rys. 140.

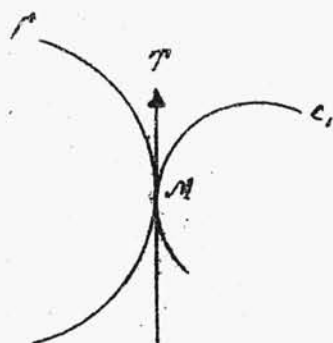
rametrem jest odcinek średnicy. Obwiednią tych kół, jak widać z rysunku, są dwie proste równoległe.

Postaramy się teraz znaleźć równanie obwiedni Γ rodziny /1/. Niech C_α będzie jedną krzywą tej rodziny. Oznaczmy przez M jej punkt styczności z obwiednią. Krzywą Γ można rozpatrywać jako zbiór punktów styczności z krzywami rodziny /1/. Wówczas współrzędne krzywej Γ będzie można wyrazić jako funkcje parametru α

$$\begin{aligned} x &= f_1(\alpha); \\ y &= f_2(\alpha). \end{aligned}$$

Są to więc równania parametryczne obwiedni, chodzi tylko o znalezienie kształt funkcji $f_1(\alpha)$ oraz $f_2(\alpha)$.

Oznaczmy współczynnik kierunkowy stycznej do krzy-



Rys. 141

C_1 w punkcie M przez

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx}$$

Dla krzywej C_1 parametr α posiada wartość stałą, a

zatem

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

czyli inaczej

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = 0.$$

Podobnie oznaczmy współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej Γ w punkcie M przez $\frac{\partial y}{\partial x}$

$$\delta x = f'_1(\alpha) \cdot \delta \alpha;$$

$$\delta y = f'_2(\alpha) \cdot \delta \alpha.$$

Różniczki δx , δy , $\delta \alpha$ nie są od siebie niezależne; ponieważ zmienne x , y i α są związane zależnościami $f_1(x, y, \alpha) = 0$; mamy także

$$f(x + \delta x, y + \delta y, \alpha + \delta \alpha) = 0$$

A więc:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0$$

W punkcie M jednak styczne do krzywych C_1 i Γ są identyczne, gdyż jest to punkt styczności obu krzywych. A zatem trzeba złożyć

$$\delta x = dx$$

$$\delta y = dy$$

Podstawiając te wartości do równania /2/, otrzymamy

$$/4/ \quad \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y = 0$$

Gdy następnie porównamy otrzymane równanie z równaniem /3/, to będziemy musieli dojść do wniosku, że:

$$/5/ \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

czyli, że

$$/5/ \quad f'_x(x, y, x) = 0$$

Każdy punkt obwiedni Γ musi spełniać równania /1/ oraz /5/; nawzajem: każdy punkt, czyniący zadość dwu wyżej wymienionym równaniom, leży na obwiedni Γ . Z tych właśnie względów można te równania uważać za układ równań parametrycznych obwiedni.

W dowodzie powyższym jest jednak pewne ograniczenie: mianowicie równania /2/ i /4/ tylko wówczas mają sens, gdy pochodne cząstkowe danej funkcji /1/ względem zmiennych x i y nie są jednocześnie równe zeru. Tego rodzaju punkt, w którym mamy właśnie

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0;$$

nazywa się punktem osobliwym. W rodzinie krzywych C , wyrażonych przez równanie /1/,

może być nieskończenie wiele punktów osobliwych /choćby np. na każdej krzywej po jednym punkcie/. Wszystkie te punkty utworzą wówczas pewną krzywą Γ' , w każdym punkcie krzywej Γ' będą więc spełnione trzy równania:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0; \\ f'_x(x, y, \alpha) &= 0; \\ f'_y(x, y, \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Pozatem, jak to wynika z równania /3/:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} \delta \alpha = 0$$

Różniczka $\delta \alpha$ może być obrana dowolnie /idzie nam bowiem tylko o stosunki $\frac{\delta x}{\delta \alpha}$, $\frac{\delta y}{\delta \alpha}$ / a zatem dla krzywej Γ' musi być spełniony również warunek:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0 \quad /5/$$

Przeto krzywa, wyrażona przez równanie /1/ i /5/ może być: 1/ albo obwiednią, albo też 2/ miejscem geometrycznym punktów osobliwych - albo wreszcie 3/ składać się z dwu części, posiadających znaczenie 1/ oraz 2/.

Obwiednię Γ można określić jeszcze w inny sposób, niż to poprzednio uczyniliśmy. Można, mianowicie, uważać każdy punkt krzywej Γ za punkt przecięcia się

jakiejś krzywej C_1 danej rodziny /1/ z krzywą sąsiednią C_2 , gdy krzywa C_2 nieograniczenie się zbliża do krzywej C_1 .

Niech będzie dana krzywa C_1 , której parametrem jest $\alpha = \alpha_1$. Ażeby otrzymać krzywą sąsiednią C_2 należy nadać parametrowi nową wartość $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$. Punkt przecięcia się tych krzywych czyni zadość układowi równań:

$$/1/ \quad f(x, y, \alpha_1) = 0;$$

$$/2/ \quad f(x, y, \alpha_1 + \Delta\alpha) = 0,$$

który można zastąpić przez układ:

$$/1/ \quad f(x, y, \alpha_1) = 0;$$

$$/3/ \quad \frac{f(x, y, \alpha_1 + \Delta\alpha) - f(x, y, \alpha_1)}{\Delta\alpha} = 0.$$

Równanie /3/ wyznacza pewną krzywą Σ , przechodzącą przez punkt M przecięcia się krzywych C_1 i C_2 . Przypuśćmy teraz, że $\Delta\alpha \rightarrow 0$. W takim razie punkt graniczny M będzie czynić zadość układowi:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha_1) &= 0; \\ \frac{\partial f(x, y, \alpha_1)}{\partial \alpha} &= 0. \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że na każdej krzywej C danej rodziny istnieje tego rodzaju punkt M - granica punktu przecięcia tej krzywej z krzywą sąsiednią, gdy para-

metr tej drugiej krzywej dąży do parametru pierwszej krzywej. Zbiór tych wszystkich punktów przecięcia da nam pewną krzywą, ich miejsce geometryczne, czyniące zadość układowi:

$$\begin{aligned} f(x, y, \alpha) &= 0; \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

który, jak wiemy, wyraża obwiednię Γ , określona jako krzywą, styczną do wszystkich krzywych danej rodziny. Oba określenia obwiedni wzajemnie się więc uzupełniają.

P r z y k ł a d 1. Odcinek AB , posiadający stałą długość l , porusza się w ten sposób, że końce jego ślizgają się wzdłuż osi x i y . Znaleźć obwiednię wszystkich położań odcinka.

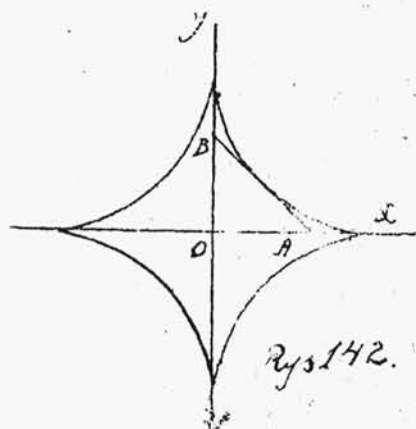
Uważajmy za parametr kąt θ jaki tworzy dany odcinek z osią x .

$$OA = l \sin \theta; \quad OB = l \cos \theta.$$

Przy pewnym określonym położeniu odcinka AB , gdy $OA = n$, zaś $OB = m$, równaniem odpowiadającej prostej będzie:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1.$$

A zatem równanie prostej, odpowiadającej dowolnemu położeniu odcinek AB , czyli równanie całej ro-



dziny prostych będzie miało postać:

$$/1/ \quad \frac{x}{\cos \theta} + \frac{y}{\sin \theta} = l$$

Dla znalezienia obwiedni zróżniczkujemy to równanie względem

θ :

$$-\frac{x \sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{y \cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0,$$

skąd otrzymamy:

$$/2/ \quad x \sin^3 \theta = y \cos^3 \theta$$

Równania /1/ i /2/ wyznaczają w zupełności obwiednię. Ostatnie z tych równań można zastąpić przez układ

$$x = u \cos^3 \theta$$

$$y = u \sin^3 \theta$$

Podstawmy te wartości w równanie /1/:

$$u(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = l$$

skąd znajdziemy, że:

$$u = l$$

A więc równaniami parametrycznymi obwiedni będą :

$$x = l \cos^3 \theta$$

$$y = l \sin^3 \theta$$

Rugując parametr θ , otrzymamy bezpośredni zwią

zek pomiędzy x i y :

$$\cos \theta = \left(\frac{x}{\ell}\right)^{2/3}$$

$$\sin \theta = \left(\frac{y}{\ell}\right)^{2/3}$$

Podnosząc te równania do kwadratu i dodając je stronami, znajdziemy:

$$\left(\frac{x}{\ell}\right)^{4/3} + \left(\frac{y}{\ell}\right)^{4/3} = 1$$

lub

$$x^{2/3} + y^{2/3} = \ell^{2/3}$$

Krzywa, wyrażona przez powyższe równanie nosi nazwę astroidy. Astroidę można również otrzymać w inny sposób: gdy koło o promieniu R toczy się wewnątrz po okręgu koła o promieniu $4R$, to punkt nieruchomy A pierwszego koła zakreśli astroidę.

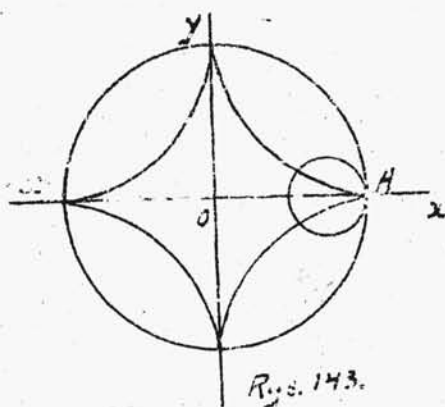
Może się nieraz zdarzyć, że równania krzywych danej rodziny posiadają dwa parametry, np.

$$/1/ \quad f(x, y, a, b) = 0$$

które jednak są związane ze sobą jakąś dodatkową zależnością, np.

$$f(a, b) = 0$$

Postępowanie w tym przypadku nie różni się niczem od poprzedniego. I tu obwiednia jest wyznaczona przez równanie /1/ i jego pochodną cząstkową względem a .



Rys. 143.

przyrównaną do zera:

$$12/ \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b} \frac{db}{da} = 0$$

gdzie

$$\frac{db}{da} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial a}}{\frac{\partial f}{\partial b}}$$

P r z y k ł a d 2. Znaleźć obwiednię linii prostych, posiadających tę własność, że suma odcin-

ków, które one odcinają na osiach x i y jest wielkością stałą:

$$m + n = C.$$

Równaniem rodziny tego rodzaju prostych jest:

$$11/ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

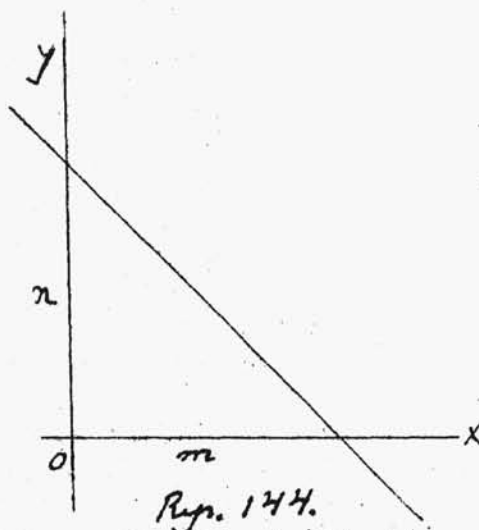
Uważajmy za parametr wielkość m . Dla znalezienia obwiedni przyrównamy pochodną cząstkową równania 11/ względem m do zera.

$$- \frac{x}{m^2} - \frac{y}{n^2} \cdot \frac{dn}{dm} = 0,$$

czyli

$$12/ - \frac{x dm}{m^2} - \frac{y dn}{n^2} = 0.$$

Zauważmy następnie, że:



$$dm = -dn$$

A więc

$$\frac{x}{m^2} = \frac{y}{n^2}$$

skąd

$$\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Ponieważ mamy również:

$$m + n = C$$

więc z równań powyższych znajdziemy:

$$m = \frac{c\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}; \quad n = \frac{c\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

Podstawmy teraz te wartości do równania /1/:

$$\frac{x(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{c\sqrt{x}} + \frac{y(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{c\sqrt{y}}$$

a stąd

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = C$$

Znosząc w tym równaniu pierwiastki, otrzymamy równanie paraboli.

Przykład 3. Znaleźć obwiednię rodziny elips, dla których suma pół-osi jest wielkością stałą:

$$a + b = C$$

Równaniem każdej elipsy tej rodziny będzie:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Różniczkując je, otrzymamy:

$$-\frac{2x^2 da}{a^3} - \frac{2y^2 db}{b^3} = 0$$

a ponieważ

$$da + db = 0$$

więc

$$\frac{x^2}{a^3} = \frac{y^2}{b^3}$$

skąd

$$\frac{a}{b} = \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}}$$

Uwzględniając, że

$$a + b = c$$

napiżemy:

$$a = \frac{c \cdot x^{2/3}}{x^{2/3} + y^{2/3}}, \quad b = \frac{c \cdot y^{2/3}}{x^{2/3} + y^{2/3}}$$

Podstawmy otrzymane wartości w równanie elipsy:

$$\frac{x^2 (x^{2/3} + y^{2/3})^2}{c^2 \cdot x^{4/3}} + \frac{y^2 (x^{2/3} + y^{2/3})^2}{c^2 \cdot y^{4/3}} = 1$$

czyli

$$x^{2/3} (x^{2/3} + y^{2/3})^2 + y^{2/3} (x^{2/3} + y^{2/3})^2 = c^2$$

albo też

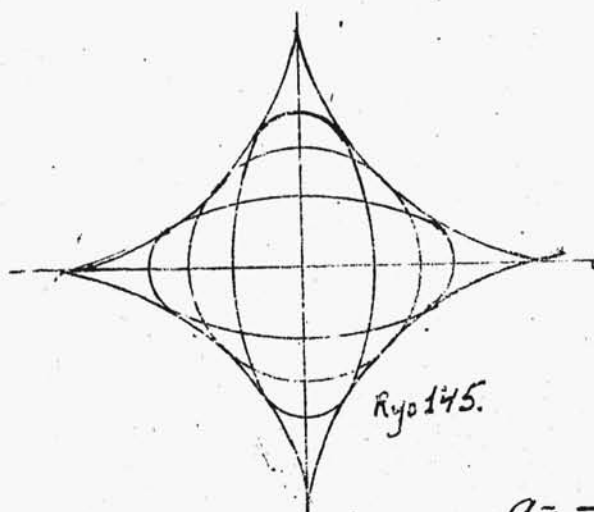
$$(x^{2/3} + y^{2/3})^3 = c^2$$

Ostatecznie

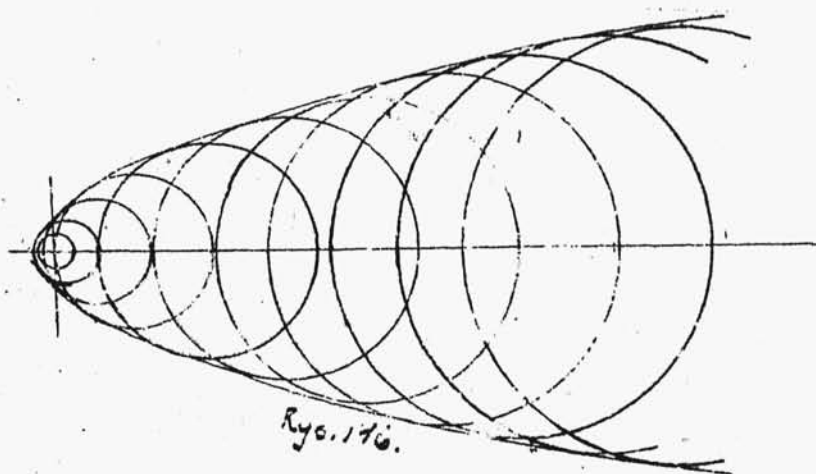
$$x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$$

Jest to, jak widzimy, znowu równanie astroidy.

Przykład 4. Znaleźć obwiednie kół, których środki leżą na osi x , i których promienie są



proporcjonalne do pierwiastka kwadratowego z odległości środka koła od początku układu.



Ryc. 176.

Oznaczmy parametr rodziny tych kół - odległość środka koła od początku układu - przez α

W takim razie:

$$r^2 = k \cdot \alpha$$

Równaniem tej rodziny kół jest

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = k \alpha$$

czyli

$$x^2 - 2x\alpha + \alpha^2 + y^2 = k \cdot \alpha$$

Różniczkując to równanie względem parametru α , znajdziemy:

$$-2x + 2\alpha = k,$$

skąd

$$\alpha = \frac{k + 2x}{2} = x + \frac{k}{2}$$

A zatem równanie obwiedni:

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = k \cdot x + \frac{k^2}{2}$$

czyli

$$y^2 = k \left(x + \frac{k}{2}\right)$$

daje nam parabolę. Należy zauważyć, że otrzymana parabola nie będzie styczna do wszystkich kół danej rodziny: koła, dla których parametr α ma bardzo małą wartość, nie będą, co łatwo można sprawdzić, paraboli dotykały.

P r z y k ł a d 5. Przez punkt stały A na osi X poprowadzono pęk prostych, z punktów przecięcia się tych prostych z osią y wystawiono prostopadłe do odpowiednich prostych. Znaleźć obwiednię tych prostopadłych

Oznaczmy odciętą punktu A przez a , zaś parametr - współczynnik kątowy dowolnej prostej AB - przez α . Równaniem prostej AB będzie:

$$y = \alpha(a + x)$$

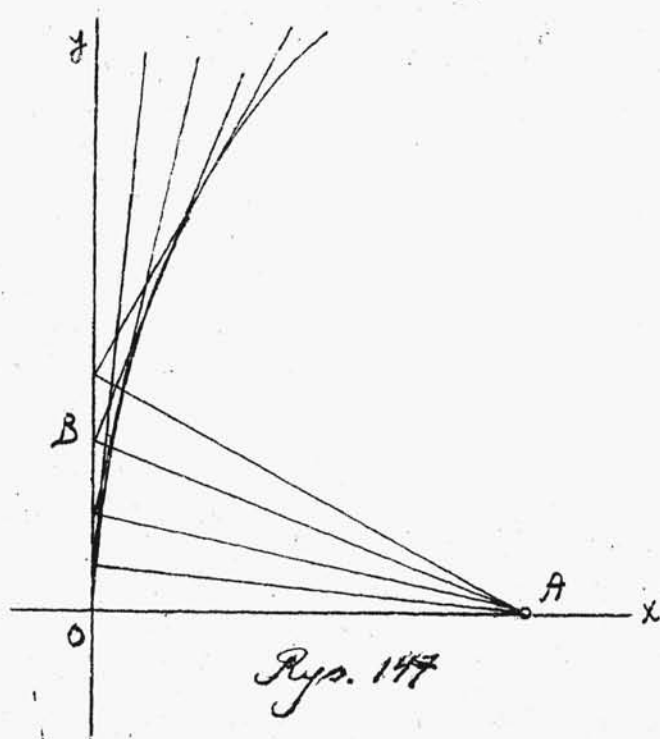
Przetnie ona oś y w punkcie B $(0, a\alpha)$, zatem równanie prostej, przechodzącej przez punkt B i prostopadłej do AB będzie miało kształt:

$$y - a\alpha = -\frac{1}{\alpha} \cdot x$$

A więc szukana obwiednia będzie wyrażona przez układ równań:

$$a \cdot \alpha - y = \frac{x}{\alpha};$$

$$a = -\frac{x}{\alpha^2};$$



który będzie moż-
na łatwo rozwiązać

$$\alpha = \sqrt{-\frac{x}{a}};$$

więc

$$y = a\sqrt{-\frac{x}{a}} - \frac{x}{\sqrt{-\frac{x}{a}}} = 2\sqrt{-ax},$$

skąd

$$y^2 = -4ax.$$

Otrzymaliśmy
więc znowu jako ob-
wiednię parabolę.

PUNKTY OSOBLIWE.

Niech będzie dana krzywa:

$$11/ \quad f(X, Y) = 0$$

Przypuścimy, że istnieje na niej taki punkt $M(x_0, y_0)$,
w którym

$$12/ \quad f'_x(X, Y) = 0$$

$$13/ \quad f'_y(X, Y) = 0$$

Dla dokładniejszego zbadania tego punktu przenieś-
my do niego początek układu współrzędnych: Podstawiając: