

Reguła ta daje się uogólnić na jakąkolwiek parę liczbową: można ją przedstawić jako sumę liczby rzeczywistej i iloczynu liczby rzeczywistej przez  $i$  :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b),$$

skąd

$$(a, b) = a + bi.$$

Suma  $a + bi$  nosi nazwę liczby zespolonej. Wszystkie działania nad parami liczbowymi można zastąpić przez działania nad liczbami zespolonymi. Z określenia:

$$i = (0, 1)$$

wynika, że

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = (0, 1)^2 (0, 1) = -1 \cdot i = -i$$

W ten sam sposób znajdziemy, że

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$\dots$$

Wogóle, każdą potęgę pary liczbowej  $(0, 1) = i$  można zastąpić bądź liczbami rzeczywistymi  $+1$  i  $-1$ , bądź też samą parą  $(0, 1)$  lub parą jej przeciwną  $(0, -1)$ .

Niech będą dane dwie liczby zespolone, które możemy napisać w postaci  $a + bi$  oraz  $c + di$ , wyrażające pary liczbowe  $(a, b)$  i  $(c, d)$ . Równość tych

liczb:

$$a+bi = c+di$$

zachodzi wówczas, gdy

$$\begin{aligned} a &= c, \\ i \cdot b &= d \end{aligned}$$

Wszelkie działania nad liczbami zespolonemi, napisanemi w tej postaci, możemy wykonać tak, jak się to czyni dla liczb rzeczywistych z dodatkiem związku  $i^2 = -1$ . W rzeczy samej:

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

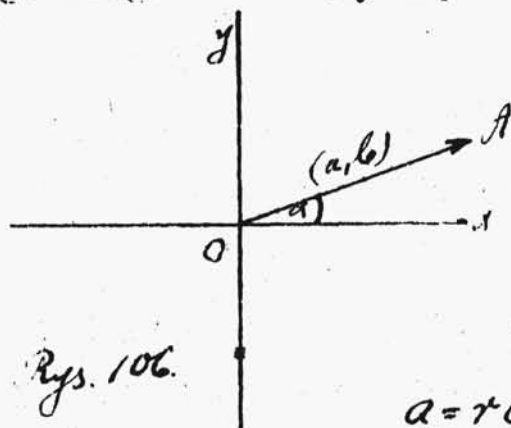
$$(a+bi) \cdot (c+di) = ac - bd + (ad+bc)i,$$

co jest zgodne z określeniem dodawania i mnożenia.

Przejdźmy znowu do interpretacji geometrycznej.

Niech wektor  $\vec{OA}$  przedstawia parę liczbową  $(a, b)$

Jego długość  $r$  nazywamy modulem, zaś kąt  $\alpha$ , jaki



Rys. 106.

tworzy z dodatnim kierunkiem osi  $x$  - amplitudą, parę liczbowej  $(a, b)$  względnie liczby zespolonej  $a+bi$ . Jak wiemy:

$$\begin{aligned} a &= r \cos \alpha \\ b &= r \sin \alpha. \end{aligned}$$

W takim razie

$$(a, b) = (a + bi) = r \cos \alpha + i r \sin \alpha = \\ = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Pomnóżmy przez siebie dwie liczby zespolone:

$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)] \cdot [R(\cos \beta + i \sin \beta)] = \\ = R \cdot r [\cos \alpha \cdot \cos \beta + i(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) - \sin \alpha \cdot \sin \beta] = \\ = R \cdot r [\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)]$$

A więc moduł iloczynu dwóch liczb zespolonych jest równy iloczynowi modułów tych liczb, zaś amplituda iloczynu jest równa sumie amplitud czynników. Jest to wynik, zgodny z określeniem mnożenia wektorów i par liczbowych.

Ponieważ potęgowanie jest mnożeniem równych czynników więc z łatwością znajdziemy wzór:

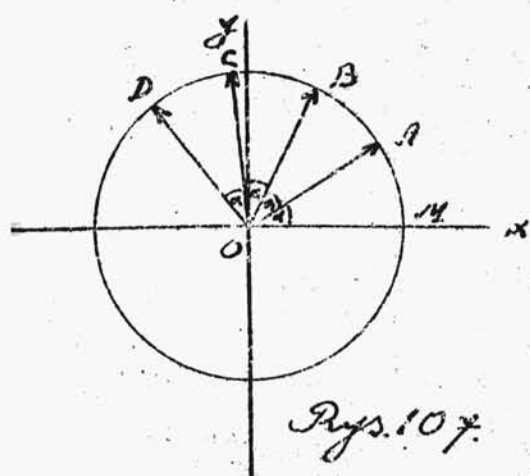
$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

W szczególnym wypadku, gdy moduł  $r=1$ , wzór powyższy przyjmuje postać /Moivre'a/:

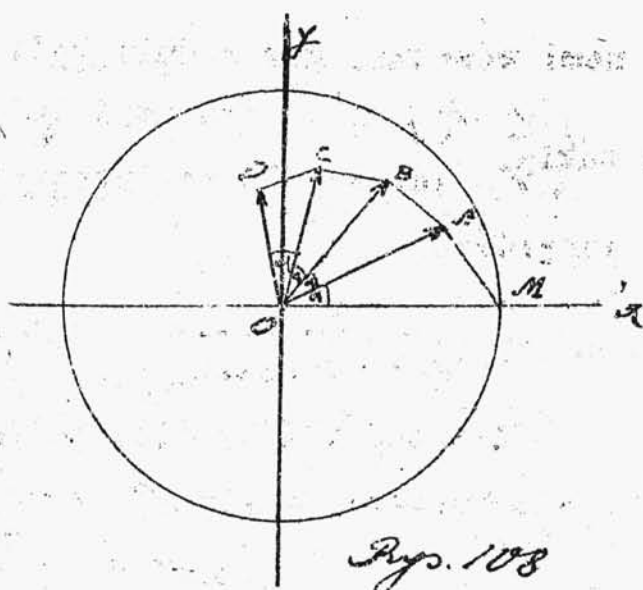
$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$$

Rysunki 107, 108 i 109 stanowią ilustrację wzoru na potęgowanie liczb zespolonych w wypadkach, gdy

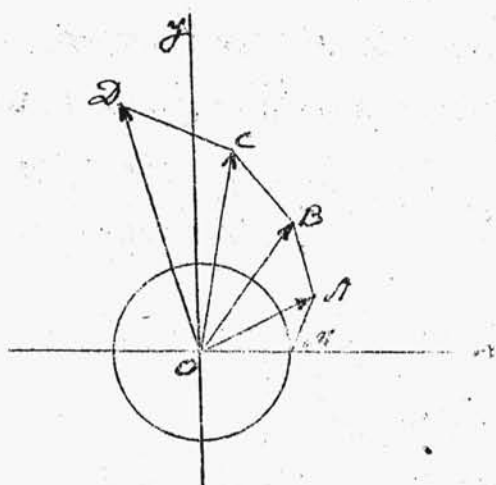
Przejdziemy teraz do d z i e l e n i a  
l i c z b z e s p o l o n y c h . Dwie liczby zespo-



Rys. 107.



Rys. 108



Rys. 109.

lone  $a + bi$  i  $c + di$ ,  
 lub też pary licz-  
 bowe  $(a, b)$   $(c, d)$   
 nazywać będziemy  
 odwrotnymi, jeżeli

$$(a + bi)(c + di) = 1,$$

albo

$$(a, b) \cdot (c, d) = (1, 0)$$

Jeżeli moduł pierwszej liczby oznaczymy przez  $r_1$   
 zaś jej amplitudę  $\alpha_1$ , i odpowiednio dla drugiej lic-  
 by oznaczymy moduł i amplitudę przez  $r_2$  i  $\alpha_2$ , to mo-  
 dułem iloczynu będzie  $r_1 r_2$ , a amplitudą iloczynu  
 $\alpha_1 + \alpha_2$ . A więc dwie liczby zespolone będą przeciw-

nomi wówczas, gdy moduły będą liczbami przeciwnymi,  
 $(r_1 \cdot r_2) = 1$ , zaś amplitudy dadzą w sumie 0 lub  
 $2\pi$ , lub wogóle wielokrotność parzystą  $\pi$ . Łatwo  
 sprawdzić

$$\frac{1}{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

A zatem każdej liczbie zespolonej  $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$   
 / z wyjątkiem liczby 0 / odpowiada liczba odwrotna

$$\frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

Będziemy teraz mogli określić dzielenie przez  
 liczbę zespoloną, jako mnożenie przez liczbę odwrotną.

$$\begin{aligned} \frac{R(\cos\beta + i\sin\beta)}{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} &= R(\cos\beta + i\sin\beta) \cdot \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \\ &= R(\cos\beta + i\sin\beta) \cdot \frac{1}{r}(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = \\ &= \frac{R}{r} [\cos(\beta - \alpha) + i\sin(\beta - \alpha)]. \end{aligned}$$

Oczywiście sprawdzimy, że

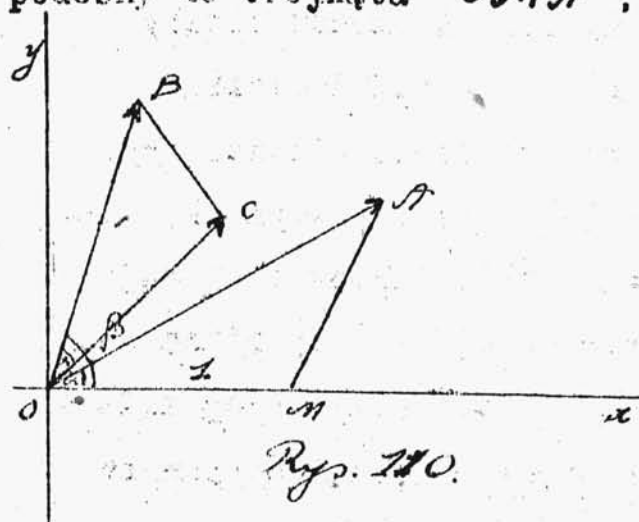
$$\begin{aligned} \left\{ \frac{R}{r} [\cos(\beta - \alpha) + i\sin(\beta - \alpha)] \right\} \cdot r(\cos\alpha + i\sin\alpha) &= \\ &= R[\cos(\beta - \alpha + \alpha) + i\sin(\beta - \alpha + \alpha)] = \\ &= R(\cos\beta + i\sin\beta) \end{aligned}$$

Interpretacja geometryczna dzielenia wektorów  
 jest przedstawiona na rys. 110. Dla znalezienia ilora-

zu wektorów  $\vec{OB}$  i  $\vec{OA}$  należy zbudować na  $\vec{OB}$  trójkąt podobny do trójkąta  $OMA$ , przyczem kąt  $\alpha$  należy odłożyć w kierunku ujemnym. Wówczas

$$\frac{\vec{OB}}{\vec{OA}} = \vec{OE}$$

Gdy dzielnik jest równy zero, dzielenie staje się niemożliwe.



Rys. 110.

P i e r w i a s t k o w a n i e. Wszystkie, dotychczas określone działania nad liczbami zespolonymi, były określone jednoznacznie. Pierwiastkowanie, przeciwnie nie jest działaniem jednoznacznie określonym, z czym sromotę już się spotykaliśmy w teorii liczb rzeczywistych: liczba wartości pierwiastka jest równa jego wykładnikowi. Określmy nasamprzód:

$$\sqrt[n]{1}.$$

Symbolen tym oznaczamy każdą liczbę, której  $n$ -ta potęga jest równa 1 : innymi słowy

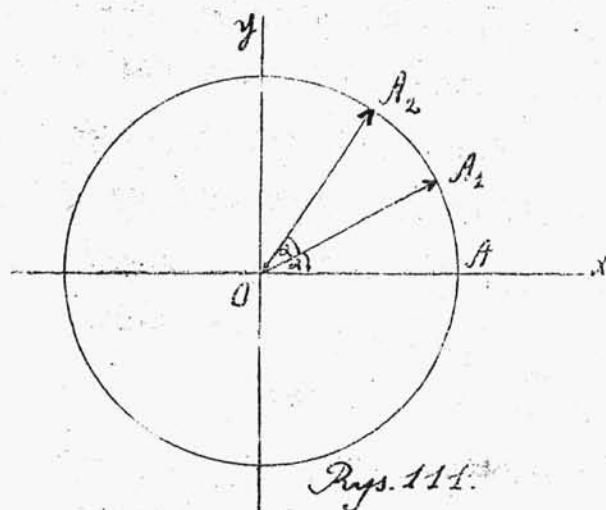
$$x = \sqrt[n]{1}$$

wówczas, gdy

$$x^n = 1$$

Udowodnimy, że jest  $n$  i tylko  $n$  takich liczb

zespolonych  $x$ , które czynią zadość powyższemu równaniu. Zauważmy przedewszystkiem, że moduł liczby  $x$ ,  $r=1$ . Gdyby bowiem  $r>1$  to moduł liczby  $x^n$ ,  $r^n>1$  co jest niemożliwe: podobnie nie może być  $r<1$ . Pozostaje więc tylko trzeci przypadek, mianowicie  $r=1$ . A zatem wszystkie wartości  $x$  mają ten sam moduł  $r=1$ . Niech  $\alpha$  będzie amplitudą  $x=a$ . Wtedy  $n\alpha$  musi być  $2k\pi$ . Podzielmy okrąg koła o promieniu 1 na  $n$  równych części i połączmy punkty podziału z punktem  $O$ .



Rys. 111.

$$\alpha = \frac{2\pi}{n}$$

Liczby, odpowiadające wektorom  $\vec{OA_1}$ ,  $\vec{OA_2}$  i t.d. są właśnie szukane-  
mi wartościami liczby  $x$

$$x_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

Podnosząc obie strony powyższej równości do

$n$ -tej potęgi, znajdziemy, że

$$x_1^n = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

a ponieważ  $\sin 2\pi = 0$ ,  $\cos 2\pi = 1$ , więc

$$x_1^n = 1$$

Podobnie przekonamy się, że wartością  $x$  jest

$$x_2 = \cos \frac{4\pi}{n} + i \sin \frac{4\pi}{n}$$

Istotnie

$$x_2^n = \cos 4\pi + i \sin 4\pi$$

Wogóle, jedną z wartości  $x$  oznacza

$$x_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n},$$

gdym

$$x_k^n = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$$

czyli

$$x_k^n = 1.$$

Gdy  $k=n$ , otrzymamy dla  $x$  tę samą wartość, co przy  $k=0$ ; wartości  $k=n+1$  odpowiada ta sama wartość, co . Wogóle, różnych wartości otrzymać możemy tylko . Geometrycznie można to wytłumaczyć w ten sposób, że powiększając kąt o wielokrotność , otrzymywać będziemy ten sam wektor.

Niech będą dane dwie liczby zespolone:

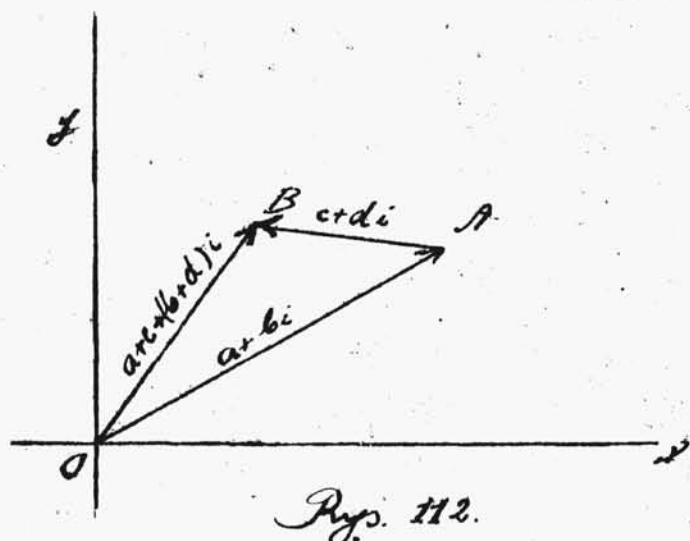
oraz . Z rys. 112 jest widoczne

że moduł sumy tych liczb nie może być większy od sumy modułów składników.

Gdy dodajemy liczby rzeczywiste tego samego znaku, /wektory leżące na jednej prostej/, to moduł sumy tych liczb jest równy sumie ich modułów.

Zauważmy, że liczba zespolona wówczas tylko może





się równać 0, gdy jej moduł równa się 0. A więc iloczyn kilku liczb zespolonych równa się 0, gdy jeden przynajmniej z modułów czynników równy jest 0.

Dwie pary liczbowe

$(a, b)$  i  $(c, d)$  nazywają się sprzężonymi gdy

$$a = c, \quad b = -d$$

Podobnie nazwiemy sprzężonymi dwie liczby zespolone

$$a+bi \quad \text{oraz} \quad a-bi$$

Cechą charakterystyczną liczb zespolonych sprzężonych jest to, że ich suma oraz ich iloczyn są liczbami rzeczywistymi:

$$(a+bi) + (a-bi) = 2a$$

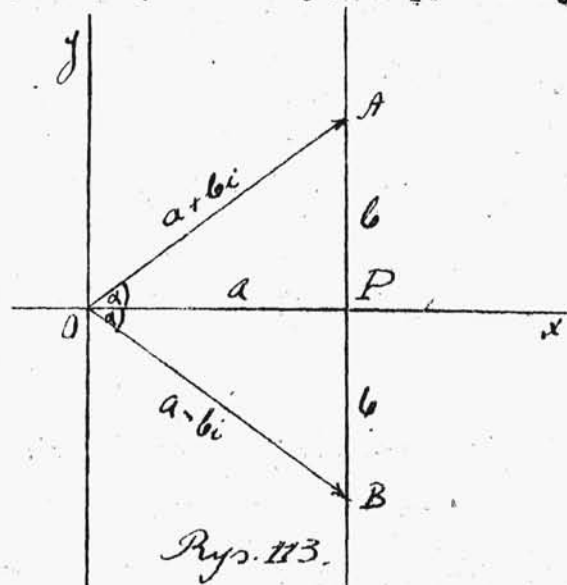
$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

Obie liczby posiadają ten sam moduł:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

zaś ich amplitudy dają w sumie 0 lub wielokrotność

$2\pi$ . Wektory, odpowiadające liczbom sprzężonym są



symetryczne względem osi

$x$ : jeżeli wektorowi  $\vec{OA}$  odpowiada amplituda  $a$ , to wektorowi  $\vec{OB}$  odpowiadać będzie amplituda  $2\pi - a$ .

Dowiedliśmy już, że wyciągnięcie pierwiastka  $n$ -go z jedności jest równoznacz-

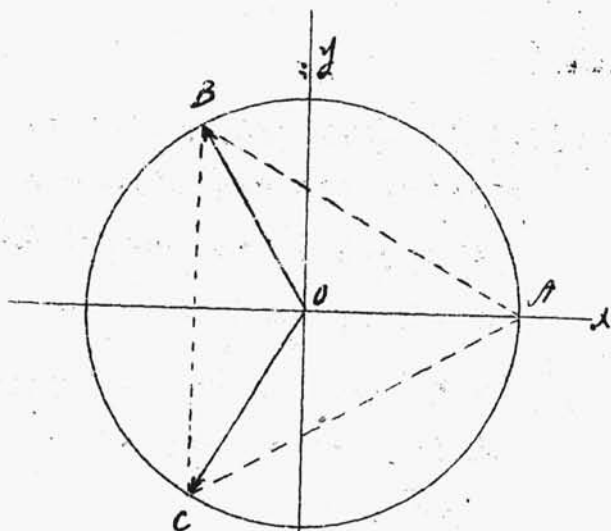
ne z podziałem koła na  $n$  równych części albo z wpisaniem w koło wielokąta foremnego o  $n$  bokach. Dla przykładu wyciągnijmy pierwiastek sześcienny z jedności:

$\sqrt[3]{1}$  lub też rozwiążmy równanie

$$x^3 = 1$$

W tym celu wpiszmy w koło o promieniu 1 /rys. 114/ trójkąt foremny  $ABO$  i połączmy punkt  $O$  z jego wierzchołkami. Otrzymamy w ten sposób trzy wektory, odpowiadające trzem liczbom zespolonym, czyniącym zadość naszemu równaniu:

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= 1 \\ \vec{OB} &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \\ \vec{OC} &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$



Rys. 114.

A więc równanie  $x^3 = 1$  posiada trzy rozwiązania

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Pierwiastki  $x_2$  i  $x_3$  są ze sobą sprzężone.

Ten sam rezultat otrzymalibyśmy, rozwiązując powyższe równanie za pomocą algebry elementarnej. Mianowicie:

$$\begin{aligned} x^3 - 1 &= 0 \\ (x-1)(x^2 + x + 1) &= 0 \end{aligned}$$

Rozwiązując równania

$$\begin{aligned} x-1 &= 0, \\ x^2 + x + 1 &= 0, \end{aligned}$$

znajdziemy:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ x_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i. \end{aligned}$$

Wyciągnijmy teraz pierwiastek  $n$ -tego stopnia z liczby zespolonej:

*Varley*

co jest równoznaczne z rozwiązaniem równania

$$x^n = a + bi$$

Napişemy ostatnie równanie w postaci

$$x^n = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Założmy, że szukanym pierwiastkiem jest jakaś liczba zespolona

$$x = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Wówczas

$$x^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

W powyższej równości  $r$  i  $\alpha$  są wielkościami znanymi, zaś  $\rho$  i  $\varphi$  szukanymi. Pomiędzy nimi zachodzić muszą zależności następujące:

$$\rho^n = r$$

$$n\varphi = \alpha + 2k\pi$$

Stąd znajdziemy, że

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

$$\varphi = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

Dla  $\rho$  bierzemy tylko jedną wartość pierwiastka w znaczeniu arytmetycznym, bo z założenia  $\rho > 0$  /można ją obliczyć np. przy pomocy tablic logarytmicznych dla  $\varphi$  otrzymamy tylko  $n$  wartości, albowiem gdy  $k=n$

to otrzymamy tę samą wartość kąta, co dla  $k=k'$ . A zatem różne wartości kąta otrzymamy tylko dla

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$$

Otrzymamy więc  $n$  różnych wartości pierwiastka:

$$x_1 = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n} \right);$$

$$x_2 = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha+2\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha+2\pi}{n} \right);$$

$$x_3 = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha+4\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha+4\pi}{n} \right);$$

.....

$$x_{k+1} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha+2k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha+2k\pi}{n} \right)$$

.....

$$x_n = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n} \right)$$

Przykład liczbowy.

$$x = \sqrt[4]{3+4i}$$

Stąd

$$r = \sqrt{9+16} = 5$$

Jak wiemy

$$a = r \cos \alpha; \quad b = r \sin \alpha,$$

a więc

$$1/1 \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

A zatem  $\alpha$  posiadać będzie wartości następujące:

$$\alpha_1 = \sqrt[7]{5} \left( \cos \frac{\alpha}{7} + i \sin \frac{\alpha}{7} \right)$$

$$\alpha_2 = \sqrt[7]{5} \left( \cos \frac{\alpha + 2\pi i}{7} + i \sin \frac{\alpha + 2\pi i}{7} \right)$$

.....

$$\alpha_7 = \sqrt[7]{5} \left( \cos \frac{\alpha + 12\pi i}{7} + i \sin \frac{\alpha + 12\pi i}{7} \right)$$

kąt  $\alpha$  znaleźć można z równań /1/ przy pomocy tablic.

Wzory na mnożenie kąta.

/Moivre'a/. Dowiedliśmy już, że

$$/1/ (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha.$$

Rozwińmy lewą stronę powyższej równości w szereg Newtona, przyczem dla skrócenia oznaczmy współczynnik przy wyrazie o wskaźniku  $r$  przez

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots r}$$

Otrzymamy:

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos^n \alpha + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \cdot i \sin \alpha -$$

$$- \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \cdot i \sin^3 \alpha +$$

$$+ \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \cdot \sin^4 \alpha + \dots$$

Wyrazy parzyste zawierają  $i$  ze znakiem  $+$  i — naprzemian; podobnie zmieniają się znaki wyrazów nieparzystych. Z wyrazów nieparzystych można wynieść  $i$  przed nawias; porównywując następnie otrzymany rezultat ze wzorem /1/ dojść musimy do wniosku, że:

$$\begin{aligned}\cos n\alpha &= \cos^n \alpha - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \alpha \sin^2 \alpha + \\ &+ \binom{n}{4} \cos^{n-4} \alpha \sin^4 \alpha - \binom{n}{6} \cos^{n-6} \alpha \sin^6 \alpha + \dots \\ \sin n\alpha &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} \alpha \sin \alpha - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \alpha \sin^3 \alpha + \\ &+ \binom{n}{5} \cos^{n-5} \alpha \sin^5 \alpha - \dots\end{aligned}$$

Wzory te noszą nazwę wzorów Moivre'a. Dzielać je stronami, otrzymamy wzory, wyznaczające  $\operatorname{tg} n\alpha$  i  $\operatorname{cotg} n\alpha$ :

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\binom{n}{1} \operatorname{tg} \alpha - \binom{n}{3} \operatorname{tg}^3 \alpha + \binom{n}{5} \operatorname{tg}^5 \alpha - \dots}{1 - \binom{n}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha + \binom{n}{4} \operatorname{tg}^4 \alpha - \binom{n}{6} \operatorname{tg}^6 \alpha + \dots}$$

Podstawiając do tego wzoru  $n=2$ , otrzymamy znany z trygonometrii wzór:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Liczby zespolone tworzą zamknięte pole działań. Wszystkie działania nad liczbami zespolonymi są wyko-

nalne w zakresie tych tylko liczb. Wystarczają one również w zupełności do rozwiązywania wszelkich równań algebraicznych i przestępnych. Będziemy mogli przekonać się o tem, rozwiązując równania różnych stopni, do czego teraz przejdziemy.

### ROZWIĄZYWANIE RÓWNAŃ.

Niech będzie dane równanie kwadratowe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

w którym współczynniki  $a$ ,  $b$  i  $c$  są liczbami rzeczywistymi. Jeżeli

$$b^2 - 4ac > 0$$

to równanie posiada 2 pierwiastki rzeczywiste:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jeżeli

$$b^2 - 4ac < 0$$

równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych. Napiшем dane równanie w postaci: