

Przejdźmy teraz do funkcji

$$y = \operatorname{arctg} x$$

Podobnie jak w przykładach poprzednich, dla otrzymania funkcji jednowartościowej, oznaczmy jedną gałąź krzywej przez

$$y = \operatorname{Arctg} x$$

Wówczas

$$(\operatorname{Arctg} x)' = \left(\frac{1}{\operatorname{tg} y} \right)' = \cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

Ponieważ zaś

$$x = \operatorname{tg} y$$

więc

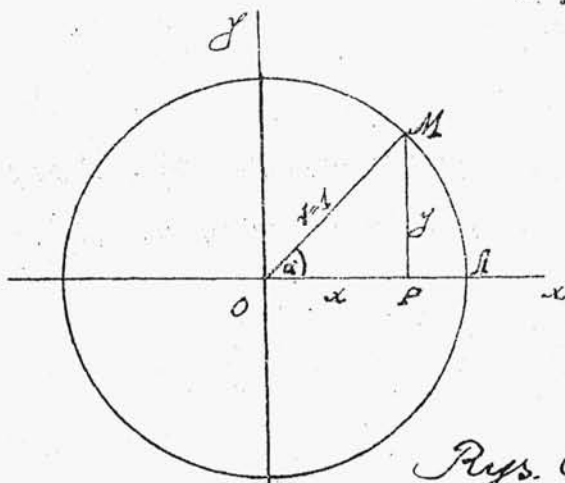
$$(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

FUNKCJE HYPERBOLICZNE. Uwydatniając podobieństwa, zachodzące pomiędzy różnymi działami matematyki, wprowadzimy nowy rodzaj funkcji, mianowicie t.j.w. funkcje hyperboliczne.

Niech będzie dane koło trygonometryczne o promieniu $r=1$ i na nim punkt $M(x, y)$. Oznaczmy kąt $MO P$ wyrażony w mierze bezwzględnej, przez α . Pamiętajmy określenia:

$$y = \sinh \alpha ; x = \cosh \alpha$$

Zauważmy, że pole wycinka kołowego równa się dłu-



Rys. 64.

określeniach zamiast zmiennej α podstawić podwojone pole wycinka MOA .

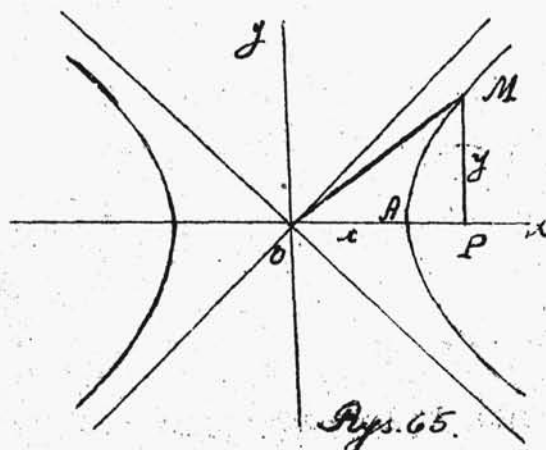
Weźmy teraz zamiast koła o równaniu

$$x^2 + y^2 = 1$$

krzywą mającą równanie

$$x^2 - y^2 = 1$$

Jest to, jak wiemy, hyperbola równoboczna. Można zbudować dla niej teorię analogiczną do tej, jaką zbudowaliśmy dla koła. Obierzmy więc na hyperboli dowolny



Rys. 65.

punkt $M(x, y)$. Wycinkowi kołowemu MOA odpowiada wycinek hyperboli ograniczony przez łuk MA i promienie OM i OA . Dla ścisłości należy okre-

ślić co nazywać będziemy polem tego wycinka.

W tym celu obierzemy na łuku hyperboli MA szereg punktów, połączmy je ze sobą linją łamaną i każdy z nich połączmy z punktem O . Otrzymamy w ten sposób szereg trójkątów. Podwajając liczbę tych trójkątów uważamy, że suma ich pól maleje:

$$S_1 > S_2 > S_3 > \dots > S_n > \dots$$

Ciąg utworzony przez te sumy jest ograniczony od dołu, musi więc posiadać granicę. Tę granicę właśnie nazywamy polem wycinka hyperboli.*

Możemy przejść teraz do istoty rzeczy. Wprowadźmy parametr równy podwojonemu polu wycinka hyperbolicznego

$$u = 2S$$

Rzecz jest jasna, że wartości x i y /współrzędne punktu M / są funkcjami tego parametru. Odcietą x nazywamy c o s i n u s e m h y p e r b o l i c z n y m u , zaś rzędną y - s i n u s e m h y p e r b o l i c z n y m u . Oznaczać to będziemy symbolicz-

* Można dodatkowo udowodnić, że granica ta nie zależy od prawa podziału wycinka, hyperboli na części, byle tylko pole każdego trójkąta w procesie granicznym dążyło do zera.

nie, pisząc:

$$x = \operatorname{Ch} u; \quad y = \operatorname{Sh} u$$

Iloraz z podzielenia y przez x nazywa się **tangensem hyperbolicznym** u i oznacza się przez $\operatorname{Th} u$.

W wypadku szczególnym, gdy $u=0$, mamy

$$\operatorname{Sh} 0 = 0 \quad ; \quad \operatorname{Ch} 0 = 1$$

Z określenia funkcji hyperbolicznych wynika związek następujący:

$$\operatorname{Ch}^2 u - \operatorname{Sh}^2 u = 1$$

W ogóle wszystkie wzory, dotyczące się funkcji, są analogiczne do trygonometrycznych i jeżeli różnią się od nich, to jedynie znakami.

Przypuśćmy, że dany jest punkt $M(x, y)$. Znajdźmy na hyperboli odpowiadający mu punkt $M'(x', y')$ taki, aby x' i y' były funkcjami linjowymi x i y symetrycznie ukształtowanymi. Chcemy zatem aby

$$\begin{aligned} x' &= nx + my \\ y' &= mx + ny \end{aligned}$$

Podnosząc oba równania do kwadratu i odejmując stronami znajdziemy, że

$$x'^2 - y'^2 = (n^2 - m^2)x^2 + (m^2 - n^2)y^2 = (n^2 - m^2)(x^2 - y^2)$$

Ponieważ jednak punkty M i M' leżąc mają na hyperboli, więc

$$x^2 - y^2 = 1 \quad \text{oraz} \quad x'^2 - y'^2 = 1$$

A zatem musi być

$$n^2 - m^2 = 1.$$

Jeżeli mamy takie dwa wycinki hyperboliczne, że punktom krańcowym M i N odpowiadają odpowiednio punkty M' i N' , to takie wycinki nazywają się odpowiednimi. Udowodnimy, że pola takich wycinków są sobie równe.

Weźmy dwie pary punktów odpowiednich $M(x, y)$ i $M'(x', y')$ oraz $N(x_1, y_1)$ i $N'(x'_1, y'_1)$.

Pomiędzy współrzędnymi prawej i lewej strony zachodzi związek następujący:

$$\begin{aligned} x' &= nx + my \\ y' &= mx + ny \end{aligned}$$

przyczem

$$n^2 - m^2 = 1$$

Z geometrii analitycznej wiadomo, że podwójne pola trójkątów OMN i $OM'N'$

Rys. 66.

$$2S_{OMN} = xy_1 - x_1y$$

$$2S_{OM'N'} = x'y'_1 - x'_1y'$$

Wyrażając w ostatniej równości x' i y' za pomocą x i y , napiszemy

$$2S_{OMN'} = (nx + my)(mx_1 + my_1) - (mx_1 + my_1)(mx + my) = \\ = nmxx_1' + n^2xy_1 + m^2yx_1 + mmyy_1 - nmxx - \\ - n^2x_1y - m^2xy_1 - mmyy_1 = (n^2 - m^2)(xy_1 - x_1y).$$

A więc

$$2S_{OMN} = 2S_{OMN'}$$

Aby wyprowadzić równość wycinków hyperbolicznych podzielmy każdy z nich na części, w ten sposób, aby punkty podziału odpowiadały sobie nawzajem. Pole wycinka $OMN = S$ określiliśmy jako granicę, do której dąży suma pól trójkątów, powstałych z połączenia punktów podziału ze sobą i z punktem O , gdy liczba punktów podziału nieograniczenie rośnie;

$$S_n \rightarrow S$$

Podobnie określamy pole wycinka $OM'N'$

$$S'_n \rightarrow S$$

Ponieważ jednak trójkąty otrzymane przy podziale obu wycinków są odpowiednio równe, są więc równe i ich sumy:

$$S_n = S'_n$$

a dalej są równe i granice tych sum, czyli pola wycinków sobie odpowiadających:

$$S = S'$$

Uzasadnijmy teraz kilka wzorów, dotyczących funk-

cji hyperbolicznych, analogicznych do wzorów trygonometrii koła.

Przypuśćmy, że mamy dany wycinek hyperboli $OA\pi$; punkt $A(x=1, y=0)$ można zamienić na punkt

$M(x, y)$ za pomocą przekształcenia:

$$(1) \begin{cases} x' = x \cdot x + y \cdot y \\ y' = y \cdot x + x \cdot y \end{cases}$$

w którym $x^2 - y^2 = 1$.

Podobnie możemy punkt

$\pi(x_1, y_1)$ zamienić na punkt $\pi'(x_2, y_2)$ za pomocą przekształcenia o tych samych współczynnikach x i y , a więc tego samego

$$(2) \begin{cases} x_2 = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 \\ y_2 = y \cdot x_1 + x \cdot y_1 \end{cases}$$

Wyraźmy następnie współrzędne obu parametrów za pomocą funkcji hyperbolicznych, mianowicie:

$$x = \operatorname{Ch} u ; \quad x_1 = \operatorname{Ch} u_1 ; \quad x_2 = \operatorname{Ch} u_2$$

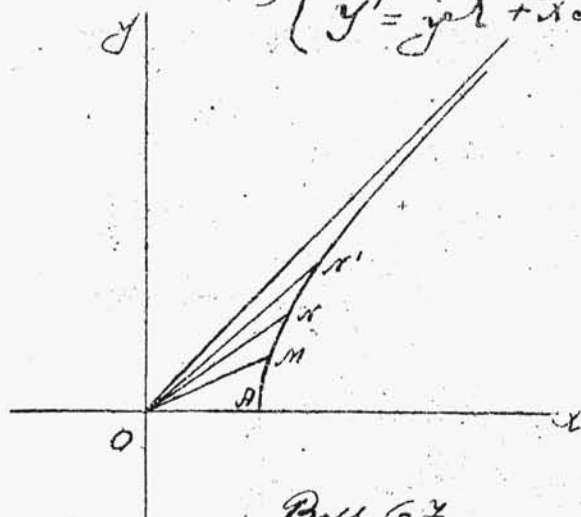
$$y = \operatorname{Sh} u ; \quad y_1 = \operatorname{Sh} u_1 ; \quad y_2 = \operatorname{Sh} u_2$$

To znaczy, że

$$2 \operatorname{Sh} OA\pi = u_1 ; \quad 2 \operatorname{Sh} OA\pi = u ; \quad 2 \operatorname{Sh} OA\pi' = u_2$$

Zauważymy, że

$$\operatorname{Sh} OA\pi' = \operatorname{Sh} OA\pi + \operatorname{Sh} OA\pi'$$



Rys. 67.

Otóż $S_{OMN'} = S_{OAN}$, ponieważ punkty M i M' odpowiadają punktom A i N przy przekształceniu:

$$\begin{aligned}x' &= x\lambda + y\gamma \\y' &= y\lambda + x\gamma\end{aligned}$$

a więc

$$u_2 = u + u_1$$

Podstawiając we wzorach /2/ funkcje hyperboliczne znajdziemy

$$\operatorname{Ch} u_2 = \operatorname{Ch} u \cdot \operatorname{Ch} u_1 + \operatorname{Sh} u \cdot \operatorname{Sh} u_1$$

$$\operatorname{Sh} u_2 = \operatorname{Sh} u \cdot \operatorname{Ch} u_1 + \operatorname{Ch} u \cdot \operatorname{Sh} u_1$$

Stąd zaś znajdziemy wzory, wyrażające Ch i Sh sumy:

$$\operatorname{Ch}(u + u_1) = \operatorname{Ch} u \cdot \operatorname{Ch} u_1 + \operatorname{Sh} u \cdot \operatorname{Sh} u_1$$

$$\operatorname{Sh}(u + u_1) = \operatorname{Sh} u \cdot \operatorname{Ch} u_1 + \operatorname{Ch} u \cdot \operatorname{Sh} u_1$$

W ten sam sposób znajdziemy wzory, wyrażające Ch i Sh różnicy:

$$\operatorname{Ch}(u - u_1) = \operatorname{Ch} u \cdot \operatorname{Ch} u_1 - \operatorname{Sh} u \cdot \operatorname{Sh} u_1$$

$$\operatorname{Sh}(u - u_1) = \operatorname{Sh} u \cdot \operatorname{Ch} u_1 - \operatorname{Ch} u \cdot \operatorname{Sh} u_1$$

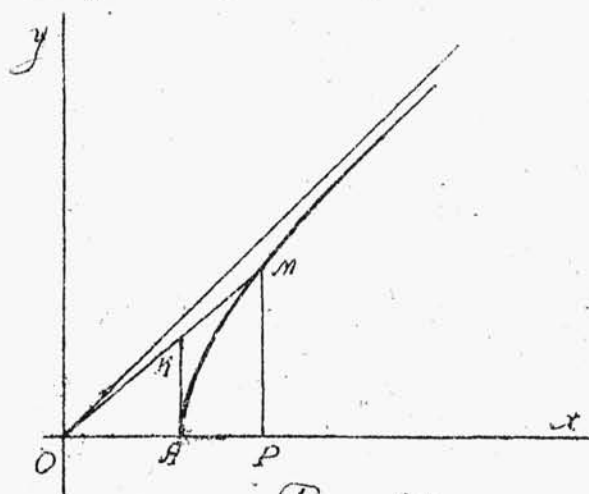
Niech będzie dana hyperbola równoboczna, a na niej punkt M . Opuśćmy z tego punktu prostopadłą MP do osi X . Jak wiemy

$$MP = \operatorname{Sh} u$$

$$OP = \operatorname{Ch} u$$

Poprowadźmy następnie AK równoległe do MP

do przecięcia się z OM . Widać z rysunku, że



Rys. 68.

$$\frac{MP}{OP} = \frac{AN}{OA}$$

Uwzględniając, że $OA=1$ napiszemy

$$\frac{Shu}{Chu} = AK = Th u$$

Również jest widoczne, że

$$S_{\Delta OAK} < \frac{u}{2} < S_{\Delta OMA}$$

czyli

$$\frac{OA \cdot AK}{2} < \frac{u}{2} < \frac{OA \cdot PM}{2}$$

Stąd zaś wynika, że

$$Th u < u < Sh u$$

Ponieważ zawsze $u > 0$, możemy wszystkie wyrazy tej nierówności podzielić przez $Sh u$:

$$\frac{1}{Chu} < \frac{u}{Sh u} < 1$$

Odwracając tę nierówność mamy:

$$Chu > \frac{Sh u}{u} > 1$$

Zakładając, że $u \rightarrow 0$ i przechodząc do granicy, znajdziemy, że

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{Sh u}{u} = 1$$

Wprowadźmy wreszcie wzory, zmieniające sumy i róż-

nice funkcji hyperbolicznych na iloczynny. Weźmy:

$$\begin{aligned} x+y &= a \\ x-y &= b \end{aligned}$$

Stąd

$$x = \frac{a+b}{2}; \quad y = \frac{a-b}{2}$$

Na mocy wzorów poprzednich:

$$\operatorname{Ch} a = \operatorname{Ch} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Ch} \frac{a-b}{2} + \operatorname{Sh} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Sh} \frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{Ch} b = \operatorname{Ch} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Ch} \frac{a-b}{2} - \operatorname{Sh} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Sh} \frac{a-b}{2}$$

Dodając i odejmując stronami obie równości, znajdziemy:

$$\operatorname{Ch} a + \operatorname{Ch} b = 2 \operatorname{Ch} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Ch} \frac{a-b}{2}$$

$$\operatorname{Ch} a - \operatorname{Ch} b = 2 \operatorname{Sh} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Sh} \frac{a-b}{2}$$

W ten sam sposób otrzymamy

$$\operatorname{Sh} a + \operatorname{Sh} b = 2 \operatorname{Sh} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Ch} \frac{a-b}{2}$$

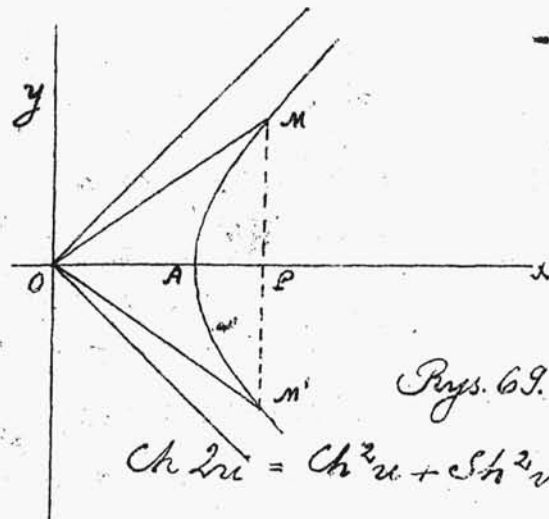
$$\operatorname{Sh} a - \operatorname{Sh} b = 2 \operatorname{Ch} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{Sh} \frac{a-b}{2}$$

Pojęcie funkcji hyperbolicznych możemy rozszerzyć i na wartości ujemne. Opierając się przytem na analogji z funkcjami kołowemi, założymy, że

$$\operatorname{Sh}(-u) = -\operatorname{Sh} u$$

$$\operatorname{Ch}(-u) = \operatorname{Ch} u$$

$$\operatorname{Th}(-u) = -\operatorname{Th} u$$



Ze wzorów na dodawanie funkcji hiperbolicznych wynikają wzory na podwojenie

Przys. 69. $\text{Sh } 2u = 2\text{Sh } u \cdot \text{Ch } u$

$$\text{Ch } 2u = \text{Ch}^2 u + \text{Sh}^2 u = 2\text{Sh}^2 u + 1 = 2\text{Ch}^2 u - 1$$

Wszystkie wyżej uzasadnione wzory są słuszne i wtedy, gdy $u < 0$.

Przejdźmy w końcu do ROZNICZKOWANIA FUNKCJI HIPERBOLICZNYCH.

Zauważmy więc, że

$$\frac{\text{Ch}(x+\Delta x) - \text{Ch } x}{\Delta x} = \frac{2\text{Sh}(x+\frac{\Delta x}{2}) \cdot \text{Sh } \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

a zatem

$$(\text{Ch } x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{Sh}(x+\frac{\Delta x}{2}) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{Sh } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \text{Sh } x$$

czyli

$$(\text{Ch } x)' = \text{Sh } x$$

zupełnie podobnie

$$\frac{\text{Sh}(x+\Delta x) - \text{Sh } x}{\Delta x} = \text{Ch}(x+\frac{\Delta x}{2}) = \frac{\text{Sh } \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

Przechodząc do granicy znajdziemy z łatwością, że

$$(\text{Sh } x)' = \text{Ch } x$$