

*Fig. 16.*

I klasy będą leżały po jednej stronie prostej a punkty, które odpowiadają liczbom II

lasy - po drugiej. Na zasadzie pewnika Dedekinda musi istnieć jakiś punkt  $C$ , odgraniczający obie części prostej ten punkt jest właśnie końcem odcinka  $AC$ , odpowiadającego liczbie  $\alpha$ .

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych stanowi t.zw. continuum arytmetyczne, a zbiór wszystkich odpowiadających mu punktów - continuum geometryczne. Wyżej ustanowiliśmy zależność między continuum arytmetycznym i geometrycznym i przekonaliśmy się, że jedno z nich można uważać za funkcję drugiego i odwrotnie. Gdy więc liczba  $\alpha$  zmienia się w obszarze continuum arytmetycznego, odpowiadający jej punkt  $\alpha$  ulega zmianie w obszarze continuum geometrycznego.

TEORIA CANTORA. Do pojęcia liczby niewymiernej dojść można, jak już na początku mówiliśmy, dwiema drogami. Jedną z nich, wskazaną przez Dedekinda już poznaliśmy. Teraz zapoznamy się w ogólnych zarysach z inną teorią, podaną przez Cantora, a opartą na pojęciu ciągów.

Ciągiem nazywamy szereg liczb, następujących w pewnym porządku po sobie, przyczem każda liczba, zwana wyrazem

ciągu jest określona przez swoje położenie w szeregu. Każdy wyraz ciągu jest więc funkcją liczby całkowitej  $n$  /wskaznika/, która wskazuje numer porządkowy tego wyrazu, niezależnie od tego, czy istnieje czy też nie istnieje wzór wyrażający tę zależność funkcjonalną. Ogólna postać ciągu jest następująca:

$$u_1, u_2, u_3, u_4, \dots, u_n, \dots$$

Wskaźniki  $1, 2, 3, \dots, n$  oznaczają kolejne numery miejsc ciągu, zajmowanych przez dane wyrazy. Wyraz  $u_n$  nosi nazwę ogólnego wyrazu ciągu. Przykładów wzorów, wyznaczających wyraz ogólny ciągu, jako funkcję miejsca, znaleźć można bardzo wiele, np.  $u_n = \frac{1+n}{n^2}$ . Ciąg otrzymamy, podstawiając zamiast  $n$  kolejno liczby  $1, 2, 3, \dots$ . Ciąg będzie więc następujący:

$$2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \dots$$

Niektóre albo wszystkie wyrazy ciągu mogą się po kilka lub nawet nieskończenie wiele razy powtarzać, jak to ma miejsce w ciągu, w którym  $u_n$  równa się liczbie dzielników liczby  $n$ .

$$1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, \dots$$

Inny przykład ciągu: 2 pierwsze wyrazy są równe 1, następnie zaś  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ . Jest to tak zwany ciąg Fibonacciego:

$$1, 1, 2, 3, 5, \dots, 13, 21, \dots$$

Jeżeli każdy następujący wyraz ciągu jest większy od poprzedniego, ciąg nazywa się rosnącym. Ciąg taki może rosnać nieograniczenie, albo wyrazy jego mogą nie przekraczać pewnej granicy, jak np.  $u_n = \frac{n-1}{n}$

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$$

Liczby tego ciągu stale rosną, jednak nie mogą stać się większe, ani nawet równe jedności, bowiem  $u_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$ , gdzie  $n$  jest zawsze liczbą całkowitą dodatnią; a więc  $u_n < 1$ . Ciąg, którego wszystkie wyrazy są mniejsze od pewnej liczby  $M$ , nazywa się ciągami ograniczonym od góry. Ciągi rosnące, lub przynajmniej nie malejące, złożone z liczb wymiernych, noszą nazwę ciągów podstawowych rosnących.

$$u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n$$

Odpowiednie ciągi, w których każdy wyraz jest mniejszy od poprzedniego, nazywamy ciągami malejącymi. Jeżeli wyrazy ciągu malejącego pozostają większe od pewnej liczby, mówimy, że ciąg jest ograniczony od dołu.

Cantor w swej teorii liczb niewymiernych posługuje się ciągami podstawowymi rosnącymi, ograniczonymi od góry i malejącymi, ograniczonymi od dołu. Jeden taki ciąg wystarcza do zbudowania teorii Cantora, dla nas jednak wygodniej będzie rozpatrywać jednocześnie dwa ciągi:

$$(1) u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq M$$

$$(2) u'_1 \geq u'_2 \geq u'_3 \geq \dots \geq u'_n \geq \dots \geq m$$

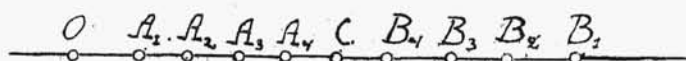
Takie 2 ciągi nazywają się zbieżnymi, posiadają one 3 własności, o których mówiliśmy przy znajdowaniu pola krzywej. Ciągi te określają pewną liczbę, która jeśli nawet nie jest wymierną, jest jednak przez te ciągi jak przez przekrój, określoną. Jest ona mianowicie większą od wszystkich liczb ciągu /1/ i mniejsza od wszystkich liczb ciągu /2/.

Pomiędzy teorią Dedekinda i teorią Cantora zachodzi analogja; gdy umiemy określić liczbę za pomocą pierwszej teorii, potrafimy ją określić za pomocą teorii drugiej.

Gdy jakaś liczba jest zdefiniowana za pomocą dwóch ciągów podstawowych Cantora, można ją zdefiniować za pomocą przekrojów Dedekinda. Niech więc liczba  $\alpha$  będzie określona przez ciągi:

- (1)  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$   
 (2)  $b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n$

Określimy przekrój w sposób następujący: do niższej klasy zaliczamy wszystkie liczby wymierne równe liczbom



Rys. 17.

ciągu  $1/1$ , lub od nich mniejsze; do klasy wyższej zaś wszystkie pozosta-

łe liczby wymierne. Przekrój ten określa liczbę większą od liczb klasy niższej i mniejszą od liczb klasy wyższej. Tą liczbą jest właśnie liczba niewymierna  $\alpha$ .

Przypuśćmy, że liczba niewymierna  $\alpha$  jest określona przez przekrój  $a, A$ . Niech  $a < \alpha < A$ . Pomiędzy liczbą  $a$  i  $A$  można wstawić szereg liczb kolejnych:

$$a, a+1, a+2, a+3, \dots, A$$

W tym szeregu istnieć muszą 2 liczby kolejne, należące do różnych klas. Różnice pomiędzy temi liczbami  $c$  i  $c+1$  dzielimy na  $n$  równych części i tworzymy nowy szereg:

$$c, c + \frac{1}{n}, c + \frac{2}{n}, c + \frac{3}{n}, \dots, c + \frac{n-1}{n}, c + \frac{n}{n}$$

I w tym szeregu istnieją 2 kolejne liczby  $c + \frac{c_1}{n}$  i  $c + \frac{c_1+1}{n}$ , z których jedna należy do klasy niższej, druga zaś do wyższej. Pomiędzy te liczby znowu wstawiamy szereg liczb:

$$C + \frac{c_1}{n}, C + \frac{c_1}{n} + \frac{1}{n^2}, C + \frac{c_1}{n} + \frac{2}{n^2}, \dots, C + \frac{c_1}{n} + \frac{n}{n^2}$$

Możemy proces ten rozwijać w dalszym ciągu, nigdy jednak nie otrzymamy liczby  $\alpha$ . Liczby klasy I stanowią ciąg rosnący, a liczby klasy II malejący; wszystkie liczby klasy II są większe od wszystkich liczb klasy I; różnica między wyrazami odpowiednimi  $\frac{1}{n^k}$  może stać się dowolnie małą. Mamy więc dwa ciągi, określające liczbę niewymierną  $\alpha$ .

$$(1) \quad C < C + \frac{c_1}{n} < C + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} < \dots$$

$$(2) \quad C + 1 > C + \frac{c_1 + 1}{n} > C + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2 + 1}{n^2} > \dots$$

Liczba  $\alpha$  jest większa od wszystkich liczb ciągu /1/ i mniejsza od wszystkich liczb ciągu /2/. Liczb określonych przez te ciągi może być tylko jedna. Gdyby bowiem istniała jeszcze liczba  $\beta > \alpha$ , to zachodziłaby nierówność:

Liczby ciągu /1/  $< \alpha < \beta <$  liczby ciągu /2/; różnica między liczbami obu ciągów byłaby większą od  $\beta - \alpha$ , a więc nie dowolnie małą, jak jest powiedziane w założeniu.

Jaśniej się przedstawi ten dowód w interpretacji geometrycznej. Obu ciągom odpowiadać będą dwa szeregi punktów. Punkty odpowiadające ciągowi /1/ oznaczymy li-

terą  $A$ , zaś punkty, które odpowiadają ciągowi /2/ literą  $B$ . /odpowiednimi wskaźnikami/. Punkty  $A$  i  $B$  nie przeplatają się ze sobą, jednak odległość między nimi może być dowolnie małą. A więc granicą między punktami  $A$  i  $B$  może być tylko jeden punkt, mianowicie odpowiadający liczbie  $\alpha$  /rys.17/.

W ten sposób wykazaliśmy, że zachodzi odpowiedniość między teorią Cantora i teorią Dedekinda.

Teorię Cantora możnaby przeprowadzić niezależnie od teorii Dedekinda, jako całość wystarczającą samą przez się. Trzeba byłoby w takim razie za pomocą ciągów określić równość lub nierówność liczb, zdefiniowanych przez te ciągi, a także dodawanie i mnożenie w ten sposób określonych liczb. To wszystko można znaleźć np. w "Teorii liczb niewymiernych" prof. Sierpińskiego, do kąd odsyłamy pragnących głębiej poznać teorię Cantora.

### POJĘCIE FUNKCJI.

Pojęcie funkcji jest to pojęcie odpowiedniości pomiędzy dwoma zbiorami liczb. Przypuśćmy, że  $x$  i  $y$  są liczbami dwu różnych zbiorów. Gdy liczba  $x$  zmieniać się może dowolnie, przyczym poszczególnym jej wartościom odpowiadają określone wartości zmiennej  $y$ , po-