

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

• ile $-1 < x < 1$, przy innych wartościach zmiennej x szereg ten jest rozbieżny /nie może więc określać pewnej funkcji/. Gdy $x=1$, otrzymujemy:

$$\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

W taki sam sposób rozwijamy na szereg funkcję $\arctg x$.

$$\begin{aligned} \arctg x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots) dt = \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Łatwo udowodnić, że jest to prawidłowe, gdy $|x| \leq 1$.

Jeżeli $x=1$, mamy:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

CAŁKOWANIE.

Określiliśmy w swoim czasie pojęcie oraz poznaliśmy niektóre sposoby całkowania. Teraz będziemy w dalszym ciągu badać jego technikę. Rozpocznijmy od całek najprostszych, mianowicie od całek funkcji wymiernych.

Niech będzie dana funkcja wymierna:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Możemy uważać, że stopień wielomianu $P(x)$ nie

jest wyższy od stopnia wielomianu $\theta(x)$, w przeciwnym bowiem razie moglibyśmy z tego ułamka wyłączyć część całkowitą.

Rozwiązując równanie $\theta(x)=0$, znajdziemy n jego pierwiastków: a_1, a_2, \dots, a_n , które pozwolą nam rozłożyć daną funkcję na ułamki proste. Założmy, że wszystkie pierwiastki są jednokrotne.

$$R(x) = \frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} + \dots + \frac{c_n}{x-a_n}$$

W takim razie

$$\int R(x) dx = c_1 \int \frac{dx}{x-a_1} + c_2 \int \frac{dx}{x-a_2} + \dots + c_n \int \frac{dx}{x-a_n}$$

skąd

$$\int R(x) dx = c_1 \lg(x-a_1) + c_2 \lg(x-a_2) + \dots + c_n \lg(x-a_n)$$

Suma powyższa jest zawsze rzeczywista, gdyż jeśli nawet posiada ona składniki zespolone, to wchodzą one, jak wiemy, parami sprzężonymi /posiadającymi sumę rzeczywistą/. Przypuśćmy, że pierwiastki a_1 i a_2 są sprzężone. Wówczas jednak wyrażenie:

$$\frac{c_1}{x-a_1} + \frac{c_2}{x-a_2} = \frac{c_1(x-a_2) + c_2(x-a_1)}{(x-a_1)(x-a_2)}$$

jest wyrażeniem o współczynnikach rzeczywistych kształtu $\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}$. Przy rozkładzie więc funkcji $R(x)$ będziemy spotykali ułamki proste typu $\frac{c}{x-a}$, jeżeli a jest pierwiastkiem rzeczywistym, oraz typu

$\frac{mx+n}{x^2+2ax+b}$ jeżeli a jest pierwiastkiem zespolonym

/przy założeniu, że jest to pierwiastek jednorodny/.

Ułamki pierwszego typu całkować umiemy, należy więc całkować ułamek o postaci:

$$\frac{mx+n}{x^2+2ax+b} = \frac{m}{2} \cdot \frac{2x+2a}{x^2+2ax+b} + \frac{n-ma}{x^2+2ax+b}$$

Otrzymujemy

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b} dx = \frac{m}{2} \int \frac{2x+2a}{x^2+2ax+b} dx + (n-ma) \int \frac{dx}{x^2+2ax+b}$$

W pierwszym składniku licznik funkcji podcałkowej jest pochodną mianownika, mamy więc:

$$\int \frac{2x+2a}{x^2+2ax+b} dx = \log(x^2+2ax+b)$$

Dla znalezienia drugiego składnika założymy:

$$(x+a)^2 = (b-a^2)z^2$$

czyli

$$x+a = \sqrt{b-a^2} \cdot z$$

Przybierze on wobec tego postać

$$\frac{n-ma}{\sqrt{b-a^2}} \int \frac{dz}{z^2+1}$$

Ostatnia całka daje nam funkcję $\arctg z$, a za-

tem

$$\int \frac{mx+n}{x^2+2ax+b} dx = \frac{m}{2} \log(x^2+2ax+b) + \frac{n-ma}{\sqrt{b-a^2}} \arctg \frac{x+a}{\sqrt{b-a^2}}$$

Założmy teraz, że równanie $\theta(x) = 0$,

posiada pierwiastki wielokrotne np. a_1, a_2
W tym przypadku:

$$R(x) = \frac{P(x)}{(x-a_1)^k (x-a_2)^r \dots} = \frac{c_1}{(x-a_1)^k} + \frac{c_2}{(x-a_2)^r} + \dots +$$

Będziemy więc mieli całki typu

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = -\frac{c}{(k-1)(x-a)^{k-1}}$$

Tutaj również mogą się zdarzyć pierwiastki zespolone, wchodzące parami sprzężzonymi, np. a i \bar{a} . Unikniemy działań nad nimi, całkując jednocześnie dwa ułamki /wielokrotność obu musi być tego samego stopnia/:

$$\frac{c}{(x-a)^k} + \frac{d}{(x-\bar{a})^k} = \frac{c(x-\bar{a})^k + d(x-a)^k}{[(x-a)(x-\bar{a})]^k}$$

które dadzą po przekształceniu ułamek o postaci:

$$\frac{m_1 x^k + m_2 x^{k-1} + \dots + m_k x + m_{k+1}}{(Ax^2 + 2Bx + C)^k}$$

a gdy oznaczymy $Ax^2 + 2Bx + C$ przez t :

$$\frac{m_1 x^k}{t^k} + \frac{m_2 x^{k-1}}{t^k} + \dots + \frac{m_k x}{t^k} + \frac{m_{k+1}}{t^k}$$

Będziemy mieli stąd całki typu $\int \frac{x^n}{t^k} dx$. Dla znalezienia ich korzystamy z t.zw. w z o r ó w r e d u k c y j n y c h .

Założmy najpierw, że $n=0$, czyli że mamy całkę:

$$I_n = \int \frac{dx}{t^n}$$

gdzie $t = Ax^2 + 2Bx + C$

Utwórzmy funkcję $\frac{Ax+B}{t^n}$ i znajdziemy jej pochod-

$$\begin{aligned} \text{ną: } \frac{d}{dx} \left(\frac{Ax+B}{t^n} \right) &= \left[(Ax+B) t^{-n} \right]' = At^{-n} + [-n t^{-n-1} \frac{dt}{dx} (Ax+B)] = \\ &= \frac{A}{t^n} - \frac{2n}{t^{n+1}} (Ax+B)^2 \end{aligned}$$

Ponieważ

$$(Ax+B)^2 = A^2 x^2 + 2ABx + B^2 = At + B^2 - AC,$$

przeto

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Ax+B}{t^n} \right) = \frac{A}{t^n} - \frac{2n}{t^{n+1}} (At+B^2-AC) = \frac{A}{t^n} - \frac{2nA}{t^{n+1}} - \frac{2n(B^2-AC)}{t^{n+1}} = \frac{A(1-2n)}{t^n} - \frac{2n(B^2-AC)}{t^{n+1}}$$

Całkując tę równość otrzymamy:

$$\frac{Ax+B}{t^n} = A(1-2n) \int \frac{dx}{t^n} - 2n(B^2-AC) \int \frac{dx}{t^{n+1}}$$

skąd

$$2n(B^2-AC) \int \frac{dx}{t^{n+1}} = A(1-2n) \int \frac{dx}{t^n} - \frac{Ax+B}{t^n}$$

A zatem

$$\int \frac{dx}{t^{n+1}} = \frac{A(2n-1)}{2n(AC-B^2)} \int \frac{dx}{t^n} + \frac{Ax+B}{2n(AC-B^2) \cdot t^n}$$

Jest to właśnie żądany wzór redukcyjny; stosując go, obniżamy o jedność wykładnik mianownika funkcji podcałkowej. Na zasadzie tegoż wzoru mamy:

$$\int \frac{dx}{t^n} = \frac{A(2n-3)}{2(n-1)(AC-B^2)} \int \frac{dx}{t^{n-1}} + \frac{Ax+B}{2(n-1)(AC-B^2) \cdot t^{n-1}}$$

Przez kilkakrotne zastosowanie tego wzoru możemy

stopniowo obniżyć ten wykładnik aż do $n=1$:

$$I_{n+1} = \frac{A^n(2n-1)(2n-3) \dots 3 \cdot 1}{2 \cdot n \cdot (2n-2) \cdot (2n-4) \dots 4 \cdot 2 (AC-B^2)^{n/2}} \int \frac{dx}{t} + R(x),$$

gdzie $R(x)$ jest funkcją wymierną.

Niech teraz będzie dana całka $\int \frac{x^m}{t^n} dx$ gdzie $m \neq 0$

Utworzymy funkcję $\frac{x^{m-1}}{t^n}$ i znajdziemy jej pochodną:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x^{m-1}}{t^n} \right) &= \frac{(m-1)x^{m-2}}{t^n} - \frac{nx^{m-1} \cdot 2(Ax+B)}{t^{n+1}} = \\ &= \frac{(m-1)x^{m-2}(Ax^2+2Bx+C) - 2nAx^{m-1} - 2nBx^{m-1}}{t^{n+1}} = \\ &= \frac{A(m-1-2n)x^m}{t^{n+1}} + \frac{2B(m-1-n)x^{m-1}}{t^{n+1}} + \frac{C(m-1)x^{m-2}}{t^{n+1}} \end{aligned}$$

Gdy to scałkujemy, otrzymamy:

$$\frac{x^{m+1}}{t^n} = A(m-1-2n) \int \frac{x^m}{t^{n+1}} dx + 2B(m-1-n) \int \frac{x^{m-1}}{t^{n+1}} dx + C(m-1) \int \frac{x^{m-2}}{t^{n+1}} dx$$

A stąd

$$\int \frac{x^m}{t^{n+1}} dx = \frac{x^{m-1}}{A(m-1-2n)t^n} - \frac{2B(m-1-n)}{A(m-1-2n)} \int \frac{x^{m-1}}{t^{n+1}} dx - \frac{C(m-1)}{A(m-1-2n)} \int \frac{x^{m-2}}{t^{n+1}} dx.$$

Przy pomocy tego wzoru możemy stopniowo redukować potęgę x , dopóki nie otrzymamy $x^0/$, t.j. sprowadzimy daną całkę do typu poprzednio rozpatrzonego.

Potrafimy więc teraz znaleźć całkę każdej funkcji wymiernej $R(x)$. Należy zauważyć, że przy całkowaniu otrzymamy zawsze funkcje wymierne oraz funkcje \arctg lub logarytm.

$$\int R(x) dx = R_1(x) + \sum c_n \log(x-a_n) + \sum d_m \arctg \frac{x-b_m}{c_m}$$

Przystąpimy z kolei rzeczy do całkowania funkcji algebraicznych niewymiernych. Przekonamy się, że tutaj za kres funkcji już znanych jest niewystarczający; spotkamy się z pewnymi rodzajami funkcji nam dotychczas obcych.

Niech będzie dana całka $\int R(x, \sqrt{Ax+B})$, gdzie R oznacza pewną funkcję wymierną. Oznaczając $\sqrt{Ax+B}=t$ skąd

$$x = \frac{t^2-B}{A}; \quad dx = \frac{2t dt}{A};$$

otrzymujemy znaną już całkę funkcji wymiernej:

$$\int R\left(\frac{t^2-B}{A}, t\right) \frac{2t}{A} dt.$$

Niech będzie dana całka $\int R(\sqrt{Ax^2+2Bx+C}) dx$. Spro-
wadzamy ją do całki wymiernej zapomocą t.zw. p o d -
s t a w i e n i a E u l e r a . Należy rozpatrzeć
trzy przypadki

$$1/1) \quad B^2 > AC$$

Pierwiastki a i b trójmianu podpierwiastkowego
są rzeczywiste; możemy go więc rozłożyć na czynniki
rzeczywiste:

$$Ax^2+2Bx+C = A(x-a)(x-b)$$

więc $\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \sqrt{A(x-a)} \sqrt{\frac{x-b}{x-a}}$ o ile $A > 0$

zaws $\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \sqrt{-A(x-a)} \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$ o ile $A < 0$

Podstawiamy

$$1/1) \quad \sqrt{\frac{x-b}{x-a}} = t$$

$$\text{lub } \sqrt{\frac{b-x}{x-a}} = t$$

Ponieważ różnicy zasadniczej między temi dwoma
przypadkami /gdy $A > 0$ oraz gdy $A < 0$ / niema, założymy,
że $A > 0$.

Wówczas

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \sqrt{A(x-a)} \cdot t$$

Kładź zaś z równania 1/1/:

$$x-b = (x-a)t^2 \quad x t^2 - a t^2$$

skąd $at^2 - b = x^2(t^2-1)$; więc

$$x = \frac{at^2 - b}{t^2 - 1}; \quad dx = \frac{2t(b-a)}{(t^2-1)^2} dt;$$

$$x - a = \frac{-b+a}{t^2-1};$$

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \sqrt{A} \cdot (x-a) \cdot t = \sqrt{A} \cdot \frac{a-b}{t^2-1} \cdot t$$

A zatem dana całka daje się sprowadzić do całki funkcji wymiernej, którą obliczyć potrafimy:

$$\int R(\sqrt{Ax^2+2Bx+C}) dx = \int R\left[\sqrt{A} \cdot \frac{(a-b)t}{t^2-1}\right] \cdot \frac{2t(b-a)}{(t^2-1)^2} dt.$$

$$|B| \quad B^2 < AC$$

Można założyć, że zawsze $A > 0$ a zatem i $C > 0$, ponieważ $AC > B^2 > 0$, w przeciwnym bowiem razie trójmian byłby ujemny dla każdej wartości x , zaś funkcja podcałkowa byłaby zespolona i nie można uniknąć wielkości zespolonych.

Podstawiamy:

$$\sqrt{Ax^2+2Bx+C} = \sqrt{A} \cdot x + t,$$

Skąd

$$Ax^2+2Bx+C = Ax^2+2t\sqrt{A}x+t^2$$

$$2(B-\sqrt{A}t)x = t^2-C$$

A więc

$$x = \frac{t^2-C}{2(B-\sqrt{A}t)}$$

oraz

$$dx = \frac{2t(B-\sqrt{A}t) + \sqrt{A}(t^2-C)}{2(B-\sqrt{A}t)^2} dt$$

A zatem daną całkę sprowadzimy do całki funkcji wymiernej:

$$\int R \left[\frac{-\sqrt{A} \cdot t^2 + 2Bt - c\sqrt{A}}{2(B - \sqrt{A} \cdot t)} \right] \cdot \frac{2t(B - \sqrt{A}t) + \sqrt{A}(t^2 - C)}{2(B - \sqrt{A} \cdot t)^2}$$

$$|C| \quad B^2 = AC$$

W tym przypadku wyrażenie podpierwiastkowe jest kwadratem zupełnym; niewymierność jest więc tylko pozorna.

P r z y k ł a d . Dana jest całka $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. Podstawiamy:

$$\sqrt{1+x^2} = x+t$$

A więc

$$1+x^2 = x^2 + 2xt + t^2$$

skąd

$$x = \frac{1-t^2}{2t}; \quad dx = \frac{-1+t^2}{2t^2} \cdot dt$$

Zatem

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = - \int \frac{2t(1+t^2)}{(1+t)^2 \cdot 2t^2} \cdot dt = - \int \frac{dt}{t} = -\log t = -\log \frac{1}{t}.$$

Ponieważ zaś

$$t = \sqrt{1+x^2} - x; \quad \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} = \sqrt{1+x^2} + x,$$

więc ostatecznie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \pm \log(\sqrt{1+x^2} \pm x).$$

W ten sam sposób znajdziemy, że

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \pm \log(x \pm \sqrt{x^2 - a^2})$$

Uwzględniamy tu obydwa znaki, gdyż obie całki różnią się tylko o wielkość stałą:

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2}) \cdot (x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

więc

$$\log(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = -\log(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + \log a^2$$

Niech będzie dana całka $\int R(x, \sqrt{ax+b}) dx$, gdzie R oznacza dowolną funkcję wymierną względem x oraz $\sqrt{ax+b}$

Podstawmy: $ax+b=t$, skąd

$$x = \frac{t-b}{a}; \quad dx = \frac{1}{a} dt$$

Tym sposobem sprowadzimy całkę daną do całki już znanej:

$$\int R\left(\frac{t-b}{a}, t\right) \cdot \frac{1}{a} dt$$

Niech będzie znowu dana całka $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{a_1x+b_1}) dx$

Podstawiamy: $ax+b=t^2$, skąd

$$x = \frac{t^2-b}{a}; \quad dx = \frac{2t}{a} dt.$$

W takim razie

$$\sqrt{a_1x+b_1} = \sqrt{a_1 \frac{t^2-b}{a} + b_1} = \sqrt{\frac{a_1}{a} t^2 - \frac{a_1}{a} b + b_1}.$$

Ostatecznie dana całka sprowadzi się do całki:

$$\int R\left(\frac{t^2-b}{a}, t, \sqrt{At^2+C}\right) \frac{2t}{a} dt$$

Łatwo również da się obliczyć całka:

$$\int R(x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, \dots, x^{a_n}) dx$$

gdzie

$$a_1 = \frac{p_1}{q_1}; \quad a_2 = \frac{p_2}{q_2}; \quad \dots \quad a_n = \frac{p_n}{q_n};$$

czyli

$$x^{a_1} = \sqrt[q_1]{x^{p_1}}, \quad \dots \quad x^{a_n} = \sqrt[q_n]{x^{p_n}}.$$

Możemy założyć, że $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są to ułamki nieskracalne. Oznaczmy ich najmniejszy wspólny mianownik przez D , tak iż

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{D}, \alpha_2 = \frac{m_2}{D}, \dots, \alpha_n = \frac{m_n}{D}$$

Podstawmy $x = t^D$, skąd $dx = Dt^{D-1}dt$, $x^{\frac{1}{D}} = t$

Otrzymamy więc całkę funkcji wymiernej:

$$\int R(t^{m_1}, t^{m_2}, \dots, t^{m_n}) Dt^{D-1}dt$$

Krzywą jednobieżną będziemy nazywali taką krzywą $f(x, y)$, której spókrzędne są funkcjami wymiernymi pewnego parametru:

$$x = u(t), y = v(t).$$

Przypuśćmy, iż jest dane równanie:

$$f(x, y) \equiv ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \dots = 0$$

i mamy znaleźć całkę funkcji wymiernej: $\int R(x, y) dx$.

Jeżeli krzywa $f(x, y) = 0$ jest jednobieżna, to stosując tak zwane podstawienie Abela, sprowadzimy daną całkę do całki funkcji wymiernej:

$$\int R[u(t), v(t)]u'(t)dt.$$

Całki, które powyższą metodą dają się obliczyć, noszą nazwę całek związanych z teoreją stożkowych. Nazwę tę tłumaczy następujące wyjaśnienie.

Jeżeli x i y są związane zależnością drugiego stopnia, to można zawsze metodę powyższą zastosować. Należy więc udowodnić, że każda krzywa, wyznaczająca się przez równanie drugiego stopnia, czyli każda stożkowa