

$x^2 + 5 \geq 5$ . Stąd  $\frac{1}{x^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$ . Ponadto  $\frac{1}{x^2 + 5} > 0$ .  
Ostatecznie możemy napisać to w postaci:

$$0 < \frac{1}{x^2 + 5} \leq \frac{1}{5}$$

Łatwo dać przykłady funkcji, ograniczonych tylko od góry lub tylko od dołu.

Kresom górnym /wyższym/ danej funkcji nazywa się najmniejszą z liczb której wartości funkcja nigdy nie może przewyższyc, t.j. spełniająca nierówność

$$(1) f(x) \leq K$$

i ponad to ten warunek, że gdy wybierzemy dowolnie małą liczbę  $\varepsilon$ , to istnieć będą zawsze takie wartości  $x$ , że spełnioną zostanie nierówność

$$(2) f(x) > K - \varepsilon$$

**TWIERDZENIE.** Jeżeli funkcja określona w przedziale  $(a, b)$  jest ograniczona od góry, to posiada kres górny. Niech będzie

$$f(x) \leq M$$

Wyobraźmy sobie przekrój następujący: do I. ej

klasy należą takie liczby  $L_1$ , że istnieją wartości funkcji /przynajmniej jedna/ od niej większe:

$$f(x) > L_1$$

Wszystkie pozostałe liczby należą do klasy II i mamy przy wszelkim  $x$ , należącym do przedziału  $(a, b)$

$$f(x) \leq L_2$$

Przekrój został więc ustalony. Określa on liczbę, którą oznaczmy przez  $K$ . Różnica pomiędzy  $K$  i liczbą  $L_1$  klasy I-ej może być przy odpowiednim doborze  $L_1$  uczyniona dowolnie małą — oznaczmy ją przez  $\varepsilon$ :

$$K - \varepsilon = L_1$$

Istnieją więc takie wartości  $x$ , że  $K - \varepsilon < f(x)$  czyli  $f(x) > K - \varepsilon$ . Nierówność /2/ jest zatem spełniona.

Również spełniona jest nierówność /1/, gdyż w przeciwnym razie przy pewnych wartościach  $x$  funkcja  $f(x)$

mogłaby się stać większą od jakiejś liczby  $L_2$ . W rzeczy samej, niech  $f(x') > K$ ; w takim razie istnieje

liczba spełniająca nierówność  $f(x') > L > K$

t.j. liczba pośrednia między  $f(x')$  i  $K$ ; lecz liczba ta jest klasy drugiej, t.j.  $L = L_2$ , czyli otrzymaliśmy,

że  $f(x') = L_2$ , co jest niemożliwe. Istnienie kresu

górnego zostało więc udowodnione. Twierdzenie to stosuje się do każdej funkcji ograniczonej, ciągłej czy nieciągłej.

K r e s e m d o l n y m /n i ż s z y m/

nazywa się największą z liczb  
która jest równa lub mniejsza  
od wszystkich wartości funk-  
cji: (1)  $f(x) \geq k$

Istnieją przytem takie wartości  $x$ , że

$$(2) f(x) < k + \varepsilon$$

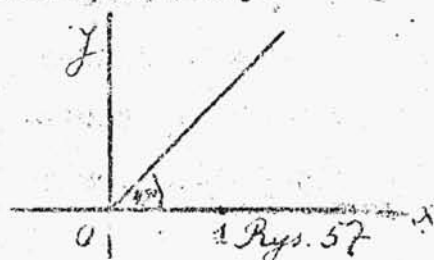
Analogicznie do poprzedniego udowodnić można na-  
stępujące twierdzenie: funkcja określo-  
na w przedziale  $(a, b)$  i ograni-  
czona od dołu, posiada kres  
dolny.

Zbadajmy teraz, jakie własności posiadają kresy  
gorny i dolny funkcji ciągłej. Przedewszystkiem wyka-  
żemy na przykładzie, że istnieją funkcje / nieciągłe/  
które kresu gornego lub dolnego nigdy nie osiąga.

Niech np.  $0 \leq x \leq 1$  i niech  $f(x) = x$ , gdy  $x \neq 1$  oraz  
 $f(x) = 0$  gdy  $x = 1$ . Kresem górnym tej funkcji jest 1  
gdyż  $f(x) = 1$  i istnieją takie wartości  $x$ , że przy  
dowolnie małym  $\varepsilon$

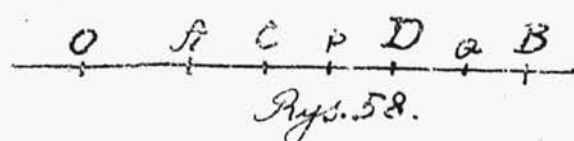
$$f(x) > 1 - \varepsilon$$

Funkcja jednak nigdy kresu górne-  
go nie osiąga.



TWIERDZENIE. Funkcja  $f(x)$ , ciągła

w przedziale  $(a, c)$  jest w tym przedziale ograniczona. Z ciągłości funkcji w punkcie  $A$  wynika, że istnieje taki przedział  $(a, c)$ , wewnątrz którego funkcja jest ograniczona. Podzielmy wszystkie punkty przedziału  $(a, c)$



na 2 klasy: do I zaliczymy te punkty  $C$ , dla których funkcja jest w przed-

ziale  $(A, C)$  ograniczona: do klasy II zaś wszystkie pozostałe punkty. Otrzymaliśmy przekrój; niech punkt  $D$  odpowiada temu przekrojowi. Funkcja, będąc z założenia ciągłą w przedziale  $(A, B)$ , musi być ciągłą w każdej jego części np.  $(P, Q)$ , otaczającej punkt  $D$  wyznaczony przez przekrój określony powyżej. Również z ciągłości wynika, że jakkolwiek małą jest liczba  $\varepsilon$ , odpowiada jej taka liczba  $\eta$ , że nierówność

$$11/ \quad d - \eta < x < d + \eta$$

pociąga za sobą nierówność

$$12/ \quad f(d) - \varepsilon < f(x) < f(d + \varepsilon)$$

Funkcja  $f(x)$  jest więc, w przedziale  $(d - \eta, d + \eta)$  =  $PQ$ , ograniczona. Lecz punkt  $P$ , leżący na prawo od  $D$ , należy do klasy I, zatem funkcja jest ograniczona w przedziale  $(A, P)$ , a więc i  $(A, Q)$ . Według założenia jednak punkt  $Q$  należy do klasy II tak, iż

funkcja nie może być w przedziale  $(A, a)$  ograniczona. Ta sprzeczność wskazuje, że klasa II, a zatem i przekrój nie istnieją. Funkcja musi być ograniczona w całym przedziale

**TWIERDZENIE.** Funkcja  $f(x)$ , ciągła w przedziale  $(a, b)$ , musi w tym przedziale przybrać wartości równe kresom górnemu i dolnemu. Niech  $K$  będzie kresem górnym funkcji  $f(x)$ . Z określenia pojęcia kresu wynika, że dla każdej części odcinka  $AB$  /rys. 58/ kres górny nie może być większy od  $K$ . Możemy przypuścić również, że w punkcie  $A$  wartość funkcji jest różna od  $K$  /gdyby  $f(a) = K$ , twierdzenie byłoby dowiedzione/. Istnieje otoczenie prawostronne punktu  $A$ , w którym to otoczeniu wartość funkcji jest mniejsza od  $K$ . Utwórzmy przekrój następujący: do klasy I zaliczamy takie punkty  $C$ , aby w przedziale  $AC$  kres górny był mniejszy od  $K$  do klasy II zaś takie, aby kres górny był równy  $K$ . Łatwo zauważyć, że 1/ liczby klasy I są mniejsze od liczb klasy II; 2/ każda liczba przedziału  $(a, b)$  należy do jednej z klas; 3/ obie klasy istnieją. Przekrój określa więc pewną liczbę, którą oznaczymy przez  $d$  /punkt 2 na rysunku/. Niech  $f(d) = K$ .

i przypuścimy, że  $1/3 K_1 < K$ . Udowodnimy, że nierówność  $1/3$  jest niemożliwa. Wybierzmy bowiem liczbę  $\varepsilon > 0$  tak, aby

$$\varepsilon < K - K_1$$

Ponieważ funkcja jest ciągła w punkcie  $a$ , musi istnieć przedział  $PQ$ , otaczający punkt  $a$ .

$$(PQ = 2Q - a)$$

w którym

$$f(x) < f(a) + \varepsilon = K_1 + \varepsilon = K_1 + K - K_1$$

$$f(x) < K$$

A więc w całym przedziale  $PQ$  wartość funkcji byłaby mniejsza od  $K$ , co sprzeczniwa się temu, że punkt  $a$  należy do klasy II. Zatem przypuszczenie, że  $K_1 < K$  było niesłuszne. Musi być  $f(a) = K$ . Igdyż nie może być  $f(a) > K$ , czyli istnieje wartość funkcji równa kresowi górnemu.

Tak samo moglibyśmy udowodnić, że funkcja przyjmuje wartość równą kresowi dolnemu. Z twierdzeń tych w związku z jednym z twierdzeń poprzednich wynika jeszcze:

**TWIERDZENIE:** Funkcja ciągła w przedziale  $(a, b)$  przyjmuje wszystkie wartości rzeczywiste, zawarte pomiędzy kresami dolnym i górnym.