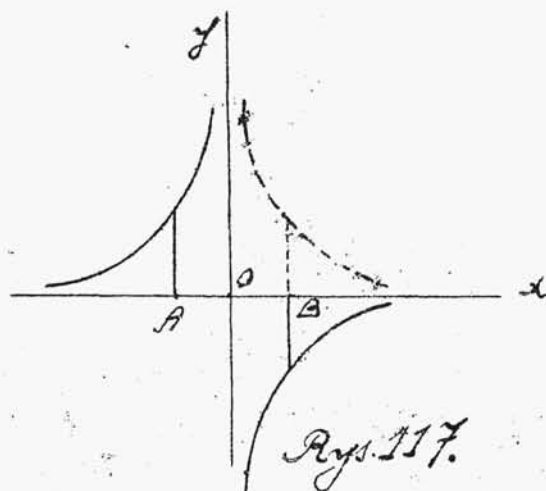


szywy /patrz rys.117/



ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ LICZ-
BOWYCH: Jeżeli mamy dane
jakiegokolwiek równanie,
to rozwiązanie tego rów-
nania polega na oblicze-
niu z dowolną dokładnoś-
cią jego pierwiastków.

Dla wygody rozdzielamy samo rozwiązanie równania na 2 części: oddzielenie pierwiastków i znalezienie pierwiastków.

Oddzielenie pierwiastków polega na tem, aby wyznaczyć takie przedziały, które zawierałyby tylko po jednym pierwiastku. Tutaj wystarczy zastanowić się tylko nad równaniami z pierwiastkami jednokrotnymi, albowiem każde równanie, posiadające pierwiastki wielokrotne, można zastąpić przez układ równań o pierwiastkach jednokrotnych.

Istota drugiego zagadnienia polega na tem, aby, mając pierwiastek już oddzielony, obliczyć go z coraz większą dokładnością.

Do rozwiązywania tych zagadnień istnieje wielka liczba różnych metod. Żadna z nich jednak nie jest zupeł-

nie doskonała: każda ma swoje wady i swoje zalety.

Wskazemy najpierw bardzo prosty sposób oddzielenia pierwiastków. Niech będzie dane równanie

$$f(x)=0$$

Podstawimy na miejsce x dwie jakiekolwiek liczby np. 2 i 8, i sprawdzimy, czy funkcje $f(2)$ i $f(8)$ mają ten sam znak, czy też znaki różne. Jeżeli okaże się, że znaki tych funkcji są jednakowe, będzie to oznaczało, że pomiędzy liczbami 2 i 8 jest parzysta liczba pierwiastków, lub też, że pierwiastków wcale nie ma. Następnie podstawiamy zamiast x liczbę pośrednią, np. 4. Jeżeli $f(4)$ będzie znowu tego samego znaku, to, rozumując jak poprzednio, rozdrobimy przedziały $/2,4/$ i $/4,8/$ i t.d. Jeżeli zaś $f(4)$ będzie znaku przeciwnego, niż $f(2)$ i $f(8)$, to będzie to oznaczało, że pomiędzy liczbami 2 i 4 oraz pomiędzy 4 i 8 jest nieparzysta liczba pierwiastków. Jeżeli otrzymane przedziały będą dostatecznie małe, to będziemy mogli przypuszczać, że zawierają one tylko po jednym pierwiastku. Nie jest to jednak odpowiedź niezawodna: nawet pomiędzy dwiema bardzo bliskimi liczbami może być kilka pierwiastków. W praktycznych zagadnieniach jednak jest rzeczą mało prawdopodobną, aby pierwiastki tak mało różniły się od siebie. W wielu więc wypadkach moż-

na się tą metodą zadowolnić.

/Dokładniejszą jest bardzo ciekawa, lecz nieco uciążliwa, metoda Sturm'a, wykładana w r. ak. 1915/1916/.

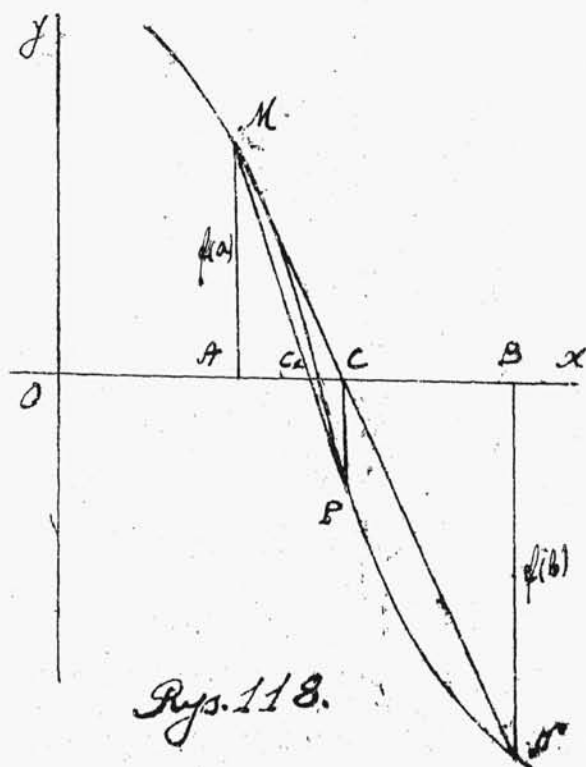
Teraz pokażemy, w jaki sposób można obliczyć pierwiastek już oddzielony. Przypuśćmy więc, że w przedziale (a, b) , zawarty jest tylko jeden pierwiastek równania

$$f(x) = 0$$

Wówczas z pewnością

$$f(a) \cdot f(b) < 0$$

Niech rys. 118 przedstawia wykres danego równania.



Zastąpmy łuk krzywej

MM' , odpowiadają-
cy danemu przedziałowi (a, b) linią pro-
stą. Z podobieństwa
trójkątów wynika, że

$$\frac{AC}{CB} = - \frac{f(a)}{f(b)}$$

Stąd łatwo znaleźć,

że

$$AC = \frac{AB f(a)}{f(a) + f(b)}$$

Ponieważ zaś

$$c = OC = OA + AC$$

więc

$$c = a + \frac{(b-a)f(a)}{f(a) - f(b)}$$

Właśnie c będziemy mogli przyjąć za pierwszą wartość przybliżoną pierwiastka. W dalszym ciągu są dwie możliwości:

$$\begin{array}{ll} 1/ & f(c) \cdot f(a) < 0 \\ 2/ & f(c) \cdot f(b) < 0 \end{array}$$

Możemy pierwotny przedział (a, b) zastąpić innym przedziałem: w pierwszym wypadku (a, c) , zaś w drugim (c, b) i postępować zupełnie w ten sam sposób, jak poprzednio: zastępujemy łuk MP prostą i znajdujemy punkt przecięcia się jej z osią OX — c_1 . Liczbę c_1 uważamy za drugie przybliżenie pierwiastka. Następnie badamy znowu, czy

$$f(c_1) \cdot f(a) < 0$$

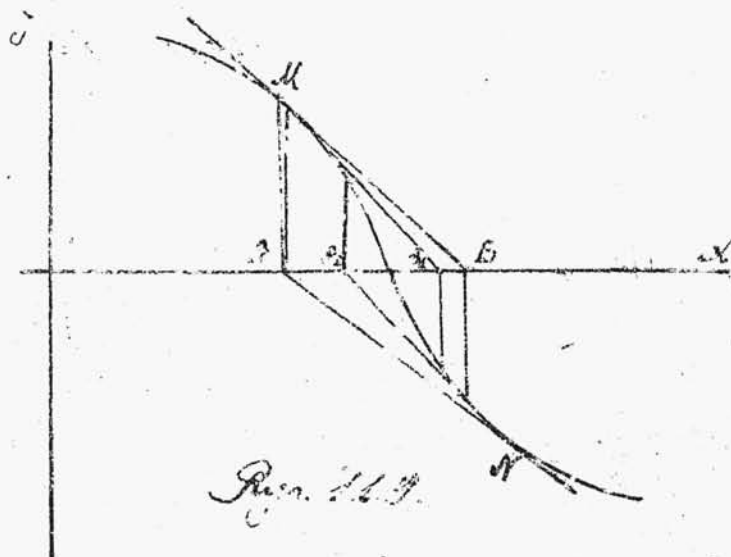
czy też

$$f(c_1) \cdot f(b) < 0$$

i t.d.

Inny sposób obliczenia pierwiastka już oddzielnego /sposób Newtona/ polega na tem, że w punktach M i N krzywej /rys. 119/ wystawiamy styczne: przetną

one oś X w punktach A i B . Środek odcinka AB możemy uważać za pierwsze przybliżenie pierwiastka. Za pomocą geometrii analitycznej możemy znaleźć jego odcinek, a więc liczbę mu odpowiadającą. Następnie wy-



stawiamy rzędne w punktach A i B ; w punktach przecięcia się tych rzędnych z krzywą prowadzimy znowu styczne przecinające oś X w punktach A_1 i B_1 .

Środek odcinka $A_1 B_1$ możemy uważać za drugie przybliżenie pierwiastka. W ten sam sposób można znajdować dalsze przybliżenia.

Na to, by sposób ten nadawał się, trzeba by punkty A_1, B_1 leżały wewnątrz przedziału AB , A_2, B_2 wewnątrz $A_1 B_1$ i t.d. Otóż osiągamy to za pomocą metody Newton'a.

METODA NEWTONA UDOSKONALONA PRZEZ FOURIER'A NA OBLICZENIE PRZYBLIŻONE NIEWYMIERNYCH PIERWIASTKÓW PO

ICH UPRZEDNIEM ODDZIELENIU.

Dane jest równanie:

$$f(x)=0$$

Niech pierwiastek α /oddzielony/ leży w przedziale (m, n) . Zakładamy po zatem, że w przedziale (m, n) pochodna druga $f''(x)$ zachowuje znak stały. Pochodna

$f'(x)$ /zachowując w przedziale (m, n) znak stały/ ma ten sam znak, co $f(m)$ albo $f(n)$, gdyż $f(m)$ i $f(n)$ mają znaki przeciwne /oddzielenie/. Niech a oznacza tę z dwóch liczb m i n , przy której $f(x)$ ma ten sam znak, co i $f''(x)$, zaś b liczbę drugą. Może być tu $a < b$, ale także i $b < a$. Ze wzoru

Faylora:

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(\xi)$$

gdzie ξ leży

między a i α

Ponieważ α jest pierwiastkiem,

$$f(\alpha) = 0,$$

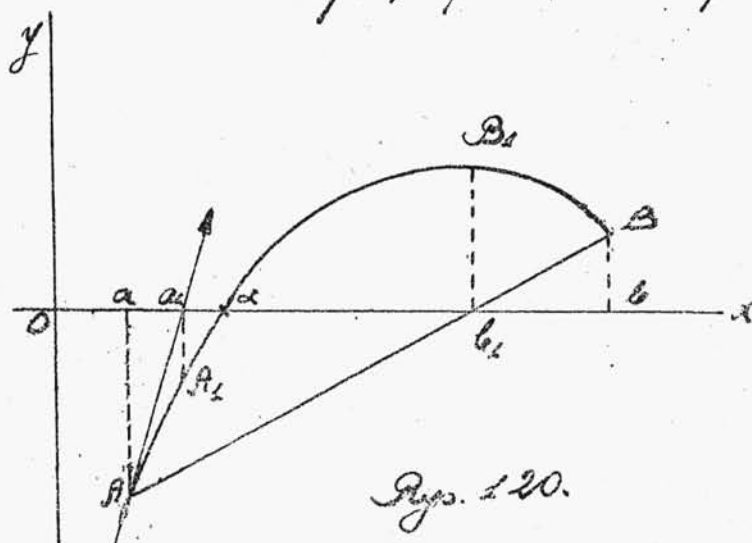
wiec

$$0 = f(\alpha) = f(a) + (\alpha - a) \cdot f'(a) + \frac{1}{2}(\alpha - a)^2 f''(\xi)$$

Przyjmujemy za

pierwsze przybliżenie

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$



Rys. 120.

poprawiając błąd

$$a_1 - \alpha = \frac{(\alpha - \alpha)^2 \cdot f''(\xi)}{2 \cdot f'(a)}$$

Z dwu ostatnich równości wynika:

$$\frac{a_1 - \alpha}{a - a_1} = \frac{(\alpha - a)^2 \cdot f''(\xi)}{2 \cdot f'(a)} > 0$$

Więc a_1 leży między a i α , czyli bliżej α niż a . Mamy zatem

$$\alpha > a_1 > a$$

albo też

$$\alpha < a_1 < a$$

$f(a_1)$ ma ten sam znak co $f(a)$, a więc i $f'(\xi)$.

Ponieważ a_1 spełnia te same warunki co a , więc możemy w poprzednich wzorach zastąpić a przez a_1 .

Otrzymamy w ten sposób dalsze przybliżenia:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} \quad \begin{array}{l} \alpha > a_2 > a_1 > a \\ \alpha < a_2 < a_1 < a \end{array}$$

.....

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

Powiadamy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$. Istotnie, ciąg a_1, a_2, \dots jest monotoniczny i ograniczony, posiada więc granicę

Mamy

$$f(a_n) = (a_n - a_{n+1}) \cdot f'(a_n);$$

przechodząc do granicy

$$f(\alpha') = 0.$$

stąd $\alpha' = \alpha$, ponieważ α' jest w przedziale (m, n) , a w tym przedziale jest tylko jeden pierwiastek α /oddzielenie/.

$$f(a_n) - f(a_{n+1}) = (a_n - a_{n+1}) \cdot f'(\xi_n)$$

$$1 - \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{f'(a_n)}$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} = 0,$$

gdzież z równości

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'(a_n) = f'(\alpha) \neq 0$$

wynika, iż

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_n)}{f'(a_n)} = 1$$

Szybkość zbieżności *

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n) + \dots \\ &= a + \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} - \dots - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} - \dots \end{aligned}$$

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)} \cdot \frac{f'(a_n)}{f'(a_{n+1})}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = 0.$$

* Patrz: Teoria szeregów, cechy zbieżności.

Dopełniający ciąg liczb: $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, \dots$ które szybko dążą do tej samej nieznannej granicy równej pierwiastkowi α , lecz w przeciwnym kierunku, otrzymać można w sposób następujący:

$$f(a) - f(b) = (a - b) \cdot f'(c)$$

$$b_1 = a - \frac{f(a)}{f'(c)} = b - \frac{f(b)}{f'(c)} = a - \frac{f(a)(a-b)}{f(a) - f(b)}$$

$$b_1 = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)}$$

$$\frac{b_1 - a}{b_1 - b} = \frac{f(a)}{f(b)} < 0$$

Jeśli więc $b_1 > a$, to $b_1 < b$; jeśli zaś $b_1 < a$, to $b_1 > b$, czyli b_1 leży wewnątrz przedziału $[a, b]$.

Niech

$$f(x) = f(x) - f(a) - (x-a) \cdot f'(c)$$

W takim razie

$$f(a) = f(b) = 0$$

$$f(b_1) = f(b_1)$$

$$f'(x) = f'(x) - f'(c) = (x-c) \cdot f''(\xi)$$

$$f'(c) = 0.$$

1/ Niech $f'' > 0$; gdy $x > c$, to $f'(x) > 0$,

$f'(x)$ rośnie; gdy zaś $x < c$ to $f'(x) < 0$ maleje; więc $f'(x) < 0$.

2/ Niech $f'' < 0$; gdy $x > c$ to $f'(x) < 0$ $f(x)$ maleje; gdy zaś $x < c$ to $f'(x) > 0$ $f(x)$ rośnie; $f'(x) > 0$.

Zawsze zatem f'' i $-f'$ mają ten sam znak w przedziale (a, b) , a f'' i f' znaki przeciwne. Ponieważ $f(b_1) = f(b_1)$ przeto $f'(b_1)$, jak $f'(b)$ mają znak ten sam, co i $-f'$.

Tak więc b_1 może zastąpić b ; a ponieważ b_1 leży wewnątrz przedziału (a, b) , więc jest liczbą bliższą α niż b . Otrzymamy w ten sam sposób b_2 , b_3 , Otóż b_1 leży bliżej α niż b , b_2 bliżej α niż b_1 i t.d.

$$b_{n+1} = \frac{b_n \cdot f(a_n) - a_n \cdot f(b_n)}{f(a_n) - f(b_n)}$$

Ciąg b, b_1, b_2, \dots rośnie lub maleje i jest ograniczony z dwóch stron; istnieje więc granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta.$$

Powiadamy, iż $\beta = \alpha$. Istotnie

$$b_{n+1} \cdot \{f(a_n) - f(b_n)\} = b_n f(a_n) - a_n f(b_n).$$

W granicy

$$\beta \cdot f(\alpha) - \beta \cdot f(\beta) = \beta \cdot f(\alpha) - \alpha \cdot f(\beta)$$

Stąd

$$(\alpha - \beta) \cdot f(b) = 0$$

Więc albo $\alpha = \beta$, albo $f(b) = 0$, ale wtedy także $\beta = \alpha$

Szybkość zbieżności:

$$f(b_n) - f(b_{n+1}) = (b_n - b_{n+1}) \cdot f'(\eta_n) = \frac{f(b_n)}{f'(c_n)} \cdot f'(\eta_n),$$

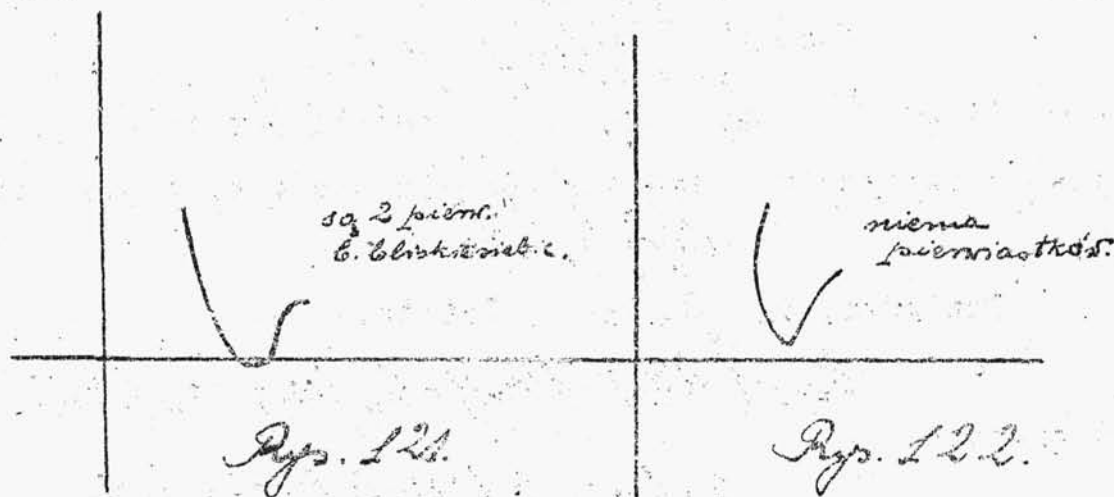
gdzie η_n jest w przedziale (b_n, b_{n+1}) , a $c_n \in (a_n, b_n)$.

$$\lim \frac{f(b_{n+1})}{f(b_n)} = \lim \left\{ 1 - \frac{f(b_n)}{f'(c_n)} \right\} = 0$$

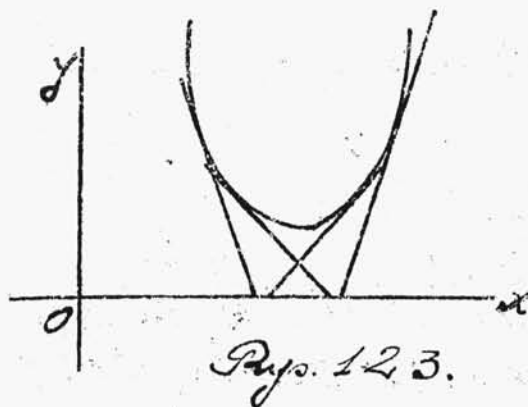
Błąd na α mniejszy jest od $|\alpha_n - \beta_n|$.

Z metody Newtona można wyprowadzić sposób na oddzielenie pierwiastków.

U w a g a. Przy oddzielaniu pierwiastków sposobem podstawienia, trudność sprawia wyróżnienie wypadków, przedstawionych na poniższych rysunkach



Metoda Newtona w pierwszym wypadku daje dwie różne granice dla ciągów a_n i b_n ; w drugim $a_n - b_n$ zmie-



nia znak lub też ciąg a_n lub b_n przestaje rosnąć lub maleć. W ten sposób możemy odróżnić przy pomocy metody Newtona te dwa przypadki.

Przykład.

$$f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2; f''(x) = 6x;$$

$$f(2) = -1; f'(3) = 16; f(2,1) = 0,061$$

Tak więc

$$2 < \alpha < 2,1$$

$$f'' > 0, f(\alpha) > 0; \alpha = 2,1; \alpha_1 = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = 2,095$$

$$\alpha - \alpha_1 = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{0,061}{11,23} = 0,00543$$

$$\alpha_2 = 2,094552; \alpha_3 = 2,094551481542;$$

$$\alpha_4 = 2,094551481542326591482386;$$

Przykład: $x^5 - 7x + 2 = 0$

Oddzielenie pierwiastków:

1/ Kraniec dla pierwiastków dodatnich 3.

2/ Prawidło znaków Descartes'a: nie może być więcej od dwóch pierwiastków dodatnich.

3/ Próby: $f(0) = 2, f(1) = -4, f(2) = -2,2, f(3) > 0$

Wniosek: jeden pierwiastek dodatni w prze-

dziale $(0, 1)$. Drugi pierwiastek dodatni w przedziale $(2, 3)$.

Obliczenie pierwiastka
zawartego w przedziale $0, 1$.

$f(0,6) = 0,56576$	$f'(x) = 5x^4 - 21x^2 = x^2(5x^2 - 21)$
$f(0,7) = -0,23293$	$f''(x) = 20x^3 - 42x = 2x(10x^2 - 21)$

Pochodna druga f'' jest dla wartości x w przedziale $(0,6; 0,7)$ ujemna. Więc: $a = 0,7$; $b = 0,6$.

Drugie przybliżenie:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = 0,7 - \frac{0,23293}{9,0895} = 0,7 - 0,025625;$$

$$a_1 = 0,674$$

$$b_1 = a - \frac{f(a)(a-b)}{f(a) - f(b)} = 0,7 - \frac{0,23293 \cdot 0,1}{0,78869}$$

$$b_1 = 0,7 - 0,02916 = 0,671.$$

Trzecie przybliżenie:

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 0,674 - \frac{0,004182936}{0,50796258} =$$

$$= 0,674 - 0,00049164$$

$$a_2 = 0,6735086.$$

$$b_2 = a_1 - \frac{f(a_1)(a_1 - b_1)}{f(a_1) - f(b_1)} = 0,674 - \frac{0,004182936 \cdot 0,003}{0,025431}$$

$$= 0,674 - 0,0004934$$

$$b_2 = 0,6735065.$$

Ostatecznie mamy α położone między 0,673506
0,673508 błąd jest mniejszy od 0,000002.

KRAŃCE DLA PIERWIASTKÓW.

Przy oddzielaniu pierwiastków równania nieraz pożyteczną jest rzeczą znać liczby, pomiędzy którymi są zawarte wszystkie pierwiastki danego równania, czyli krańce dla tych pierwiastków.

Krańcem dla pierwiastków dodatnich nazywamy liczbę większą od wszystkich pierwiastków równania.

W analogiczny sposób określamy kraniec dla pierwiastków ujemnych.

Sposobów odnajdywania krańców jest bardzo dużo. My tutaj zapoznamy się tylko z dwoma. Pierwszy sposób daje się sformułować w twierdzeniu następującem:

Jako kraniec dla pierwiastków dodatnich można wziąć liczbę

$$c = 1 + \sqrt[m]{\frac{\alpha}{A_m}}$$

gdzie A_m oznacza pierwszy z kolei ujemny współczynnik zaś α liczbę dodatnią, nie mniejszą od wartości bezwzględnej każdego ze współczynników ujemnych funkcji

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_m x^{n-m} + \dots$$