

Przypomocy tego wzoru będziemy mogli, np. znaleźć całkę funkcji $\log x$:

$$\int \log x \, dx$$

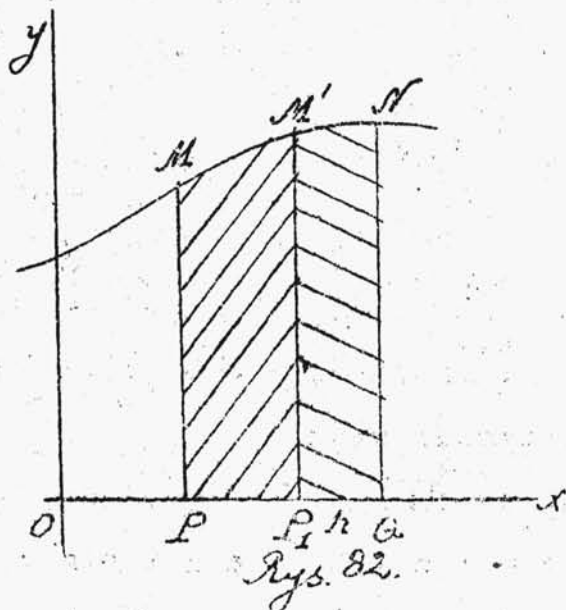
Jeżeli będziemy uważali $\log x$ za u , zaś dx za dv , to będziemy mogli napisać:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \log x - x + C.$$

DOWÓD ISTNIENIA CAŁKI DLA FUNKCJI CIAGŁEJ I ŚCI-SŁE OKRESLENIE POJECIA POLA. Niech będzie dana funkcja ciągła

$$y = f(x)$$

Obierzmy na odpowiadającym jej wykresie /rys. 82/ punkt stały M oraz punkt $M'(x, y)$. Nazwijmy



pole figury $PMMP'$ przez $S(x)$. Gdy punkt M' posuwać się będzie po krzywej, to, oczywiście, pole będzie się zmieniać: możemy więc uważać to pole za funkcję odciętej punktu M , t.j. x . Możemy utworzyć pochodną tego pola względem zmien-

nej x :

$$S'(x) = \frac{dS(x)}{dx}$$

Nadajmy odciętej $x=OP$ przyrost $h=PQ$. Otrzymamy w ten sposób nowe pole $PMNQ$, które oznaczmy przez $S(x+h)$. Różnicą pól $S(x+h)$ i $S(x)$ jest pole $P'M'N'Q$. Oznaczmy najmniejszą rzędną krzywej w przedziale $M'N'$ przez α , a największą rzędną krzywej w tym przedziale przez β :

$$h\alpha < S(x+h) - S(x) < h\beta$$

Stąd zaś

$$\alpha < \frac{S(x+h) - S(x)}{h} < \beta$$

Gdy $h \rightarrow 0$, wówczas $\alpha \rightarrow f(x)$ oraz $\beta \rightarrow f(x)$. A więc

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(x)$$

$$S'(x) = f(x)$$

Stąd zaś wynika, że

$$S(x) = \int f(x) dx$$

czyli funkcja, wyrażająca pole, jest funkcją pierwotną dla funkcji wyrażającej zależność między odcięta i rzędną. Gdy jednak funkcję pierwotną względem $y = f(x)$ oznaczmy przez $F(x)$, to każda funkcja wyrażona przez wzór $F'(x) + C$ będzie również funkcją pierwotną. Aby odpowiedzieć na pytanie która z tych wartości jest właściwie polem, należy znaleźć C . W tym celu

zauważmy, że im mniejsza jest różnica $x-a$, tym $S(x)$ jest bliższe 0. W granicy $S(a)=0$. Należy więc C wybrać tak, aby

$$F(a)+C=0$$

czyli

$$C=-F(a)$$

A zatem

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

Posiłkując się tym wzorem z łatwością rozwiążemy kilka przykładów na obliczenie pól krzywych.

1/. Znaleźć pole, ograniczone przez łuk sinusoidy rzędne MP i $M'P'$ i oś x . Przedewszystkiem znajdziemy funkcję pierwotną dla funkcji $\sin x$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

Szukane pole figury $PMMP'$:

$$S(x)=F(x)-F(a)=-\cos x + \cos a$$

czyli

$$S(x)=\cos a - \cos x$$

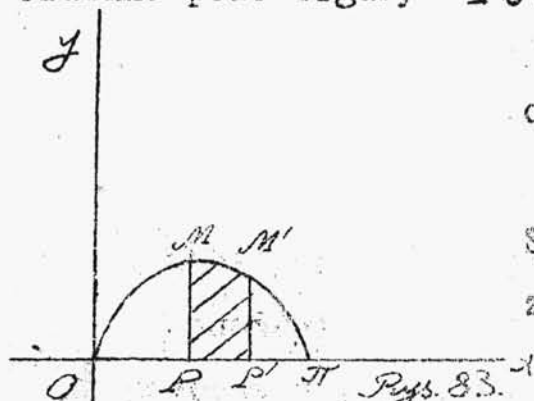
Stąd wynika, że pole $OMP = 1 - \cos x$,
zaś pole $OMM'\pi = 2$.

2/ Znaleźć pole, zawarte

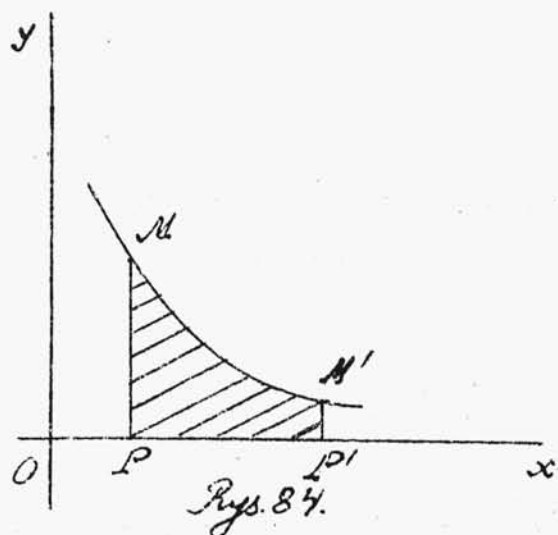
między osią x , dwiema rzędnymi i łukiem krzywej:

$$y = \frac{1}{x}$$

Zauważmy przedewszystkiem, że



Rys. 83.



$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e x$$

A więc

$$S(x) = \log_e x - \log_e a = \log_e \frac{x}{a}$$

Gdy $a = 1$

$$S(x) = \log_e x$$

3/ Dana jest krzywa

$$y = x^n$$

Obliczyć pole, zawarte pomiędzy jej łukiem, osią x i dwiema rzędnymi.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

zatem

$$S(x) = \frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Jeżeli $a = 0$

$$S(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

4/ Obliczyć, jak w przykładach poprzednich, pole krzywej

$$y = e^x$$

Ponieważ

$$\int e^x dx = e^x$$

więc

$$S(x) = e^x - e^a$$

Gdy $a = 0$

$$S(x) = e^x - 1.$$

Definicja pola. Dotychczas operowaliśmy pojęciem pola jako czemś, opartem wyłącznie na intuicji. Teraz będziemy mogli już przystąpić do ścisłej definicji pola krzywej

Niech będzie dana krzywa, wyrażona przez równanie

$$y = f(x)$$

Przypuścimy, że w przedziale (a, b) funkcja $f(x)$ stale rośnie.

Obierzmy na niej dwa punkty $M(a, f(a))$ i $M_1(b, f(b))$

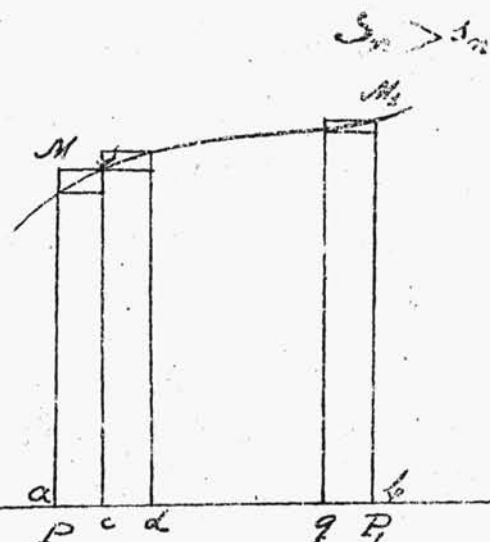
$$a = OP ; \quad b = MP$$

$$b = OP_1 ; \quad y = M_1P_1.$$

Określimy pole, zawarte pomiędzy łukiem tej krzywej, osią x i rzędnymi MP i M_1P_1 . Podzielmy w tym celu odcinek PP_1 na n części i przez każdy punkt podziału poprowadźmy równoległą do osi y .

Gdy następnie poprowadzimy przez punkty przecięcia tych prostych z krzywą równoległe do osi x , otrzymamy n prostokątów wpisanych w krzywą i tyleż prostokątów na niej opisanych.

Oznaczmy sumę pól prostokątów wpisanych przez S_n , zaś sumę pól prostokątów opisanych przez S_n^* . Rzecz jasna, że



Oznaczmy kolejne punkty podziału literami

c, d, \dots, g ,
zaś odcięte tych punktów przez $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Ponumerujmy następnie prostokąty od lewego do

prawego liczbami $1, 2, 3, \dots$ i przypuszczając, że funkcja jest rosnąca, ułożymy następującą tablicę:

prostokąt.	Podstawa	najmniejsza rzędna krzywej w przedz.	największa rzędna krzywej w przedz.	pole pr. wpisane.	pole pr. opisan.
1	$ac = x_1 - a$	$f(a)$	$f(x_1)$	$(x_1 - a) \cdot f(a)$	$(x_1 - a) \cdot f(x_1)$
2	$cd = x_2 - x_1$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$(x_2 - x_1) \cdot f(x_1)$	$(x_2 - x_1) \cdot f(x_2)$
3	$de = x_3 - x_2$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	$(x_3 - x_2) \cdot f(x_2)$	$(x_3 - x_2) \cdot f(x_3)$
...
n	$gb = b - x_{n-1}$	$f(x_{n-1})$	$f(b)$	$(b - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1})$	$(b - x_{n-1}) \cdot f(b)$

Zsumujmy pola prostokątów wpisanych i opisanych:

$$S_n = (x_1 - a) \cdot f(a) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + \dots + (b - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1});$$

$$S_n = (x_1 - a) \cdot f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_2) + \dots + (b - x_{n-1}) \cdot f(b)$$

Powiększy^m następnie liczbę tych prostokątów, np. dzieląc podstawę każdego z nich na 2 części, i postępując dalej, jak za pierwszym razem. Niech będzie pomiędzy punktami a i c np. punkt ξ . Rzecz oczywista, że

$$f(\xi) > f(a)$$

Oznaczmy odcinki $a\xi$ i ξc odpowiednio literami δ_1 i δ_2

$$\delta_1 + \delta_2 = ac = x_1 - a$$

Pola nowoutworzonych prostokątów wpisanych wyrażają się liczbami $\delta_1 \cdot f(a)$ i $\delta_2 \cdot f(\xi)$, zaś pole

pierwotnego prostokąta: $(\delta_1 + \delta_2) \cdot f(a)$

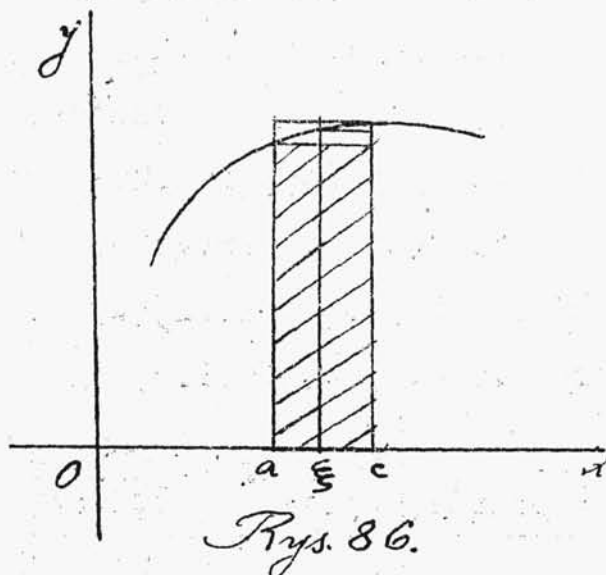
$$\delta_1 \cdot f(a) + \delta_2 \cdot f(\xi) > \delta_1 \cdot f(a) + \delta_2 \cdot f(a) = f(a) (\delta_1 + \delta_2)$$

Ponieważ zatem przy powiększaniu liczby prostokątów każdy składnik sumy S_n zastępujemy przez sumę innych składników, większą od niego, a więc S_n rośnie w miarę tego, jak wzrasta liczba n .

$$S_n < S_{2n} < S_{4n} < \dots$$

Ciąg ten jest ograniczony, posiada więc granicę, którą oznaczmy przez

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$



Podobne do tego rozumowanie wskazuje, że S_n maleje, gdy n wzrasta /rys. 87/.

$$S_n > S_{2n} > S_{4n} > \dots$$

Oznaczmy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Udowodnimy, że $S = S$.

$$S_n - S_m = (x_1 - a)[f(x_1) - f(a)] + \\ + (x_2 - x_1)[f(x_2) - f(x_1)] + \dots + \\ + (b - x_{m-1})[f(b) - f(x_{m-1})].$$

Niech δ oznacza największą z podstaw prostokątów:

$$(x_1 - a), (x_2 - x_1), \dots, (b - x_{m-1})$$

W takim razie, ponieważ wszystkie różnice w nawia-

sach są > 0 ,

$$0 < S_n - S_m \leq \delta [f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(b) - f(x_{m-1})]$$

Każdy ze składników $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{m-1})$ powtarza się dwa razy: raz ze znakiem $+$, drugi raz $-$, a więc

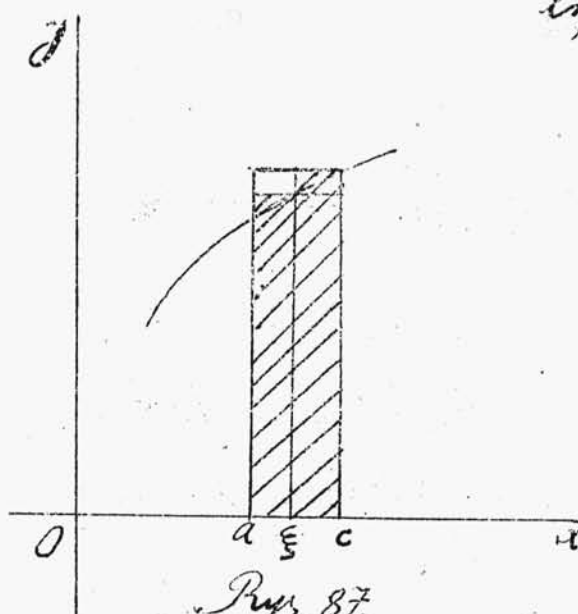
$$0 < S_n - S_m \leq \delta [f(b) - f(a)]$$

Stąd wynika, że gdy

$$\delta \rightarrow 0$$

to

$$S_n - S_m \rightarrow 0$$



Jeżeli więc będziemy dostateczną liczbę razy powiększać liczbę prostokątów i największa z podstaw tych prostokątów dążyć będzie do zera, to różnica stać się może dowolnie mała. Stąd wniosek, że w granicy

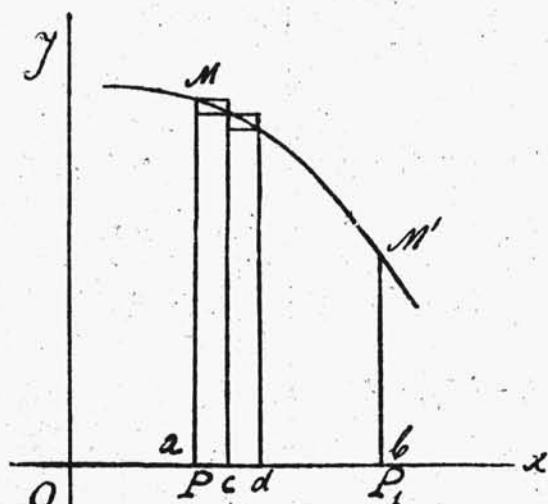
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Gdyby funkcja $f(x)$ była malejąca, doszlibyśmy do tego samego wniosku.

$$S_n = (x_1 - a) \cdot f(a) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_1) + \dots + (b - x_{n-1}) \cdot f(x_{n-1});$$

$$s_n = (x_1 - a) \cdot f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(x_2) + \dots + (b - x_{n-1}) \cdot f(b).$$

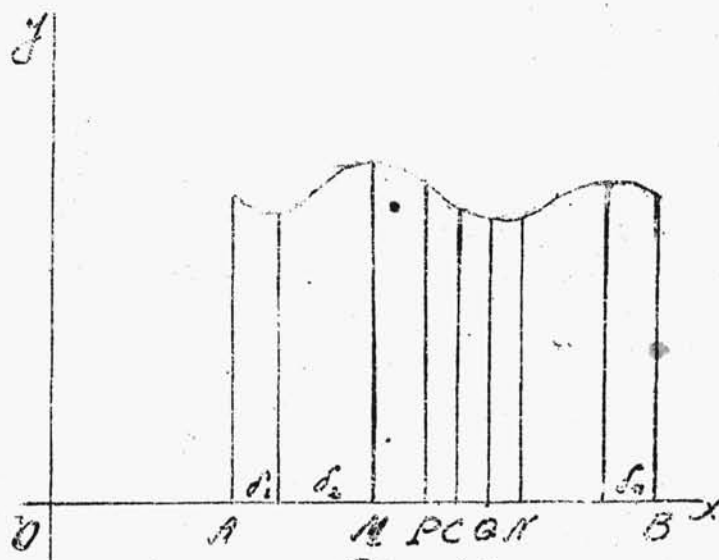
Dalej możemy rozumować, jak w poprzednim przypadku.



Rys. 88.

Podobne rozumowanie możemy stosować do każdej funkcji rosnącej i malejącej naprzemiennie, lecz posiadającej w danym przedziale skończoną ilość maximów i minimów: dzielimy pole na części rosnące i malejące i określamy pole tej figury, jako sumę pól jej części /rys. 89/.

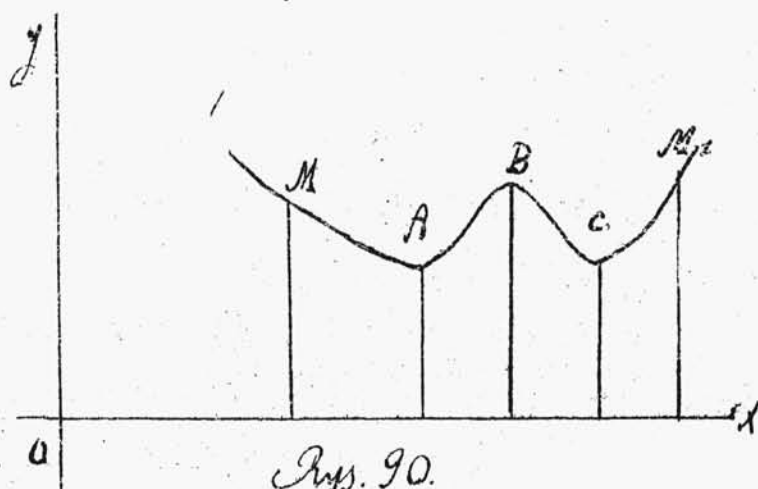
Może zajść jednak jeszcze inny wypadek. Puszcz-



Rys. 89.

liczbę razy max. i min. Nie można więc dzielić krzywej na przedziały cząstkowe i rozumować jak poprzednio.

Udowodnimy istnienie granicy o ile $f(x)$ jest funkcją ciągłą metodą inną. Wprowadzamy w tym celu pojęcie oscylacji /wahanía/ funkcji w danym przedziale. Niech dana funkcja $f(x)$ będzie ograniczona w przedziale



Rys. 90.

my, że mamy daną funkcję

$$y = x \sin \frac{1}{x}$$

Jest to, jak wiemy /rys. 29/, funkcja ciągła. Jednakże w otoczeniu punktu 0 osiąga ona nieskończoną

(a, b) . Niech K oznacza jej kres górny, zaś k dolny.

$$k \leq f(x) \leq K.$$

Różnica pomiędzy dwiema wartościami funkcji nie może być większą od

różnicy $K - k$, zwanej oscylacją; czyli

$$f(x_1) - f(x_2) \leq K - k$$

Podzielmy odcinek AB na części, które oznaczmy literami $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$.

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \delta_n = b - a.$$

Oznaczmy największe wartości funkcji w powyższych przedziałach przez M , zaś najmniejsze przez m z odpowiednimi wskaźnikami. Jeżeli teraz wpiszemy i opiszemy prostokąty, to

$$S_n = \delta_1 m_1 + \delta_2 m_2 + \dots + \delta_n m_n;$$

$$S_n = \delta_1 M_1 + \delta_2 M_2 + \dots + \delta_n M_n.$$

Gdy następnie liczbę prostokątów będziemy podwajać w takim razie:

$$S_n < S_{2n} < S_{4n} < \dots$$

$$S_n > S_{2n} > S_{4n} > \dots$$

Pierwszy z tych ciągów jest rosnący, drugi malejący: wszystkie wyrazy pierwszego ciągu są mniejsze od wszystkich wyrazów drugiego ciągu. A więc oba ciągi muszą posiadać granice. Nazwijmy granicę pierwszego ciągu przez J , granicę drugiego przez \tilde{J} . Z ciągłości funkcji w punkcie C wynika, że każdej liczbie ϵ odpowiada taki przedział δ , że różnica pomiędzy wartością funkcji w punkcie C i w innym punkcie tego prze-

działu jest mniejsza od ε . Można wybrać tak przedział δ , aby w nim oscylacja /różnica pomiędzy największą i najmniejszą wartością funkcji/ była mniejsza od ε . Musimy w tym celu obrać przedział $\delta = MN$ zawierający punkt C , tak, aby różnica pomiędzy rzędnymi w punkcie C i w jakimkolwiek innym punkcie P tego przedziału była mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$|f(C) - f(P)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Niech Q będzie innym punktem tego przedziału; wtedy

$$|f(C) - f(Q)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

wówczas

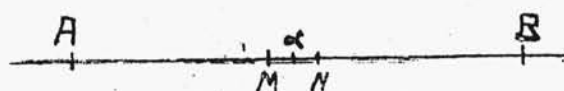
$$|f(P) - f(Q)| \leq |f(C) - f(Q)| + |f(P) - f(C)|,$$

skąd

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon$$

Stąd wniosek, że w przedziale $\delta = MN$ oscylacja nie może przewyższać liczby ε . Cały odcinek AB możemy pokryć takimi przedziałami, że w każdym z nich oscylacja będzie mniejsza od ε . Powiadam, że przedziałów tych będzie liczba skończona. Przypuśćmy na chwilę, że odcinek AB nie da się pokryć takimi przedziałami. W takim razie będziemy mogli podzielić wszystkie punkty przedziału na dwie klasy, wyznaczające punkt α , w taki mianowicie sposób, żeby punkty

α , należące do pierwszej klasy /na lewo od α / spełniały ten warunek, że przedział (a, α) da się pokryć skończoną liczbą przedziałów, w których oscylacja jest mniejsza, aby zaś dla punktów drugiej klasy /na prawo od α / ten warunek nie był spełniony. Wobec ciągłości funkcji w punkcie α można znaleźć taki przedział MN , iż różnica pomiędzy wartością funkcji



Rys. 91.

w punkcie α i wartością funkcji w dowolnym punkcie tego

przedziału jest $< \frac{\varepsilon}{2}$, a więc oscylacja w przedziale MN jest mniejsza od ε . W takim razie jednak punkt α nie może rozgraniczać dwu klas, ponieważ dowolny punkt przedziału αN należy do 1-szej klasy, dochodzimy tedy do sprzeczności. Wobec tego niemożliwe jest istnienie dwu klas: cały odcinek musi się dać pokryć przedziałami, odpowiadającymi wyżej wymienionym warunkom.

Dowolnej liczbie dodatniej ε odpowiada taka liczba \mathcal{S} , że w każdym przedziale mniejszym od \mathcal{S} oscylacja jest mniejsza od ε . W rzeczy samej, w całym odcinku AB można ułożyć skończoną liczbę przedziałów takich, jak $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \dots$, w których oscylacja jest mniejsza od $\frac{\varepsilon}{2}$. Oznaczmy najmniejszy z nich przez

δ . Żaden przedział mniejszy od δ nie może pokryć sobą więcej niż części dwóch przedziałów: oscylacja w nim musi być mniejsza od sumy oscylacji w tych przedziałach, t.j. od $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ta własność funkcji nazywa się ciągłością jednostajną. Każda funkcja ciągła w przedziale AB wraz z kranicami A i B , jest też ciągłą jednostajnie.

Powracając do określenia pola figury, utworzymy różnicę pól prostokątów opisanych i wpisanych.

$$S_n - s_n = \delta_1(M_1 - m_1) + \delta_2(M_2 - m_2) + \dots + \delta_n(M_n - m_n)$$

Różnice, zamknięte w nawiasach, są właśnie oscylacjami w przedziałach δ_1 , δ_2 , δ_3 , Oznaczmy te oscylacje przez literę O z odpowiednim wsakźnikiem.

$$S_n - s_n = \delta_1 O_1 + \delta_2 O_2 + \dots + \delta_n O_n$$

Powiadam teraz, że o ile przedziały będą dostatecznie małe, w takim razie różnica $S_n - s_n$ będzie mniejsza od ε . Niech będzie

$$\delta_i \leq \delta$$

Z ciągłości jednostajnej funkcji wynika, że można ^{tak} dobrać liczbę δ , że skoro δ_i czyni zadość wyżej napisanej nierówności, to oscylacja

$$O_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Wynika stąd, że

$$S_n - s_n \leq \delta_1 \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} + \delta_2 \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} + \dots + \delta_n \cdot \frac{\varepsilon}{b-a}$$

czyli

$$S_n - s_n \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n)$$

Ponieważ zaś

$$\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n = b-a$$

więc

$$S_n - s_n \leq \varepsilon$$

Odejmując stronami nierówności:

$$S_n > J$$

$$s_n < j$$

znajdziemy, że

$$J - j < S_n - s_n \leq \varepsilon$$

a zatem

$$J - j < \varepsilon$$

Ponieważ jednak J i j są to wielkości stałe,
więc muszą być sobie równe:

$$J = j$$

Tak więc ciągi:

$$S_n, S_{2n}, \dots$$

$$s_n, s_{2n}, \dots$$

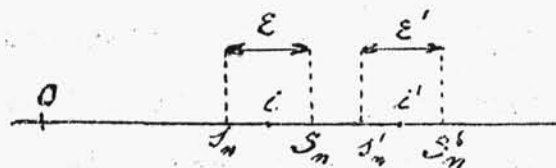
posiadają wspólną granicę, którą oznaczmy przez L .

Łatwo wykazać, że ϵ nie należy od sposobu podziału odcinka AB na części. Przypuśćmy bowiem, że skutecznie podział w inny sposób. Oznaczmy wspólną granicę ciągów, powstałych drogą tych nowych podziałów przez

$$S'_1, S'_2, S'_3, \dots$$

$$S''_1, S''_2, S''_3, \dots$$

przez ϵ' . Można utworzyć trzeci podział, którego przedziały będą częściami przedziałów, otrzymanych z połączenia pierwszego i drugiego podziału /punkty końcowe przedziałów będą zarazem końcami przedziałów, powstałych z pierwszego i drugiego podziału/. Niech δ oznacza sumę pól prostokątów wpisanych, odpowiadających podziałowi, przy którym są uwzględnione wszystkie punkty, odpowiadające sumom S_n i S'_n , zaś Σ - sumą pól prostokątów opisanych w tych samych warunkach. Przypuśćmy następnie, że $\epsilon \neq \epsilon'$.



Rys. 92

Z nierówności

$$11/ \quad S_n < \delta < S'_n$$

/ponieważ δ odpowiada większej liczbie punktów podziału, niż S_n .

przeto $S_n < \delta$ i t.d./

$$12/ \quad S'_n < \delta < S''_n$$