

jeszcze nie jest dostatecznym rozszerzeniem kresu liczb. Mianowicie działaniem wyższym od mnożenia jest potęgowanie. Jeżeli wykładnik jest liczbą całkowitą jest to zawsze możliwe. Lecz działanie odwrotne w wypadku ogólnym jest niemożliwe. Niema np. liczby wymiernej, której kwadrat równałby się 2. Należy więc tworzyć nowe liczby, zwane niewymiernymi. Pozwoli to nam rozwiązać oba zagadnienia: znaleźć pierwiastek każdej liczby dodatniej i zmierzyć każdy odcinek.

Grecy nie znali teorii liczb rzeczywistych; zastępowała ją ponieważ teoria proporcji. Wszystkie działania były wykonywane geometrycznie na odcinkach. Dopiero w XIX wieku nastąpiła rewizja pojęć zasadniczych, dotyczących się liczby. Pojawiły się liczne prace, dotyczące zakresu teorii liczb. Na wymienienie zasługują rozprawy Dedekinda, Cantora i Weierstrassa. Rozprawy Dedekinda i Cantora zawierają dwa punkty widzenia na liczby niewymierne. Pierwsza z nich oparta jest na pojęciu przekroju, druga na pojęciu ciągów.

TEORIA DEDEKINDA. Przekrojem nazywamy podział wszystkich liczb wymiernych na dwie klasy, z zachowaniem następujących warunków: każda liczba I klasy ma być mniejszą od każdej liczby II klasy; ani jedna klasa nie może być pusta /t.j. nie zawierać wcale liczb/; obie klasy razem

wzięte powinny stanowić zbiór wszystkich liczb wymiernych. Pierwszą klasą nazywamy również klasę niższą, a drugą klasę wyższą. Istnieją przekroje trzech rodzajów:

1. W klasie niższej jest liczba największa, a w wyższej, niema liczby najmniejszej;

2. w klasie niższej niema liczby największej, za to w wyższej jest liczba najmniejsza;

3. w klasie niższej niema liczby największej i w klasie wyższej niema liczby najmniejszej.

Nie może być przekroju, w którym pierwsza klasa posiada liczbę największą, a klasa druga - najmniejszą. Trzeci rodzaj przekroju jest najważniejszy. Ze takie przekroje istnieją, dowieść można przy pomocy następującego przykładu: jeżeli mamy dwie liczby  $a$  i  $b$ , to musi zachodzić jeden ze związków:  $a=b$ ,  $a>b$  albo  $a<b$

Podnieśmy teraz dowolną liczbę wymierną do kwadratu i porównajmy ją z liczbą 2. Równość jest wykluczona, gdyż nie istnieje taka liczba wymierna, która podniesiona do kwadratu równałaby się 2. Może więc być tylko:

$$w^2 > 2 \quad \text{albo} \quad w^2 < 2$$

Możemy podzielić teraz wszystkie liczby wymierne na dwie klasy. Do I zaliczymy liczby ujemne, 0 i liczby dodatnie, których kwadrat jest mniejszy od 2, do II zaś te, które mają kwadrat większy od 2. Przekrój jest więc określony



Każda bowiem liczba należy do jednej z klas, przytem wszystkie liczby I klasy są mniejsze od wszystkich liczb II klasy. Oznaczywszy liczbę I klasy przez  $w_I$ , a liczbę II klasy przez  $w_{II}$ , będziemy mogli napisać:

$$w_I^2 < 2 \quad i \quad w_{II}^2 > 2$$

a stąd

$$w_I^2 < w_{II}^2$$

oraz

$$w_I < w_{II}$$

DOWÓD: Stwierdzić łatwo, że tu niema w pierwszej klasie liczby największej ani liczby najmniejszej - w drugiej.

Niech dowolna liczba  $a > 0$  należy do pierwszej klasy. Dowiedzimy, że istnieje liczba większa od  $a$  (o pewną liczbę  $\varepsilon > 0$ ), należąca również do I klasy. Mamy więc dowieść, że jeżeli  $a^2 < 2$ , to można znaleźć taką liczbę dodatnią  $\varepsilon$ , by także

$$(a + \varepsilon)^2 < 2$$

Wolno nam przypuścić, że  $\varepsilon < a$ . Jeżeli lewą stronę nierówności rozwinjemy, otrzymamy:

$$a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 < 2$$

Oznaczywszy przez  $r$  różnicę  $2 - a^2$ ,  $r > 0$ , wtedy

$$1/1. \quad \varepsilon(2a + \varepsilon) < r$$

Ponieważ zaś

$$\varepsilon < a$$

nierówność /1/ będzie spełniona, jeżeli:

A stąd

$$3a\varepsilon < r$$

$$\varepsilon < \frac{r}{3a}$$

Nowa zatem liczba należyć będzie do klasy I, jeżeli tylko większą będzie od  $a$  o  $\varepsilon < \frac{r}{3a}$

$$\text{W rzeczy samej } (a+\varepsilon)^2 = a^2 + 2a\varepsilon + \varepsilon^2 =$$

$$a^2 + \varepsilon \cdot (2a + \varepsilon) < a^2 + 3a\varepsilon$$

Gdy zamiast  $3a\varepsilon$  napiszemy  $2a^2$  nierówność wzmocnimy.

Znajdziemy

$$(a+\varepsilon)^2 < 2a^2$$

Tak samo udowodnimy, że tu i w klasie II-ej niema liczby najmniejszej.

Jak już mówiliśmy przekroje mogą być tylko trzech rodzajów. Nie może istnieć np. taki przekrój, aby klasa niższa posiadała liczbę największą, a wyższa najmniejszą. Niech będzie największą liczbą I klasy, a  $r$  najmniejszą liczbą klasy II. Zachodzi więc nierówność  $r > l$ . Weźmy średnią arytmetyczną obu liczb:

$$l < \frac{r+l}{2} < r$$

Więc liczba  $\frac{r+l}{2}$  nie może należeć do żadnej z klas

Dochodzimy do wniosku, że podział ten nie jest przekrojem. Z pojęcia przekroju wynika, że można znaleźć dwie liczby, należące do różnych klas i różniące się tak mało między sobą, jak się to nam podoba. Niech liczba  $a$  należy do niższej klasy, zaś  $b$  do wyższej. Podzielmy różnicę

$b-a$  na  $n$  równych części. Utwórzmy następnie postęp:

$$a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2 \frac{b-a}{n}, a + 3 \frac{b-a}{n} + \dots + b$$

Gdyby 2 kolejne liczby zawsze należały do tej samej klasy, to wszystkie wyrazy postępu należałyby do klasy I, gdyż do niej należy pierwszy wyraz  $a$ , różnica zaś może być dowolnie małą. Z założenia jednak wiemy, że ostatni wyraz  $b$  należy do klasy II. Muszą więc istnieć dwie kolejne liczby, należące do różnych klas, różniące się od siebie o  $\frac{b-a}{n}$ , gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami stałymi, zaś  $n$  liczbą dowolnie wielką.

Niech danym będzie równanie  $x^2 = 2$ . Można wszystkie liczby podzielić na dwie klasy, wyrażające z dowolną dokładnością  $x$  /jedna z nadmiarem, druga z niedomiarem/, przyczem do I klasy należyć będą liczby mniejsze od  $x$ , a do II-ej większe od  $x$ . Każda zatem liczba będzie musiała spełniać nierówność

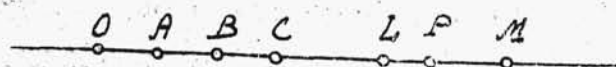
$$w_x^2 < 2 \quad \text{albo} \quad w_x^2 > 2$$

Możemy uważać liczbę za określoną, gdy znamy wszystkie liczby mniejsze i większe od niej, t.j. gdy o każdej liczbie potrafimy powiedzieć, czy jest od niej większą czy mniejszą. Gdy znamy przekrój, znana jest również liczba przez niego wyrażona /wymierna bądź też niewymierna/. Wymierna, gdy przekrój jest 1-go lub 2-go rodzaju; niewymierna, gdy przekrój jest trzeciego rodzaju. Zbiór wszyst-

kich liczb, które dają się określić za pomocą przekroju, zwie się zbiorem liczb rzeczywistych.

Niech będą dane dwie liczby rzeczywiste  $\alpha$  i  $\beta$ . Liczbie  $\alpha$  odpowiada przekrój, w którym dowolną liczbę klasy niższej oznaczymy przez  $a$ , zaś dowolną liczbę klasy wyższej przez  $A$ . Odpowiednio względem  $\beta$  liczbą klasy niższej niech będzie  $b$ , klasy wyższej  $B$ . Może się zdarzyć że przekroje będą identyczne. W takim razie powiemy, że liczba  $\alpha = \beta$ . Gdy  $\alpha \neq \beta$ , przekroje nie są identyczne. Zastanówimy się nad tym wypadkiem. Nie każda liczba, należąca do klasy I względem liczby  $\alpha$ , należy do I kl. względem  $\beta$ . Jedną z tych liczb niech będzie  $a$ . Jeżeli zachodzi nierówność  $\alpha > a > \beta$ , to mówimy, że  $\alpha > \beta$ . Jeżeli zaś istnieje taka liczba  $b$ , że  $\alpha < b < \beta$ , to  $\alpha < \beta$ . Jaśniejszą będzie tutaj interpretacja geometryczna.

Na zasadzie umowy można każdej liczbie podporządkować punkt lub odcinek. Niech więc liczbie 1 odpowiada odcinek  $OA$ . W takim razie liczbie 2 odpowiadać będzie odcinek  $OB$ , liczbie 3 —  $OC$  i t.d. Możemy również wprowadzać

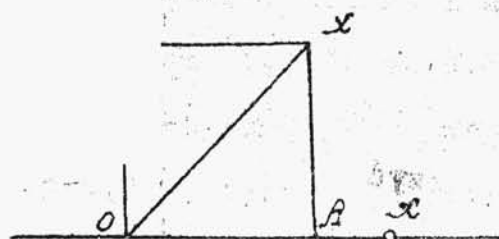


*Rys. 9.*

odcinki, odpowiadające liczbom ułamkowym, np.  $\frac{1}{2}$ .  
Dzielimy w tym ce-



lu jednostkę na  $\frac{1}{2}$  części równych i takich części odka-  
damy  $P$ . Otrzymamy w ten sposób zbiór punktów wymiernih.  
Zjawia się pytanie, czy zostały już wyczerpane wszystkie  
punkty na prostej. Łatwo odpowiedzieć przecząco. Gdybyś-  
my bowiem zbudowali kwadrat na jednostce  $OA$  i zachcieli  
zmierzyć jego przekątną  $OX$ , to okazałoby się, że jej  
nie odpowiada żadna liczba wymierna, bo  $X$  jest z  $OA$  nie-  
współmierne. Jakkolwiek blisko wybierzemy na prostej dwa  
punkty wymierne  $L$  i  $M$ , zawsze istnieje pomiędzy nimi  
pośredni punkt wymierny, np. środek odcinka  $LM$  punkt  
 $P$ . Tę własność zbioru nazywamy gęstością. Można ją wy-  
razić również w ten sposób: nie istnieje punkt wymierny,  
który byłby najbliższym danego punktu wymiernego. Własność  
gęstości posiada więc zbiór liczb wymiernih. Jednakże  
punkty wymierne nie stanowią wszystkich punktów prostej.  
Gdybyśmy bowiem na odcinku wymiernym  $OA$  zbudowali kwa-  
drat i odłożyli na prostej jego przekątną  $OX$ , to punkt  
 $X$  nie upadłby na żaden z punktów wymiernih. Podobnie  
ma się rzecz z liczbami. Gdybyśmy przyjęli  $OA$  za jedno-  
stkę i chcieli zapomocą niej wyrazić  $OX$ , to nie zna-  
leźlibyśmy takiej liczby całkowitej ani ułamkowej, która-  
by wskazywała, ile razy jednostka lub jakakolwiek jej  
część mieści się w  $OX$ . Możemy utworzyć przekrój, w  
którym do I klasy zaliczymy wszystkie odcinki wymierne.



Rys. 10.

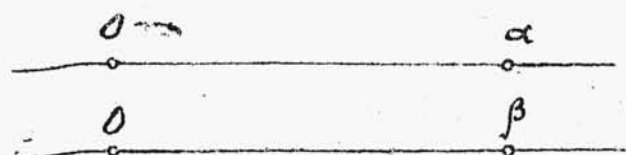
mniejsze od  $OX$ , do II  
zaś wszystkie wymierne  
odcinki większe od  $OX$ .  
Punkt  $X$ , oddzielający  
obie klasy, odgranicza-  
jący końce odcinków więk-

szych i mniejszych od  $OX$  nazywamy punktem niewymiernym.  
Jego miarę, t.j. odpowiadającą mu liczbę, nazwiemy liczbą  
niewymierną. Wprowadzenie więc liczb niewymiernych pozwala  
nam rozwiązać dwa zagadnienia: znaleźć pierwiastek równania  
kształtu  $x^2 = 2$  i zmierzyć dowolny odcinek przy pomocy da-  
nej jednostki.

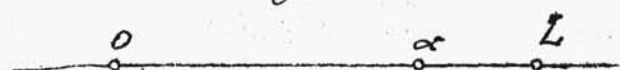
### O k r e ś l e n i e   r ó w n o ś c i   i   n i e - r ó w n o ś c i   d l a   l i c z b   n i e w y m i e r - n y c h .

Niech będą dane dwie liczby niewymierne  $\alpha$  i  $\beta$ . Rów-  
ność tych liczb będziemy uważać za równoznaczną z identycz-  
nością odpowiednich przekrojów; wtedy obie klasy niższe  
zlewają się ze sobą; tak samo i klasy wyższe. Niech licz-  
bie  $\alpha$  odpowiada punkt  $\alpha$ , liczbie zaś  $\beta$  punkt  $\beta$  /przy  
tej samej jednostce miary/. Jeżeli  $\alpha = \beta$ , to rzecz jasna  
że oba punkty są jednakowo odległe i z tej samej strony  
punktu 0 położone /rys. 11/. Przypuścimy teraz, że  $\alpha \neq \beta$   
To znaczy, że przekroje odpowiadające nie są identyczne





Rys. 11.



Rys. 12.

Jeżeli zaś istnieje wymierny punkt  $M$  na lewo od punktu  $\alpha$  a na prawo od  $\beta$  /liczba wymierna  $M$  mniejsza od  $\alpha$  i większa od  $\beta$  /, wtedy  $\alpha > \beta$  /rys. 13/.



Rys. 13.

Określenie sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu liczb niewymiernych.

Niech będą dane dwie liczby niewymierne  $\alpha$  i  $\beta$ . Tworzą one przekroje; każdą liczbę wymierną, należącą do klasy niższej przekroju  $\alpha$  oznaczmy przez  $a$ , należącą zaś do klasy wyższej przez  $A$ . Dla liczby  $\beta$  odpowiednio oznaczmy liczby tych 2 klas przez  $b$  i  $B$ . Wtedy

$$a < \alpha < A \quad \text{ i } \quad b < \beta < B$$

Oczywiście jest, że  $a+b < A+B$ . Można znaleźć taką sumę  $a+b$  niższej klasy /suma niższa/ i taką sumę  $A+B$

i klasy niższe, zarówno i wyższe nie zlewają się ze sobą. Jeżeli istnieje taki punkt wymierny  $L$  /liczba wymierna  $L$  większa od  $\alpha$  i mniejsza od  $\beta$  /, który leży na prawo od  $\alpha$  i na lewo od  $\beta$ , to mówimy, że  $\alpha < \beta$  /rys. 12/. Je-

klasy wyższej /sumę wyższą/, aby różnica

$$(A+B)-(a+b)=(A-a)+(B-b)$$

była tak małą, jak sobie życzymy. Wobec tego jest rzeczą niemożliwą, aby istniały 2 liczby  $r$  i  $l$ , czyniące zadość nierówności

$$a+b < r+l < A+B$$

Byłoby bowiem  $(A+B)-(a+b) > l-r$  co przeczy warunkowi, że lewa strona nierówności jest zmienną dowolnie małą. Może więc być tylko jedna liczba większa od wszystkich sum niższych i mniejsza od wszystkich sum wyższych. Określmy następujący przekrój: do klasy wyższej zaliczmy liczby wymierne większe od wszystkich sum  $a+b$  do klasy niższej wszystkie pozostałe liczby wymierne. Ten przekrój określa pewną liczbę wymierną albo niewymierną, którą nazywamy sumą liczb niewymiernych  $\alpha + \beta$ .

W ten sam sposób moglibyśmy określić odejmowanie liczb niewymiernych. Dojdziemy jednak do tego określenia nieco inną drogą. Nazwiemy przeciwnymi takie 2 liczby, które w sumie dają zero. Niech  $\alpha > 0$  będzie liczbą niewymierną, określoną zapomocą przekroju;  $\alpha$  oznacza w nim liczbę wymierną klasy niższej, zaś  $A$  klasy wyższej. Utwórzmy nowy przekrój z liczb przeciwnych; do klasy niższej zaliczmy liczby  $-A$ , do klasy wyższej  $-\alpha$ . Ten przekrój określa nową liczbę, przeciwną do  $\alpha$ ; którą oznaczymy przez  $-\alpha$

Łatwo udowodnić, że suma  $\alpha + (-\alpha)$  równa jest 0. Trzeba tylko uważać zero za liczbę określoną przez przekrój z liczb dodatnich w wyższej i ujemnych w niższej klasie. Tak więc określamy odejmowanie przez sprowadzenie do dodawania

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Niech będą 2 liczby niewymierne  $\alpha > 0$  i  $\beta > 0$  dane zapomocą przekrojów  $a, A$  oraz  $b, B$ . Utwórzmy iloczyny  $ab$  i  $AB$ . Zawsze  $ab < AB$

$$AB - ab = A(B - b) + b(A - a)$$

Różnice  $A - a$  i  $B - b$  mogą być tak małe, jak nam się podoba; taką też może być różnica  $AB - ab$ . Może więc istnieć tylko jedna liczba większa od  $ab$  i mniejsza od

$AB$ /patrz określenie  $\alpha + \beta$ . Utwórzmy przekrój następujący: do klasy wyższej zaliczmy liczby wymierne, większe od wszystkich iloczynów  $AB$  do klasy niższej pozostałe liczby wymierne. Liczbę, wyznaczoną zapomocą tego przekroju, nazywamy iloczynem liczb niewymiernych  $\alpha \beta$ . Łatwo można określić mnożenie dla liczb ujemnych. Niech  $\alpha < 0$  i

$\beta > 0$  W takim razie  $-\alpha > 0$ . Iloczyn  $(-\alpha) \cdot \beta$  jest liczbą przeciwną względem  $\alpha \cdot \beta$  czyli  $\alpha \cdot \beta = -[(-\alpha) \cdot \beta]$

Jeżeli  $\alpha < 0$  i  $\beta < 0$ , to i w tym razie można sprowadzić mnożenie tych liczb do mnożenia liczb dodatnich. Mianowicie:

$$\alpha \cdot \beta = (-\alpha) \cdot (-\beta).$$

gdzie  $-\alpha$  i  $-\beta$  są to liczby większe od zera.

Niech będzie liczba niewymierna  $\alpha > 0$ , określona p przez przekrój, w którym  $\alpha$  oznacza liczbę klasy I, zaś  $\beta$  liczbę klasy II. Utwórzmy nowy przekrój, w którym do klasy niższej zaliczymy liczby wymierne mniejsze od zera, zero, oraz liczby kształtu  $\frac{1}{\beta}$  a do wyższej pozostałe liczby wymierne. Liczbę wyrażoną przez ten przekrój nazywamy odwrotnością liczby  $\alpha$  i oznaczamy przez  $\frac{1}{\alpha}$ . Jeśli  $\alpha < 0$ , to odwrotność liczby  $\alpha$ , czyli  $\frac{1}{\alpha}$  określimy jako równą liczbie  $\frac{1}{-\alpha}$  gdzie  $-\alpha > 0$ . Możemy teraz zastąpić dzielenie liczb niewymiernych przez mnożenie. Iloraz  $\frac{\alpha}{\beta}$  jest niczem innym, jak iloczynem liczby  $\alpha$  przez odwrotność  $\beta$ , czyli

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

Nietrudno byłoby wykazać, że wszystkie prawa, dotyczące działań algebraicznych nad liczbami wymiernymi, jak przestawność sumy, przemienność iloczynu i t.p., są słuszne i dla liczb niewymiernych.

### Przekroje w dziedzinie

### liczb rzeczywistych.

Podobnie jak tworzyliśmy przekroje zbioru liczb wymiernych, możemy tworzyć przekroje w dziedzinie wszystkich liczb rzeczywistych. Zachodzi jednak pewna różnica. Nie może się, mianowicie, zdarzyć, aby klasa I nie miała

Liczby największej i  $I$  nie miała liczby najmniejszej. Nie istnieje więc liczba większa od wszystkich liczb klasy niższej, a mniejsza od wszystkich liczb klasy wyższej. Mogą zajść zatem tylko 2 wypadki przekrojów: 1/ pierwsza klasa posiada liczbę największą, a druga nie posiada najmniejszej; 2/ pierwsza klasa nie posiada liczby największej, a druga posiada liczbę najmniejszą. Widzimy, że w ten sam sposób zbiór liczb rzeczywistych rozszerzyć się nie da. Zbiór taki nazywamy zbiorem zamkniętym.

Aby wykazać, że zbiór liczb rzeczywistych jest istotnie zamkniętym, utworzymy przekrój w dziedzinie tych liczb. Niech  $\mathcal{I}$  oznacza klasę niższą przekroju,  $\mathcal{U}$  zaś klasę wyższą. Następnie utworzymy drugi przekrój w dziedzinie liczb wymiernych. Do klasy niższej  $\mathcal{I}$  zaliczymy te liczby wymierne, które należą w pierwszym przekroju do klasy  $\mathcal{I}$ , a do klasy wyższej  $\mathcal{U}$  liczby, należące do klasy  $\mathcal{U}$ . Ten ostatni przekrój określa liczbę  $\alpha$ , która może być wymierną lub niewymierną. Wypuścimy, że  $\alpha$  jest liczbą wymierną, należącą do klasy niższej. Będzie to największa liczba  $\mathcal{I}$ . Należy ona również do klasy  $\mathcal{I}$ . Wypuścimy, że liczba niewymierna  $\beta$ , należąca do klasy  $\mathcal{I}$ , jest większa od  $\alpha$ . Pomiędzy liczby  $\alpha$  i  $\beta$  możemy wstawić nieskończenie wiele liczb wymiernych i niewymiernych. Jedną z liczb wymiernych niech będzie  $\omega$ .



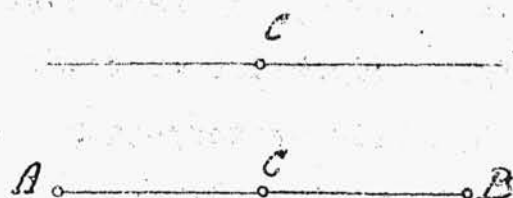
$$\alpha < \omega < \beta$$

Jako mniejsze od  $\beta$  należałoby do klasy  $T$ , a tym samym do  $T_1$ . Jest to sprzeczne z tym, że  $\alpha$  ma być największą liczbą klasy  $T_1$ . Największa zatem liczba klasy  $T_1$ , jest to zarazem największa liczba klasy  $T$ . Podobne rozumowanie pokazałoby nam, że najmniejsza liczba klasy  $U_1$  jest najmniejszą liczbą wymierną klasy  $U$ . Rozpatrzmy teraz wypadek, gdy  $\alpha$  jest niewymierne. Niech więc  $\alpha$  nie należy ani do  $T_1$  ani do  $U_1$ . Musi jednak należeć do klasy  $T$  albo  $U$ . Przypuśćmy, że  $\alpha$  należy do klasy  $T$ . Łatwo udowodnić, że jest to największa liczba tej klasy. Gdyby bowiem istniała w tej klasie liczba  $\beta > \alpha$ , to pomiędzy te liczby moglibyśmy wstawić liczbę wymierną  $\omega$  spełniającą nierówność

$$\alpha < \omega < \beta$$

Liczba  $\omega$  należałaby też do klasy  $T$ , a więc, jako liczba wymierna, i do  $T_1$ . Wszystkie jednak liczby klasy  $T_1$  muszą być mniejsze od  $\alpha$ , a więc i  $\omega < \alpha$ , co jest sprzeczne z wyżej napisaną nierównością.  $\alpha$  musi być największą liczbą klasy  $T$ . Jeżeli  $\alpha$  należało do klasy  $U$  to musiałoby być najmniejszą liczbą tej klasy.

Przejdźmy teraz do interpretacji geometrycznej. Niech będzie dana liczba prosta lub odcinek  $AB$  i punkt  $C$  dzielący ją na 2 części. O każdym punkcie prostej danej



*Fig. 14.*

/lub odcinka  $AB$ / możemy powiedzieć, czy znajduje się on na prawo, czy też na lewo od punktu  $C$ . Punkty leżące na lewo zaliczmy do klasy niższej, na prawo

zaś do wyższej. Zadanie to można teraz przedstawić w sposób odwrotny. Gdy będziemy wiedzieć, do której klasy każdy punkt wymierny i niewymierny prostej /odcinka/ należy, punkt  $C$  będzie określony. Jest to t. zw. pewnik Dedekinda. Punkt  $C$  jest ostatnim punktem niższej klasy lub pierwszym punktem wyższej klasy.

Pomiędzy zbiorem liczb i punktów można ustanowić pewną odpowiedniość; to znaczy podporządkować liczbom punkty /ewentualnie odcinki/ i nawzajem. Zajmijmy się najpierw podporządkowaniem liczbom punktów. Należy rozpatrzyć 3 wypadki. 1/ Dany jest zbiór liczb całkowitych. Obieramy na prostej stały punkt 0 i dowolną jednostkę miary. Odkładamy następnie, poczynawszy od punktu 0, jednostkę na prostej i punkty, w których upadną końce odcinka, odpowiadać będą kolejnym liczbom całkowitym. W ten sposób otrzymamy na prostej szereg punktów, podporządkowanych zbiorowi liczb całkowitych. 2/ Mamy zbiór liczb wymiernych. Odpowiada mu zbiór punktów wymiernych, nieskończenie blisko siebie le-

żących, niepokrywający jednak całej prostej. 3/ Dany jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Odpowiada mu zbiór punktów wymiernych i niewymiernych, zbiór wyczerpujący wszystkie punkty prostej. Dla zilustrowania zależności można ułożyć następującą tablicę:

Z b i ó r   l i c z b : 1. Liczby całkowite. 2. Liczby wymierne. 3. Liczby rzeczywiste.

Z b i ó r   p u n k t ó w . 1. Punkty o współrzędnych całkowitych /zbiór ani gęsty ani zamknięty/. 2. Punkty wymierne /zbiór gęsty, lecz niezamknięty/. 3. Punkty wymierne i niewymierne /zbiór gęsty i zamknięty/.

Postępujemy teraz odwrotnie. Mając odcinek  $AB$  i jednostkę  $MN$  podporządkujemy odcinkowi liczbę. I tutaj zajść mogą 3 wypadki. 1/ Gdy odłożymy jednostkę na odcinku  $AB$  raz, to koniec jednostki miary  $N$  upadnie na punkt  $B$ ; wówczas punktowi  $B$  /odcinkowi  $AB$ / odpowiada liczba  $1$ . 2/ Gdy odłożymy  $MN$  na  $AB$   $k$  razy, punkt  $N$  upadnie na punkt  $N_k$ , na lewo od punktu  $B$ ; gdy zaś odłożymy jednostkę  $k+1$  razy, punkt  $N$  upadnie na  $N_{k+1}$ , na prawo od  $B$ . W takim razie dzielimy  $MN$  na  $m$  części równych i odkładamy je na  $AB$ ; jeżeli ten nowy odcinek odłoży się na  $AB$  raz, to odcinkowi  $AB$  odpowiadać będzie liczba  $\frac{22}{m}$ . 3/ Zdarzyć się może, że nawet najmniejsza część jednostki nie będzie się mieścić całkowitą liczbą razy w  $AB$  /odcinki niewspół-

$A$

$A, B, A_1$

mierne z jednostką/. Utworzy-  
my przekrój, w którym do niż-  
szej klasy zaliczymy liczby  
odpowiadające odcinkom mniej-

$A$

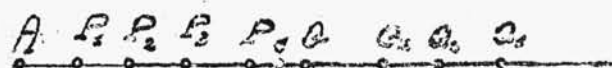
$A$

Rys. 15.

szym od  $AB$ , a do wyższej - odpowiadające odcinkiem większym  
od  $AB$ . Liczba niewymierna, wyrażona przez ten przekrój,  
jest właśnie miarą odcinka  $AB$ .

Łatwo wykazać, że działaniom na odcinkach odpowiadają  
działania na liczbach i odwrotnie. Więc sumie 2 odcinków  
odpowiada suma 2 liczb /odpowiadających odcinkom składo-  
wym/, różnicy odcinków odpowiada różnica liczb i t.d.

Mając daną liczbę możemy wykreślić odcinek jej odpowia-  
dający. Jest to sprawa bardzo prosta, gdy mamy do czynie-  
nia z liczbami całkowitemi lub ułamkowymi. Gdy zaś dana  
jest liczba niewymierna  $\alpha$ , określona zapemcą przekro-  
ju, i dla niej mamy znaleźć odpowiedni odcinek, postępuje-  
my w następujący sposób. Od punktu  $A$  odkładamy od-  
cinki wymierne, odpowiadające liczbom pierwszej klasy  
 $A_1, A_2, A_3$ ; następnie odcinki, których miarą są licz-  
by drugiej klasy  $A_4, A_5, \dots$  i t.d. Możemy znaleźć 2 liczby  
należące do różnych klas, tak mało się różniące, jak nam  
się podoba. Liczbom tym odpowiadają 2 dowolne bliskie  
punkty  $P$  i  $Q$ . Wszystkie punkty odpowiadające liczbom



Rys. 16.

I klasy będą leżały po jednej stronie prostej a punkty, które odpowiadają liczbom II

lasy - po drugiej. Na zasadzie pewnika Dedekinda musi istnieć jakiś punkt  $\zeta$ , odgraniczający obie części prostej ten punkt jest właśnie końcem odcinka  $AC$ , odpowiadającego liczbie  $\zeta$ .

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych stanowi t.zw. continuum arytmetyczne, a zbiór wszystkich odpowiadających mu punktów - continuum geometryczne. Wyżej ustanowiliśmy zależność między continuum arytmetycznym i geometrycznym i przekonaliśmy się, że jedno z nich można uważać za funkcję drugiego i odwrotnie. Gdy więc liczba  $x$  zmienia się w obszarze continuum arytmetycznego, odpowiadający jej punkt  $X$  ulega zmianie w obszarze continuum geometrycznego.

TEORIA CANTORA. Do pojęcia liczby niewymiernej dojść można, jak już na początku mówiliśmy, dwiema drogami. Jedną z nich, wskazaną przez Dedekinda już poznaliśmy. Teraz zapoznamy się w ogólnych zarysach z inną teorią, podaną przez Cantora, a opartą na pojęciu ciągów.

Ciągiem nazywamy szereg liczb, następujących w pewnym porządku po sobie, przy czem każda liczba, zwana wyrazem