

Możemy założyć, że $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ są to ułamki nieskracalne. Oznaczmy ich najmniejszy wspólny mianownik przez D , tak iż

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{D}; \alpha_2 = \frac{m_2}{D}; \dots \alpha_n = \frac{m_n}{D}$$

Podstawmy $x = t^D$, skąd $dx = Dt^{D-1}dt$, $x^{\frac{1}{D}} = t$

Otrzymamy więc całkę funkcji wymiernej:

$$\int R(t^{m_1}, t^{m_2}, \dots, t^{m_n}) Dt^{D-1} dt$$

Krzywą jednobieżną będziemy nazywali taką krzywą $f(x, y)$, której spókrzędne są funkcjami wymiernymi pewnego parametru:

$$x = u(t); y = v(t).$$

Przypuśćmy, iż jest dane równanie:

$$f(x, y) \equiv ax^n + bx^{n-1}y + cx^{n-2}y^2 + \dots = 0$$

i mamy znaleźć całkę funkcji wymiernej: $\int R(x, y) dx$.

Jeżeli krzywa $f(x, y) = 0$ jest jednobieżna, to stosując tak zwane podstawienie Abela, sprowadzimy daną całkę do całki funkcji wymiernej:

$$\int R[u(t), v(t)] u'(t) dt.$$

Całki, które powyższą metodą dają się obliczyć, noszą nazwę całek związanych z teoreją stożkowych. Nazwę tę tłumaczy następujące wyjaśnienie.

Jeżeli x i y są związane zależnością drugiego stopnia, to można zawsze metodę powyższą zastosować. Należy więc udowodnić, że każda krzywa, wyznaczająca się przez równanie drugiego stopnia, czyli każda stożkowa

jest jednobieżna.

Niech będzie dane równanie stożkowej w postaci ogólnej:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

Obierzmy na krzywej dowolny punkt $M(a, b)$. Jeżeli przesuniemy do niego początek współrzędnych, pozostawiając osie równoległymi do pierwotnego położenia, to dane równanie przybierze postać:

$$A(x-a)^2 + 2B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 + 2D_1(x-a) + 2E_1(y-b) = 0$$

Poprowadźmy przez punkt M dowolną sieczną:

$$y-b = t(x-a)$$

która przetnie stożkową w punkcie $N(x, y)$:

$$A(x-a)^2 + 2B(x-a)t + C(x-a)t^2 + 2D_1(x-a) + 2E_1(x-a)t = 0$$

Ze wszystkich wyrazów można wyłączyć czynnik $(x-a)$, więc $x-a=0$, skąd $x=a$ oraz $(y-b)=0$; $y=b$ otrzymujemy punkt $M(a, b)$, jako punkt przecięcia/ lub też

$$A(x-a) + 2B(x-a)t + C(x-a)t^2 + 2D_1 + 2E_1t = 0,$$

skąd

$$x = a - \frac{2D_1 + 2E_1t}{A + 2Bt + Ct^2}$$

W ten sposób wyraziliśmy x jako funkcję wymierną parametru t . Podobnie można wyrazić y jako funkcję tegoż parametru:

$$y = b - \frac{2D_1t + 2E_1t^2}{A + 2Bt + Ct^2}$$

A zatem stożkowa jest istotnie krzywą jednolitą.

Niech będzie dana całka $\int R(x, y) dx$, gdzie $y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$, zaś R oznacza dowolną funkcję wymierną względem zmiennych x i y . Można założyć, że

$$R(x, y) = \frac{A_1(x) + B_1(x)y}{A_2(x) + B_2(x)y}$$

lub po zniesieniu niewymierności y w mianowniku:

$$R(x, y) = \frac{P_1(x) + P_2(x)y}{Q_2(x)}$$

Przekształcając tę funkcję w dalszym ciągu, sprowadzimy ją do postaci:

$$R(x, y) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_3(x)}{Q_2(x)y}$$

A zatem

$$\int R(x, y) dx = \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx + \int \frac{P_3(x)}{Q_2(x)y} dx.$$

Pierwsza z całek składowych jest typu już znanego; należy więc tylko zastanowić się nad całką drugą, funkcji $\frac{P_3(x)}{Q_2(x)y}$. Jeżeli stopień wielomianu $P_3(x)$ będzie wyższy od stopnia wielomianu $Q_2(x)$, to wówczas

$$\frac{P_3(x)}{Q_2(x)} = P_4(x) + \frac{P_5(x)}{Q_2(x)}.$$

Przy pomocy rozkładu na ułamki proste znajdziemy, że

$$\frac{P_5(x)}{Q_2(x)} = \sum \frac{A_{m,m}}{(x-a)^m}$$

A zatem

$$\int \frac{P_3(x)}{Q_2(x)y} dx = \int \frac{P_4(x)}{y} dx + \sum \int \frac{A_{m,m}}{(x-a)^m y} dx$$

Należy więc rozpatrzyć całki:

$$\int \frac{P(x)}{y} dx ; \int \frac{dx}{(x-a)^m y}.$$

Użyjemy tutaj znowu wzorów redukcyjnych. Oznaczmy:

$$J_n = \int \frac{x^m}{y} dx.$$

Utwórzmy funkcję $x^m y$ i zróżniczkujmy ją, uwzględniając, że $y = \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$, skąd $y' = \frac{Ax+B}{y}$.

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{d(x^m y)}{dx} &= \frac{mx^{m-1} y^2}{y} + \frac{x^m (Ax+B)}{y} = \\ &= \frac{m x^{m-1} (Ax^2 + 2Bx + C) + Ax^{m+1} + Bx^m}{y} = \\ &= (m+1)A \frac{x^{m+1}}{y} + (2m+1)B \frac{x^m}{y} + mC \frac{x^{m-1}}{y} \end{aligned}$$

Całkując to, znajdziemy:

$$x^m y = (m+1)A \int \frac{x^{m+1}}{y} dx + (2m+1)B \int \frac{x^m}{y} dx + mC \int \frac{x^{m-1}}{y} dx$$

czyli

$$(m+1)A \cdot J_{m+1} = x^m y - (2m+1)B \cdot J_m - mC \cdot J_{m-1},$$

skąd

$$J_{m+1} = \frac{x^m y}{(m+1)A} - \frac{(2m+1)B}{(m+1)A} J_m - \frac{mC}{(m+1)A} J_{m-1}.$$

Przy pomocy tego wzoru będziemy mogli obniżać wykładnik funkcji początkowej aż do $m=0$.

Jeżeli w liczniku tej funkcji mamy nie x^m , lecz wielomian m stopnia względem x : $P^m(x)$, to

$$\begin{aligned} \int \frac{P^m(x)}{y} dx &= \sum_{n=0}^{n=m} A_n \cdot J_n = \sum_{n=0}^{n=m} A_n \cdot x^n y + k \int \frac{dx}{y} = \\ &= y \cdot H^{m-1}(x) + k \int \frac{dx}{y}. \end{aligned}$$

Zadanie więc będzie polegało na odnalezieniu wielomianu $m-1$ stopnia względem x oraz współczynnika k . Wielomian ten odnajdziemy metodą współczynników nieoznaczonych.

$$\int \frac{Ax}{y} dx = y \cdot W(x) + k \int \frac{dx}{y}$$

Różniczkujemy:

$$\frac{P(x)}{y} = \frac{W'(x)}{y} \cdot y^2 + \frac{W(x)(Ax+B)}{y} + \frac{k}{y}$$

skąd

$$P(x) = W'(x) \cdot (Ax^2 + 2Bx + C) + W(x) \cdot (Ax+B) + k$$

Porównując teraz dwa tożsamościowo równe wielomiany $P(x)$: dany z powyżej napisanym, otrzymamy $m-1$ równań, które pozwolą nam wyznaczyć wielomian $W(x)$ i współczynnik k .

Dla znalezienia całki $\int \frac{dx}{(x-a)^m y}$ oznaczmy: $x-a=t$ skąd $x=a+t$, $dx=dt$.

Wówczas otrzymamy zamiast całki danej, całkę o typie poprzednio zbadanym:

$$\int \frac{dt}{t^m \cdot \sqrt{At^2 + 2Bt + C}} = - \int \frac{dx}{x^2 \cdot \frac{1}{x^{m-1}} \cdot \sqrt{C_1 x^2 + 2B_1 x + A_1}} = - \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{C_1 x^2 + 2B_1 x + A_1}}$$

Niech będzie dana całka:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}$$

Przy pomocy podstawienia Eulera /podstawiając

$x + \sqrt{x^2 + px + q} = 0$ znajdziemy, że jest ona równa całce:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + px + q}} = \log |x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2 + px + q}|.$$

Przypuśćmy, że mamy całkę:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$$

Podstawiamy:

$$t = \frac{x+p/2}{\sqrt{q+p^2/4}}$$

Znajdziemy łatwo:

$$x = p/2 + t\sqrt{q+p^2/4}; \quad dx = \sqrt{q+p^2/4} dt.$$

A więc

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}} &= \sqrt{q+p^2/4} \int \frac{dt}{\sqrt{q+p^2/4 - t^2(q+p^2/4)}} = \\ &= \sqrt{q+p^2/4} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sqrt{q+p^2/4} \cdot \arcsin \frac{(x-p/2)}{\sqrt{q+p^2/4}}. \end{aligned}$$

Często w celu znalezienia funkcji pierwotnej nie korzystamy z pewnej określonej metody ogólnej, a kombinujemy te metody ze sobą w odpowiedni sposób.

Niech będzie np. dana całka $\int y dx$, gdzie $y = \sqrt{x^2+px+q}$. Oznaczając y przez u , dx przez dv , mamy / całkowanie przez części /:

$$\begin{aligned} \int y dx &= (x+p/2) \cdot y - \int \frac{(x+p/2)^2}{y} dx = (x+p/2) y - \int y dx - \\ &\quad - (p^2/4 - q) \int \frac{dx}{y}. \end{aligned}$$

Stąd

$$\begin{aligned} 2 \int y dx &= (x+p/2) y + (q - p^2/4) \int \frac{dx}{y} = \\ &= (x+p/2) y + (q - p^2/4) \cdot \lg(x+p/2+y). \end{aligned}$$

Dzieląc obie strony równania przez 2, znajdziemy całkę szukaną.

Niech znowu będzie dana całka $\int y dx$, gdzie

$y = \sqrt{-x^2 + px + q}$. Oznaczając, jak poprzednio, mamy:

$$\begin{aligned} \int y dx &= y(x - p/2) + \int \frac{(x - p/2)^2}{y} dx = \\ &= (x - p/2)y - \int y dx + (p^2/4 + q) \int \frac{dx}{y}. \end{aligned}$$

Przenosząc $\int y dx$ z prawej strony na lewą, otrzymamy:

$$\begin{aligned} 2 \int y dx &= (x - p/2)y + (p^2/4 + q) \int \frac{dx}{y} = \\ &= (x - p/2)y + (p^2/4 + q) \arcsin \frac{x - p/2}{\sqrt{p^2/4 + q}}, \end{aligned}$$

skąd z łatwością szukaną całkę możemy wyznaczyć.

Całki dwumienne posiadają postać ogólną:

$$\int x^p (ax^m + b)^q dx$$

Przypuśćmy, że q jest liczbą całkowitą, zaś p i m liczbami wymiernymi dowolnymi. Oznaczmy ich najmniejszy wspólny mianownik przez D : $p = \frac{p_1}{D}$, $m = \frac{m_1}{D}$ oraz $x^{\frac{1}{D}} = t$.

Będziemy wówczas mieli całkę:

$$\int t^{p_1} (at^{m_1} + b)^q dx,$$

którą łatwo można odnaleźć, rozwijając dwumian powyższy według wzoru Newtona.

Przypuśćmy teraz, że q jest liczbą ułamkową.

Oznaczmy: ax^m biskąd:

$$x^p \left(\frac{t-b}{a} \right)^{p/m},$$

oraz

$$amx^{m-1}dx = dt$$

więc

$$dx = \frac{dt}{am} \cdot \frac{a^{m-1}}{(t-b)^{\frac{m-1}{m}}}$$

Dana całka da się zastąpić przez całkę:

$$\frac{1}{am} \int \left(\frac{t-b}{a} \right)^{p/m} \cdot t^q \cdot \left(\frac{t-b}{a} \right)^{\frac{t-m}{m}} dt = \frac{1}{am} \int \left(\frac{t-b}{a} \right)^{\frac{p+1}{m}} t^q dt.$$

Ta całka można wyznaczyć, gdy $\frac{p+1}{m}$ jest liczbą całkowitą, oraz gdy $\frac{p+1}{m} + q$ jest liczbą całkowitą.

W ostatnim bowiem przypadku możemy zastąpić $ax^m + b$ przez $x^m(a+bx^{-m})$ a daną całkę przez

$$\int x^{p+mq/a+bx^{-m}} dx$$

która na zasadzie poprzedniego daje się scałkować, gdy $\frac{p+mq+1}{m} = \frac{p+1}{m} + q$ jest liczbą całkowitą.

A zatem całkę $\int x^p(ax^m+b)dx$ umiemy scałkować tylko w trzech przypadkach: 1/ gdy q jest liczbą całkowitą; 2/ gdy q jest ułamkiem, lecz $\frac{p+1}{m}$ jest liczbą całkowitą; 3/ gdy q jest ułamkiem, ale $\frac{p+1}{m} + q$ jest liczbą całkowitą. Wykładniki p i m mogą być w każdym przypadku liczbami dowolnymi wymiernymi.

Niech teraz będzie dana całka funkcji wymiernej

$$\int R(x,y) dx, \text{ gdzie } y = \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}$$

Całka ta nie daje się sprowadzić do całki funkcji wymiernej względem x / odpowiednia krzywa nie jest

jednobieżna/. Można przy pomocy przekształcenia lin-
jowego sprowadzić ją do całki funkcji, nie zawierają-
cej nieparzystych potęg x , mianowicie funkcji kształ-
tu: $y_1 = a_1 x^4 + b_1 x^2 + c_1$.

$$\int R(x, y) dx = \int \frac{R(x) + y \cdot Q(x)}{\theta_1(x) + y \cdot \theta_2(x)} dx = \int R_1(x) dx + \int \frac{P_3(x)}{y \cdot \theta_3(x)} dx$$

Jeżeli stopień wielomianu $P_3(x)$ jest wyższy od
stopnia wielomianu $\theta_3(x)$, to mamy w dalszym ciągu:

$$\int R_1(x) dx + \int \frac{P_4(x)}{y} dx + \int \frac{P_5(x)}{y \cdot \theta_4(x)} dx.$$

Pierwsza całka jest to całka funkcji wymiernej
którą odnaleźć potrafimy. Mianownik ostatniej całki
rozłożymy na czynniki proste i w ten sposób całkę tę
sprowadzimy do sumy całek typu

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m y}$$

Druga z danych całek jest sumą całek typu:

$$I_m = \int \frac{x^m}{y} dx$$

które za pomocą wzrów redukcyjnych ostatecznie spro-
wadzimy do całek:

$$/I/ \int \frac{dx}{y} \quad /II/ \int \frac{x dx}{y} \quad /III/ \int \frac{x^2 dx}{y}$$

Całki /I/ i /III/ scałkować przez sprowadzenie
do funkcji znanych się nie dają i nazywają się odpo-
wiednio całkami eliptycznymi
pierwszego i drugiego rodza-
ju. Całkę /II/ za pomocą podstawienia $x^2 = z$ wyzna-
czyć możemy. *Nie będziemy jednak mogli scałkować $\int \frac{dx}{y}$*
- całki eliptycznej
trzeciego rodzaju, do której się spro-

wadzi całka /wzory redukcyjne/ : $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$

Zupełnie to samo mamy, gdy pod pierwiastkiem jest wielomian stopnia trzeciego, albowiem na mocy twierdzenia o podstawianiu zmiennych, $z = \frac{1}{x}$ możemy przechodzić od wielomianu stopnia trzeciego do czwartego i odwrotnie. Jeżeli zaś pod pierwiastkiem jest wielomian stopnia wyższego niż czwarty, spotykamy całki jeszcze innego rodzaju, mianowicie t.zw. c a ł k i h i p e r e l i p t y c z n e .

Przejdziemy teraz do całkowania funkcji przestępnych i trygonometrycznych. Tutaj metod ogólnych niema i znalezienie całki zależy w każdym poszczególnym przypadku jedynie od bardziej lub mniej szczęśliwego pomysłu.

Niech np. będzie dana całka $\int f(e^x) dx$. Podstawiamy $e^x = t$, skąd

$$e^x dx = dt ; dx = \frac{dt}{t}$$

przez co dana całka sprowadzi się do całki funkcji wymiernej:

P r z y k ł a d :

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} e^x.$$

Niech będzie dana całka $\int f(\operatorname{tg} x) dx$. Podstawiamy $\operatorname{tg} x = t$

skąd

$$x = \operatorname{arctg} t ; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

A zatem dana całka będzie identyczna z całką funkcji wymiernej: $\int f(t) \frac{dt}{1+t^2}$

Niech teraz będzie dana całka $\int f(\sin x, \cos x) dx$. Sprowadzimy ją do całki funkcji wymiernej przy pomocy podstawienia $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, skąd mamy

$$x = 2 \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Dana całka daje się więc zastąpić przez

$$2 \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}.$$

Niech będzie dana całka $\int \cos(a_1 x + b_1) \cdot \cos(a_2 x + b_2) dx$.

Funkcję \sin możemy zastąpić przez funkcję \cos , zmniejszając jednocześnie stałą b o $\frac{\pi}{2}$. Zauważymy, że iloczyn tych funkcji będzie można zastąpić przez sumę:

$$\cos(a_1 x + b_1) \cdot \cos(a_2 x + b_2) = \cos[(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)] + \cos[(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)],$$

którą scałkować potrafimy.

Tę samą metodę możemy stosować do większej liczby czynników.

Tegoż typu jest całka

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \cos^m\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos^n x dx.$$

ponieważ potęgę można zastąpić przez iloczyn równych

Przykład I. Dana jest całka $\int \sin^3 x dx$

Mamy: $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

A więc

$$\int \sin^3 x dx = \frac{3}{4} \int \sin x dx - \frac{1}{4} \int \sin 3x dx = -\frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4 \cdot 3} \cos 3x$$

Przykład 2. Mamy daną całkę $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$.

Ponieważ

$$\sin^3 x \cdot \cos^3 x = \frac{3}{64} \sin^3 x + \frac{3}{64} \sin 3x - \frac{1}{64} \sin 5x - \frac{1}{64} \sin 7x,$$

więc dana całka będzie równa

$$-\frac{3}{64} \cos x - \frac{1}{64} \cos 3x + \frac{1}{5 \cdot 64} \cos 5x + \frac{1}{7 \cdot 64} \cos 7x,$$

Dla całek typu $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$ możemy łatwo uzasadnić wzory redukcyjne. Mamy

$$\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \cos^m x \cdot \sin x dx$$

Oznaczmy $\sin^{n-1} x$ przez u , zaś $\cos^m x \cdot \sin x dx$ przez

dv . Wówczas

$$du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, \quad v = -\frac{\cos^{m+1} x}{m+1}.$$

A zatem / całkowanie przez części /:

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx &= -\sin^{n-1} x \cdot \frac{\cos^{m+1} x}{m+1} + \\ &+ \frac{n-1}{m+1} \int \cos^m x \cdot \sin^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

Jest to właśnie żądany wzór redukcyjny: obniża on wykładnik potęgi funkcji podcałkowej $\sin^n x$ o 2. Analogicznie znajdziemy wzór, redukujący potęgę funkcji

$$\cos^n x: \quad \int \sin^n x \cdot \cos^m x dx = \cos^{m-1} x \cdot \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} +$$

$$+ \frac{m-1}{n+1} \int \sin^2 x \cdot \cos^{m-2} x dx.$$

DODATK.

DOWÓD, ŻE RÓWNANIE ALGEBRAICZNE STOPNIA n-go
POSIADA PRZYNAJMIJEN JEDEN PIERWIASTEK.

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Twierdzenie pomocnicze 1-sze.

Istnieje taka liczba R , że dla $|x| > R$, mamy zawsze $|f(x)| > d$, gdzie d jest dowolną liczbą dodatnią.

W rzeczy samej, wystarczy np. wziąć

$$R = 1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$$

gdzie $|a_0|$, oznacza moduł współczynnika przy najwyższej potędze zmiennej x w równaniu $(a_0 x^n)$; n stopień równania

A największy z modułów pozostałych współczynników.

Mamy bowiem, gdy $|x| > R = 1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$

$$|f(x)| > |a_0| R^n - A(R^{n-1} + R^{n-2} + \dots + R + 1).$$

Lecz

$$|a_0| \cdot R^n - \frac{A(R^n - 1)}{R - 1} > |a_0| \cdot R^n - \frac{A \cdot R^n}{R - 1} = \left\{ |a_0| - \frac{A}{R - 1} \right\} R^n$$

Tak więc

$$|f(x)| > \left\{ |a_0| - \frac{A}{R - 1} \right\} R^n$$

Podstawiając na miejsce R wartość $1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$ mamy

$$|f(x)| > \frac{|a_0| d}{A + d} \left\{ 1 + \frac{A + d}{n|a_0|} \right\}^n - \frac{|a_0| d}{A + d} \left\{ 1 + \frac{A + d}{n|a_0|} \right\}^{n-1} > d \left\{ 1 + \frac{A + d}{n|a_0|} \right\}^{n-1}$$

Ostatecznie więc $|f(x)| > d$, gdy $|x| > R = 1 + \frac{A}{|a_0|} + \frac{d}{n|a_0|}$