

gdybyśmy go bowiem zamienili na szereg nieskończony, wtedy otrzymalibyśmy:

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

A więc przy jakimkolwiek n , zawsze

$$u_n < 3$$

Ciąg jest zatem rosnący i ograniczony od góry; musi więc posiadać granicę, którą w danym wypadku oznaczamy przez e .

Granica ta jest zresztą znana jako zasada logarytmów naturalnych:

$$e = 2,718281828459045$$

TWIERDZENIA OGÓLNE, DOTYCZĄCE GRANIC.

1. Przypuśćmy, że mamy ciąg, dążący do zera:

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

$$(1) \quad u_n \rightarrow 0$$

Pomnóżmy wszystkie jego wyrazy przez liczbę stałą k :

$$k u_1, k u_2, k u_3, \dots, k u_n, \dots$$

Jeżeli pierwszy ciąg dąży do zera, to dowolnie małej liczbie dodatniej ε musi odpowiadać taki wskaźnik n , że gdy tylko $n > n_0$

$$(2) \quad |u_n| < \frac{\varepsilon}{|k|}$$

Ta nierówność pociąga za sobą nierówność:

$$(3) \quad |k u_n| < \varepsilon$$

Wobec tego można napisać:

$$(4) \quad k \cdot u_n \rightarrow 0$$

Jeżeli zatem wyrazy ciągu dążącego do zera pomnożymy przez liczbę stałą k , granicą nowego ciągu będzie również zero.

2. Przypuśćmy, że mamy dwa ciągi, dążące odpowiednio do granic a i b :

$$1/ \quad u_1, u_2, \dots, u_n, \dots, u_n \rightarrow a$$

$$2/ \quad v_1, v_2, \dots, v_n, \dots, v_n \rightarrow b$$

Jakkolwiek małą będzie liczba $\varepsilon > 0$ istnieć muszą takie liczby μ i ν , że będą słuszne nierówności:

$$13/ \quad |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > \mu$$

$$14/ \quad |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dla } n > \nu$$

Większą z liczb μ i ν oznaczamy przez n_0

$$n_0 \geq \mu; \quad n_0 \geq \nu$$

Gdy wybierzemy $n > n_0$, słuszne będą jednocześnie nierówności 13/ i 14/. Musi więc być słuszną i nierówność

$$15/ \quad |u_n - a| + |v_n - b| < \varepsilon$$

Na zasadzie twierdzenia o sumie wartości bezwzględ-

dnych możemy napisać:

$$|u_n - a| + |v_n - b| \geq |[(u_n - a) + (v_n - b)]| = |(u_n + v_n) - (a + b)|$$

A więc

$$|6| \quad |[(u_n + v_n) - (a + b)]| < \varepsilon$$

Jeżeli więc utworzymy ciąg, którego wyrazy będą stanowiły sumę odpowiednich wyrazów ciągów /1/ i /2/, dążących odpowiednio do granic a i b :

$$u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n,$$

to

$$u_n + v_n \rightarrow a + b.$$

A zatem granica sumy równa jest sumie granic składników jeżeli składniki granice posiadają.

W podobny sposób można udowodnić, że

$$u_n - v_n \rightarrow a - b$$

czyli, że granica różnicy równa się różnicy granic odjemnej i odjemnika, o ile takowe granice istnieją.

Stąd wniosek, że jeżeli dwa ciągi posiadają tę samą granicę, to różnica tych ciągów dąży do zera. I - stotnie

$$u_n - v_n \rightarrow a - b$$

Jeżeli zaś $a = 0$, to, rzecz jasna, że $u_n - v_n \rightarrow 0$

3. Przypuśćmy, że mamy dwa ciągi, z których każdy dąży do zera:

$$1) v_n \rightarrow 0 \quad 2) u_n \rightarrow 0$$

Jeżeli utworzymy nowy ciąg przez pomnożenie odpowiednich wyrazów danych ciągów, to i ten ciąg będzie dążył do zera: $u_n \cdot v_n \rightarrow 0$

Istotnie, jeżeli ciąg drugi dąży do zera, to począwszy od pewnego wskaźnika m mamy $|v_n| < 1$ a więc

$$|u_n \cdot v_n| = |u_n| \cdot |v_n| < |u_n|$$

lecz gdy $n > n_0$, to $|u_n| < \varepsilon$

Gdy oznaczymy większy ze wskaźników m i n_0 przez n_0 i weźmiemy $n > n_0$, to rzecz jasna, że $|u_n \cdot v_n| < \varepsilon$

UWAGA. To samo zachodzi również w tym przypadku, gdy tylko jeden ciąg dąży do zera: $u_n \rightarrow 0$, a drugi

spełnia tylko ten warunek, że jest ograniczony, t.j.

że wartości bezwzględne jego wyrazów są mniejsze od pewnej liczby M . Istotnie, w takim razie do każdej

dowolnie małej liczby można dobrać taki wskaźnik n_0

że dla $n > n_0$ mamy: $|u_n| < \frac{\varepsilon}{M}$; ponieważ zaś zawsze

$|v_n| < M$, przeto dla $n > n_0$: $|u_n \cdot v_n| < \frac{\varepsilon}{M} M$ czyli $|u_n \cdot v_n| < \varepsilon$, co znaczy, że granicą ciągu jest istotnie zero.

Analiza I

Arkusz 7^{my} I

4. Niech będą dane dwa ciągi, z których jeden dąży do granicy a , zaś drugi do b .

$$u_n \rightarrow a, \quad v_n \rightarrow b$$

Wykażemy, że

$$u_n \cdot v_n \rightarrow ab$$

Zwróćmy uwagę na to, że jeśli ciąg dąży do pewnej granicy, to różnica pomiędzy tą granicą i wyrazem ciągu dąży do zera. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} u_n - a &= u_n^1, & \text{przyczem } u_n^1 \rightarrow 0 \\ \text{oraz } v_n - b &= v_n^1, & \text{przyczem } v_n^1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Przemnożmy stronami dwie równości:

$$u_n = a + u_n^1, \quad v_n = b + v_n^1$$

$$\text{Otrzymamy iloczyn: } u_n \cdot v_n = ab + av_n^1 + bu_n^1 + u_n^1 \cdot v_n^1$$

Można więc ciąg, złożony z iloczynów wyrazów dwóch ciągów uważać za sumę czterech ciągów:

$$11/ \quad ab, ab, ab, \dots \rightarrow ab$$

$$12/ \quad av_1^1, av_2^1, av_3^1, \dots \rightarrow 0$$

$$13/ \quad bu_1^1, bu_2^1, bu_3^1, \dots \rightarrow 0$$

$$14/ \quad u_1^1 v_1^1, u_2^1 v_2^1, u_3^1 v_3^1, \dots \rightarrow 0$$

Pierwszy z nich, złożony z wyrazów jednakowych, ma granicę ab , pozostałe zaś ciągi dążą do zera /podług ustępów 1-go i 3-go/.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} ab + \lim_{n \rightarrow \infty} av_n^1 + \lim_{n \rightarrow \infty} bu_n^1 + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n^1 v_n^1$$

A więc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \cdot v_n = ab$$

Używając oznaczenia poprzedniego zapomocą strzałek napiszemy:

$$u_n \cdot v_n \rightarrow ab$$

W ten sposób teza została dowiedziona: granica iloczynu równa się iloczynowi granic czynników, jeżeli te granice istnieją.

ĆWICZENIE. Udowodnić to samo twierdzenie bezpośrednio przez badanie różnicy $|u_n \cdot v_n - ab|$.

Jako przypadek szczególny z udowodnionego wzoru wynika, że jeżeli $u_n \rightarrow a$, to

$$v_n = K \cdot u_n \rightarrow K \cdot a.$$

5. Niech będzie dany ciąg:

$$/1/ \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Utwórzmy nowy ciąg z odwrotności ciągu /1/:

$$/2/ \quad \frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2}, \frac{1}{u_3}, \dots, \frac{1}{u_n}, \dots$$

Udowodnimy, że jeżeli $u_n \rightarrow a$ to $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{a}$, gdy

$a \neq 0$. Ponieważ $a \neq 0$, to od pewnego miejsca, t.j. dla $n > n_0$, żaden z wyrazów u_n nie będzie równy zeru. Jeżeli dla $n < n_0$ któryś z wyrazów ciągu /1/ równa się zeru, to odpowiadający mu wyraz ciągu /2/ opuszczamy; opuszczonych miejsc będzie liczba skończona.

Podobnie jak w twierdzeniu poprzednim niech

$$u_n = a + u_n^1 \quad \text{gdzie} \quad u_n^1 \rightarrow 0, \quad \text{Ponieważ} \quad u_n \text{ posiada}$$

granicę a , więc dla wskaźników większych od pewnego wskaźnika m .

Stąd

$$\begin{aligned} |u_n - a| &< \frac{|a|}{2} \\ \frac{|a|}{2} &< |u_n| < \frac{3|a|}{2} \\ \frac{2}{3|a|} &< |u_n| < \frac{2}{|a|} \end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{u_n} \right| = \left| \frac{u_n - a}{a \cdot u_n} \right| = \frac{|u_n - a|}{|a| \cdot |u_n|} = \frac{|u_n^2|}{|a| \cdot |u_n|}$$

A więc

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{u_n} \right| < \frac{|u_n^2|}{|a|} \cdot \frac{2}{|a|} = \frac{2 \cdot |u_n^2|}{|a|^2}$$

Ponieważ $u_n^2 \rightarrow 0$ więc istnieje taka liczba N że skoro $n > N$, to

$$|u_n^2| < \frac{|a|^2}{2} \cdot \varepsilon$$

Gdy teraz

$$n_0 > m, \quad n_0 > N$$

zaś

$$n > n_0$$

wówczas

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{u_n} \right| < \frac{2}{|a|^2} \cdot \frac{|a|^2}{2} \cdot \varepsilon$$

czyli

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{u_n} \right| < \varepsilon$$

A zatem granicą $\frac{1}{u_n}$ jest liczba $\frac{1}{a}$. Gdy $a=0$, podobne rozumowanie nie może być zastosowane.

6. Niech będą dwa ciągi:

$$1/ \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

$$2/ \quad v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots$$

Utwórzmy ciąg

$$3/ \quad \frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}, \dots, \frac{u_n}{v_n}, \dots$$

Jeżeli granicą ciągu 1/ jest liczba a , granicą ciągu 2/ liczba $b \neq 0$, to granicą ciągu 3/ jest $\frac{a}{b}$. Istotnie ciąg 3/ można otrzymać jako iloczyn ciągu 1/ i ciągu 2/

$$2/ \quad \frac{1}{v_1}, \frac{1}{v_2}, \frac{1}{v_3}, \dots, \frac{1}{v_n}, \dots$$

Można więc napisać ciąg 3/ w sposób następujący

$$3/ \quad u_1 \cdot \frac{1}{v_1}, u_2 \cdot \frac{1}{v_2}, u_3 \cdot \frac{1}{v_3}, \dots, u_n \cdot \frac{1}{v_n}, \dots$$

Ciąg 1/ dąży do a , ciąg 2/ do $\frac{1}{b}$, a więc iloczyn

$$u_n \cdot \frac{1}{v_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

Ostatecznie

$$\frac{u_n}{v_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

Czyli granicą ilorazu dwóch ciągów jest ilorz ich granic o ile granica 2-go ciągu nie jest zero.

Powyższe twierdzenia mogą być użyteczne przy znajdowaniu granic różnego rodzaju ciągów.

Niech będzie np. pewna ilość ciągów;

$$1/ \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad u_n \rightarrow a$$

$$2/ \quad v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, \dots \quad v_n \rightarrow b$$

13/ $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n, \dots, w_n \rightarrow c$

Gdy utworzymy ciąg, którego ogólny wyraz jest funkcją wymierną

$$R(u_n, v_n, w_n)$$

to, jeżeli mianownik nie dąży do zera,

$$R(u_n, v_n, w_n) \rightarrow R(a, b, c)$$

Zilustrujemy to kilkoma przykładami: Znajdźmy granicę funkcji:

$$\frac{n^3 + 5n^2 + 7}{2n^3 + 10n - 5}$$

Podzielmy licznik i mianownik przez n^3 . Otrzymamy

$$\frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{10}{n^2} - \frac{5}{n^3}}$$

W danym wypadku mamy do czynienia z funkcją typu

$$R\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}\right)$$

Granica zmiennych $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ i t.d. jest zero; licznik ułamka dąży do 1, mianownik zaś do 2. A więc

$$\frac{n^3 + 5n^2 + 7}{2n^3 + 10n - 5} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Niech będzie dany ułamek, którego licznik i mianownik są wielomianami stopnia p względem n

$$\frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \dots}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \dots}$$

gdzie $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$. Dzielać licznik i mianownik przez n^p znajdziemy:

$$\frac{a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{n} + a_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots}{b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{n} + b_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots}$$

Granice wyrażenia znajdziemy, zastępując wartości zmiennych $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots$ przez ich granicę t. j. przez zero:

$$\frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \dots}{b_0 n^p + b_1 n^{p-1} + b_2 n^{p-2} + \dots} \rightarrow \frac{a_0}{b_0}$$

Cwiczenie. Udowodnić to samo bezpośrednio przez badanie różnicy między naszym wyrażeniem a liczbą $\frac{a_0}{b_0}$. Znajdźmy teraz granicę funkcji wymiernej, gdy stopień licznika jest różny od stopnia mianownika:

$$\begin{aligned} \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \dots}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + b_2 n^{q-2} + \dots} &= \frac{n^p (a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{n} + a_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots)}{n^q (b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{n} + b_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots)} \\ &= n^{p-q} \cdot \frac{a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{n} + a_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots}{b_0 + b_1 \cdot \frac{1}{n} + b_2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots} \end{aligned}$$

Tutaj zajść mogą dwa przypadki

1/ $p > q$. Gdy $n \rightarrow \infty$ to i $n^{p-q} \rightarrow \infty$.
całe wyrażenie dąży do ∞ / jeżeli $\frac{a_0}{b_0} > 0$ / , albo
do $-\infty$ / jeżeli $\frac{a_0}{b_0} < 0$. 2/ $p < q$. Gdy $n \rightarrow \infty$
to $n^{p-q} \rightarrow 0$

i całe wyrażenie dąży do zera.

Zbadajmy jeszcze jeden ważny przykład.

Niech będzie dany ciąg:

$$x, x^2, x^3, \dots, x^n, \dots$$

Tu rozpatrzyć należy kilka przypadków.

1/ $x > 1$. W takim razie ciąg rośnie nieograniczenie. Udowodnimy, że począwszy od pewnego miejsca wyrazy jego są większe od dowolnie wielkiej liczby M .

Niech $x = 1 + d$, gdzie $d > 0$

$$x^n = (1 + d)^n = 1 + nd + \text{składniki dodatnie}$$

stąd

$$x^n > 1 + nd$$

gdzie

$$d = x - 1$$

Jeśli teraz weźmiemy

$$1 + nd > M$$

czyli

$$n > \frac{M-1}{d}$$

to

$$x^n > M$$

A więc

$$x^n \rightarrow \infty$$

2/ $x = 1$ Wszystkie wyrazy ciągu równe są jednoś-

ci, a więc

$$x^n \rightarrow 1$$

3/. $0 < x < 1$. Wprowadźmy liczbę

$$y = \frac{1}{x} > 1$$

W takim razie

$$x^n = \frac{1}{y^n}$$

Lecz

$$y^n \rightarrow \infty$$

A więc

$$x^n \rightarrow 0$$

4/ $-1 < x < 1$. Wprowadźmy liczbę

$$y = -x$$

przyczem

$$0 < y < 1$$

$$x^n = (-1)^n \cdot y^n$$

Ale

$$y^n \rightarrow 0$$

zatem

$$x^n \rightarrow 0$$

5/. $x < -1$. Wprowadźmy liczbę

$$y = -x > 1$$

$$y^n \rightarrow \infty$$

$$x^n = (-1)^n \cdot y^n$$

gdy $n = 2p$
 $x^{2p} \rightarrow \infty$

gdy zaś $n = 2p+1$
 $x^{2p+1} = -y^{2p+1}$

oraz $x^{2p+1} \rightarrow -\infty$

Ciąg więc w tym wypadku granicy nie posiada. Wykonywa on wahania nieskończone.

6/. $x = -1$. W takim razie $x^{2p} = 1$, $x^{2p+1} = -1$.

Jest to ciąg, o którym była mowa w jednym z przykładów poprzednich. Granicy nie posiada.

POJĘCIE PUNKTU SKUPIENIA.

Niech będzie dany zbiór liczb: u_1, u_2, u_3, \dots

Możemy go przedstawić geometrycznie, odkładając na prostej punkty, których odcięte są równe liczbom danego zbioru. Przedziałem liczbowym nazywa się zbiór wszystkich liczb, zawartych między dwiema liczbami a i b /przypomnę włączamy liczby a i b /; oznaczamy go przez (a, b) . Liczba x nale-